第十章 正交编码与伪随机序列

尹林子

物理科学与技术学院电信系

基本内容

- 引言
- 正交编码
- 伪随机序列
- 伪随机序列应用

10.1 引言

正交编码：

可以用作纠错码；实现码分多址通信。

伪随机序列：

可用于误码率测量、时延测量、扩频通信及分离多径。

10.2 正交编码

一、正交概念：

$$\int_0^T S_1(t)\cdot S_2(t)dt = 0$$ 两信号正交

$$\int_0^T S_i(t)\cdot S_j(t)dt = 0$$ $i \neq j$；$i\ ,j = 1,2,\cdots,m$

信号两两正交

互相关

二、数字信号两码组的正交性：

设长为n的编码中码元只取$+1$，-1，x, y为码组。

$$x = (x_1, x_2, x_3, \cdots x_n); y = (y_1, y_2, y_3, \cdots y_n)$$

则x和y的互相关系数定义为：

$$\rho(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

若码组x, y正交，则必有$\rho(x, y) = 0$

三、自相关系数：

$$\rho_{x(j)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i x_{i+j} \qquad j=0,1,2,\cdots,n-1$$

式中，x的下标按模n运算，即有$x_{n+k}\equiv x_k$

若规定"0"表示"+1"，"1"表示"−1"，则上述互相关系数定义为：$\rho(x,y)=\dfrac{A-D}{A+D}$，其中$A-x$和$y$中对应码元相同的个数；$D-x$和$y$中对应码元不相同的个数。

超正交与双正交

四、超正交：

若两码组间的相关系数$\rho < 0$，则称这两个码组互相超正交，若一种编码中任两码组间均超正交，则称这种编码为超正交编码。

五、双正交编码：由正交编码与其反码构成。

正交码：
$$(0,0,0,0)$$
$$(0,0,1,1)$$
$$(0,1,1,0)$$
$$(0,1,0,1)$$

反码：
$$(1,1,1,1)$$
$$(1,1,0,0)$$
$$(1,0,0,1)$$
$$(1,0,1,0)$$

六、 Hadamard 矩阵：

又称 H 矩阵，是一种方阵，元素为 +1 、 -1 ，而且各行各列是相互正交的，最低阶为 2 阶。

$$H_2=\begin{bmatrix}+1 & +1\\ +1 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow H_2=\begin{bmatrix}+ & +\\ + & -\end{bmatrix}$$

阶数为 2 的幂的高阶 H 矩阵可从下列递推关系得出：

$$H_N=H_{N/2}\otimes H_2$$

$\otimes$–表示直积

Hadamard 矩阵

$$H_4 = H_2 \otimes H_2 = \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix}$$

$$H_8 = H_4 \otimes H_2 = \begin{bmatrix} H_4 & H_4 \\ H_4 & -H_4 \end{bmatrix} = \cdots$$

正规 Hadamard 矩阵：H 为对称矩阵，且第一行和第一列元素全为 +。

Walsh 矩阵

若将 H 矩阵中行的次序按“ +1” 或“ -1” 交变次数的多少重新排列，可得 Walsh 矩阵。

$$w = \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \end{bmatrix}$$

10.3 伪随机序列

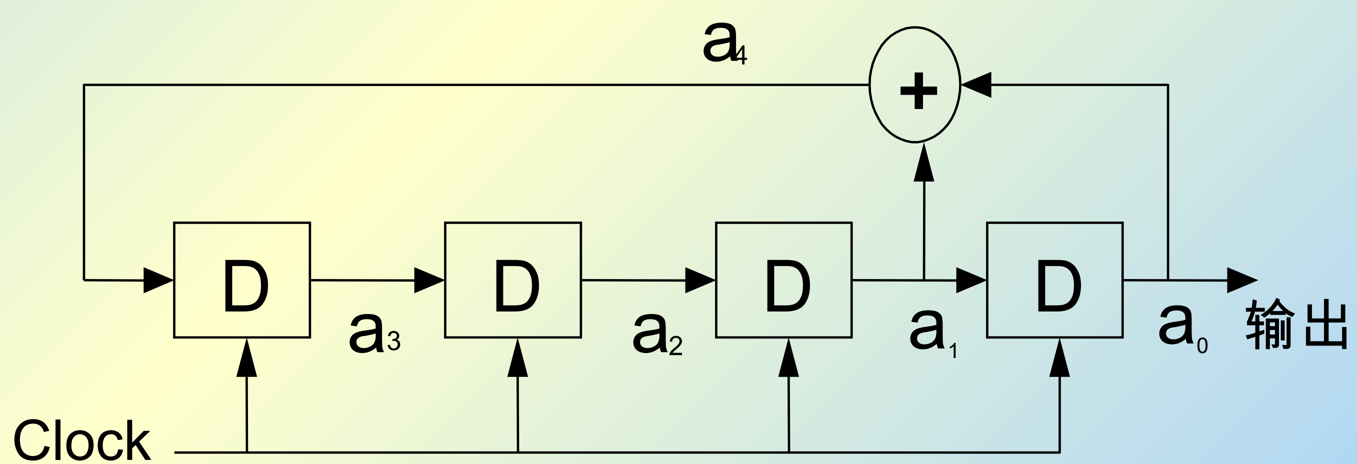
- 目前广泛应用的伪随机噪声都是由数字电路产生的周期序列得到的。这种周期序列称为伪随机序列。
- 通常产生伪随机序列的电路为反馈移存器。
- 分为：线形反馈移存器和非线性反馈移存器。

10.3 伪随机序列

一、 m 序列

m 序列是一种伪随机序列，它是最长线性反馈特征寄存的序列的简称， **m** 序列是由常线性反馈的转移寄存而产生的序列，并且具有最长周期。

四级 m 序列发生器



m 序列

首先设定各级寄存器的状态，在时钟触发下，每次移位后各级寄存器状态发生变化，观察任何一级寄存器的输出，就会发现，在时钟的控制下，会产生一个序列。

(1) 在相同级数下，采用不同线性反馈的逻辑所得到的周期不同，m 序列发生器是一种最长周期的。

(2) 对于 4 级来说，其反馈逻辑为 $a_4 = a_1 \oplus a_0$

(3) 它产生 15 位周期，第 16 位后开始重复，这就是周期性。

m 序列

4 级移位寄存器共有 2^4 。 即 16 种状态，除了全 0 状态外，其余 15 种状态都可出现，全 0 状态是要被禁止的。

如果改变反馈逻辑，就不能得到最长周期的 m 序列。

如 4 级，反馈逻辑为 $a_4 = a_2 \oplus a_0$ 那么它只能形成 **100010** 。周期为 **6** ， 所以线性反馈移位寄存器是和它的反馈逻辑有关。

一般情况：n 级

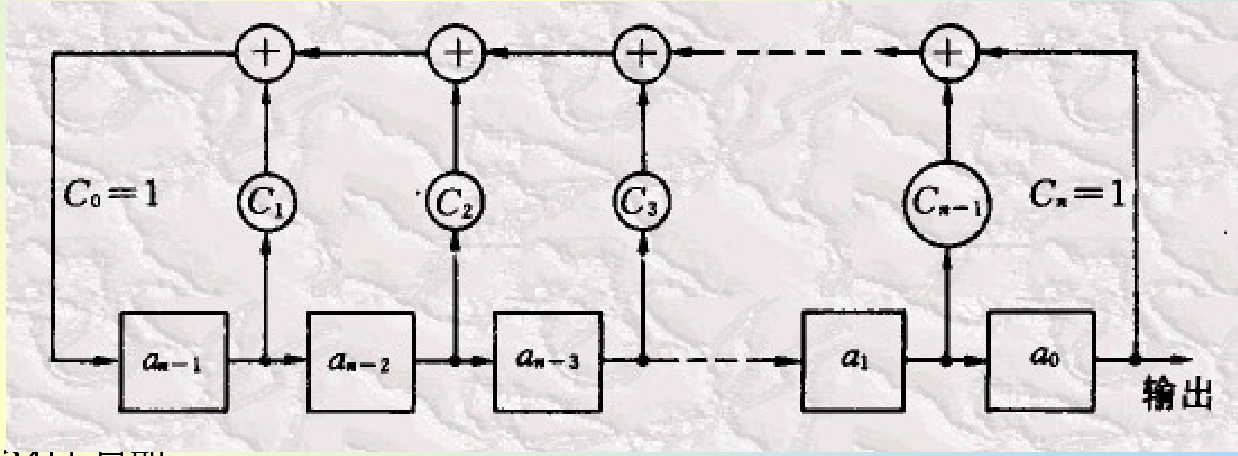
- 一般情况下，**n** 级线性反馈寄存器，它的线性反馈逻辑可表示为

$$a_n = C_1 a_{n-1} \oplus C_2 a_{n-2} \oplus C_3 a_{n-3} \oplus \cdots \oplus C_n a_0$$

  - C_i 表示反馈线的连接状态

$C_i = 1$表示$n-i$级输出加入反馈连线

$C_i = 0$表示$n-i$级输出未参加反馈



n 级

- 上式可改写为 $$\sum_{i=0}^{n} C_i a_{n-i} = 0$$
- 定义一个多项式 $$F(x) = \sum_{i=0}^{n} C_i x^i$$
  - 称之为线性反馈移位寄存器的特征多项式。
  - 例如图 10-2 为: $$f(x) = x^4 + x + 1$$

定义母函数:

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

几个定理

- 定理一：f（x）G（x）=h（x）
- h（x）为次数低于f（x）次数的多项式
- 定理二：一n级线形反馈移位寄存器之相继状态具有周期性，周期 $p \le 2^n-1$
- 定理三：若序列 $A=\{a_k\}$ 具有最长周期，则f（x）应为既约多项式；
- 定理四：一个n位移位寄存器的特征多项式若为既约的，则由其产生的序列A的周期等于使f（x）能整除的 x^p+1 中最小的正整数p

n 次本原多项式

- $F(x)$是 n 次本原多项式，需满足以下条件：

（1）$F(x)$是既约的，即是不能再分解。

（2）$F(x)$可整除 x^m+1，这里$m=2^n-1$

（3）$F(x)$不能整除 x^q+1,这里$q<m$。

故，一反馈移位寄存器能产生 m 序列的充要条件为：

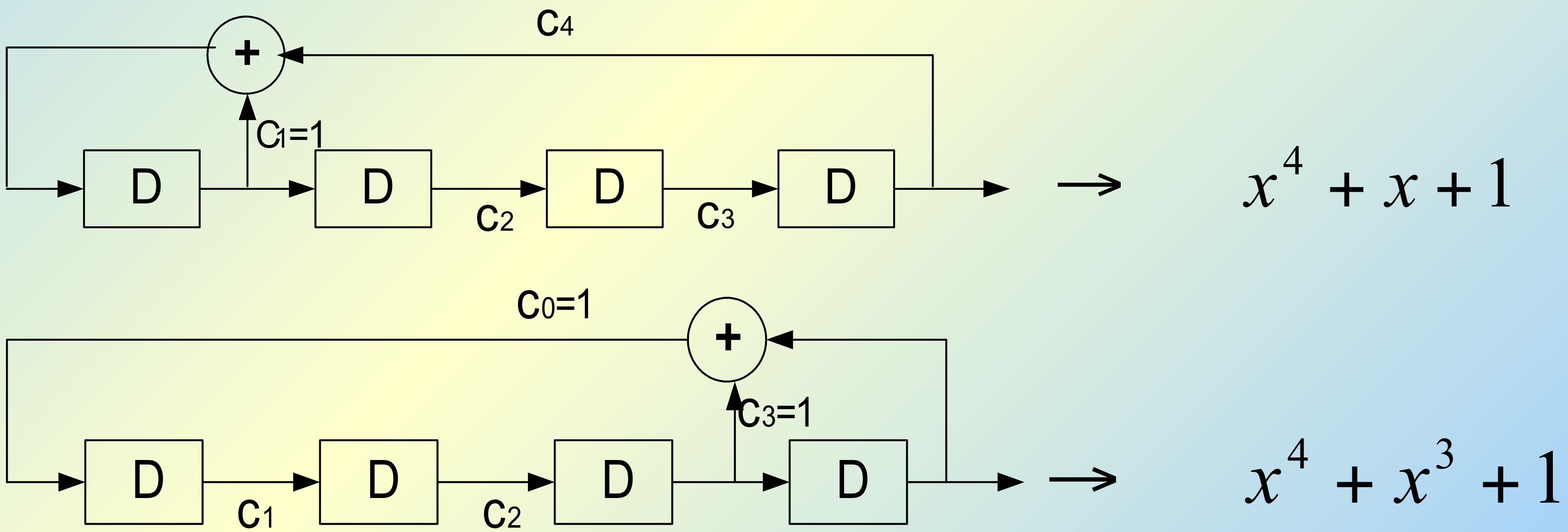
反馈移位寄存器的特征多项式为本原多项式

例如：4级

$$m = 2^4 - 1 = 15$$

$$x^{15} + 1 = (x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)$$

根据本原多项式的定义 $x^4 + x + 1$和$x^4 + x^3 + 1$是本原多项式。



本原多项式的系数

- **通常，一个本原系统式系数都表示为八进制形式，表 10-1 列出了本原多项式的系数。**
  - 例如，对于 4 级

$$
\begin{array}{cccccccc}
23 \rightarrow & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \rightarrow x^4 + x + 1 \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
& C_5 & C_4 & C_3 & C_2 & C_1 & C_0 &
\end{array}
$$

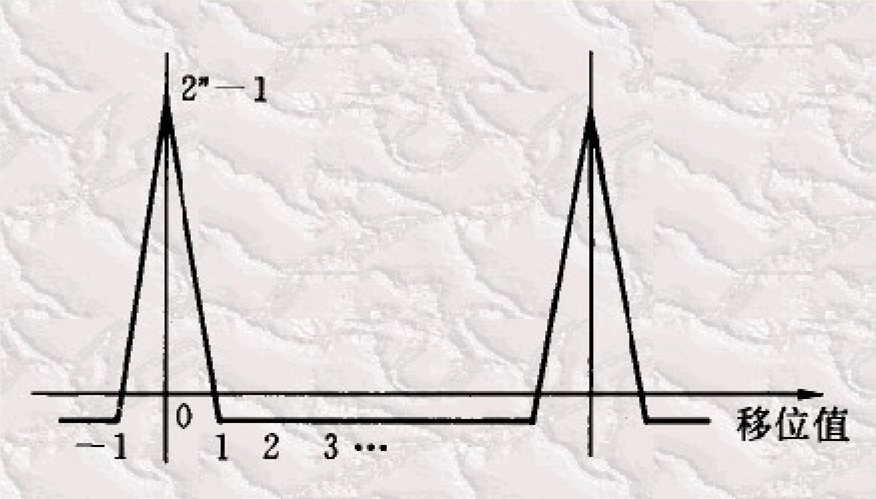
$$
\begin{array}{cccccccc}
31 \rightarrow & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \rightarrow x^4 + x^3 + 1 \\
& \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
& C_5 & C_4 & C_3 & C_2 & C_1 & C_0 &
\end{array}
$$

m 序列的性质

- (1) 由 n 级移位寄存器产生的 m 序列周期为 $2^n - 1$
- (2) 除全 0 状态外，其它状态都在 m 序列一个周期内 出现，而且只出现一次， m 序列中“1”和“0”概率大致相同， “1”的只比“0”的多一个。
- (3) 游程分布：长度为 k 的游程数目占游程总数的 2^{-k}。并且在长度为 k（$1 \leqslant k \leqslant n-2$）的游程中，连“1”的游程和连“0”的游程各占一半。
- (4) m 序列的自相关函数。当二进制序列中“0”、“1” 分别表示为“+1”和“-1”时，其自相关函数为：

m 序列的性质（续）

$$R(j)=\frac{A-D}{A+D}$$



- A 为序列与其 i 次移位序列在一个周期内逐位码元相同的数目
- D 为序列与其 i 次移位序列在一个周期内逐位码元不同的数目

m 序列的性质 (续)

- **M** 序列的自相关函数只有两种取值： **0** 或者 **-1/m** ，称这种自相关函数只有两种取值的序列为双值自相关序列。
- 功率谱密度：趋于白噪声的功率谱密度
- 伪噪声特性：由于 **m** 序列的均衡性，游程分布，自相关函数和功率谱与随机序列的基本性质很相似，所以通常认为 **m** 序列属于伪噪声或伪随机序列。

M 序列

一、定义：

由**非线性**反馈移存器产生的周期最长的序列。周期为 2^n 。

二、性质：

（ 1 ）均衡性：出现“ 0” 与“ 1” 的数目相等。

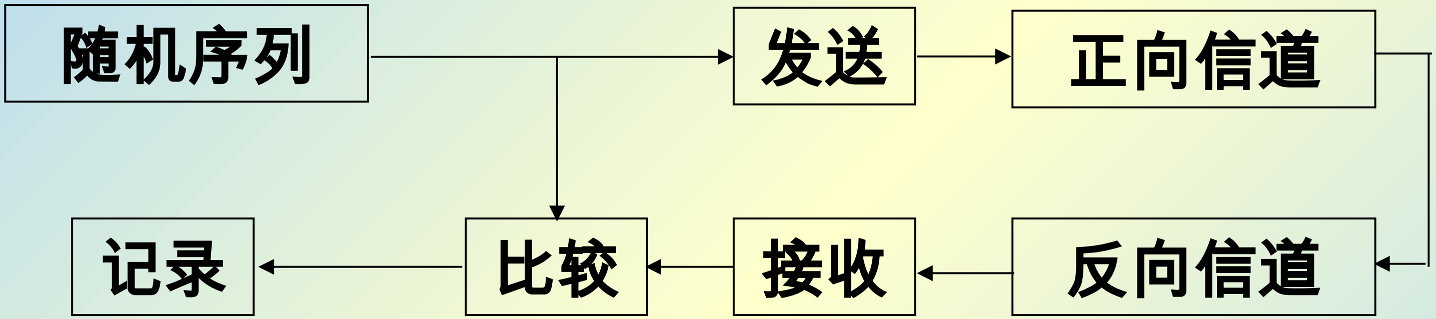
（ 2 ）游程分布：游程共有 2^{n-1} 个，其中长度为 k 的游程占 2^{-k} ， $1 \le k \le n-2$ ；长为 n 的游程有两个，没有长为 n-1 的游程。

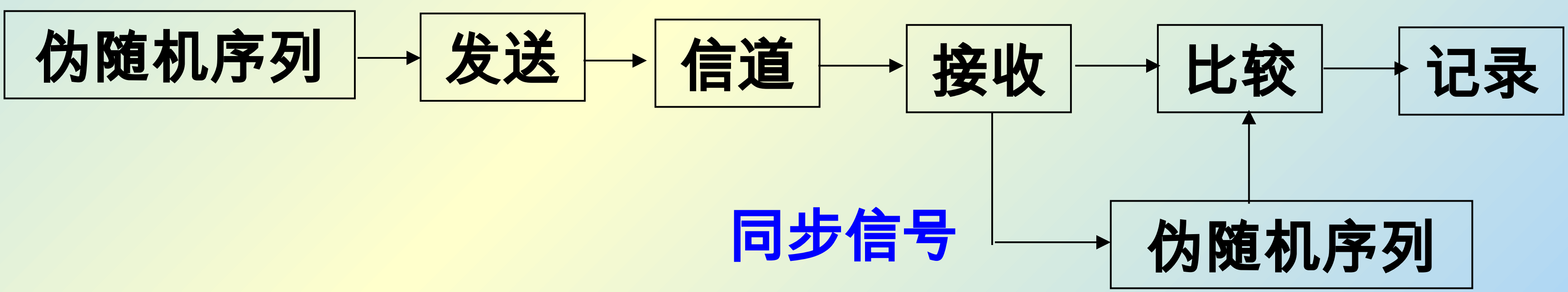
（ 3 ）不再具有 m 序列的移位相加特性及双值自相关特性。

（ 4 ）序列的数目多。 N=10 时 ,m 序列 60 个 ,M 序列 1.3×10^{151} 个

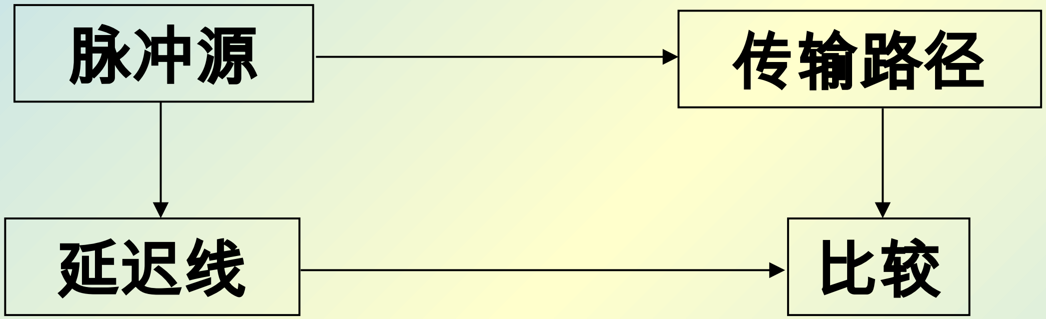
§ 10.4 伪随机序列的应用

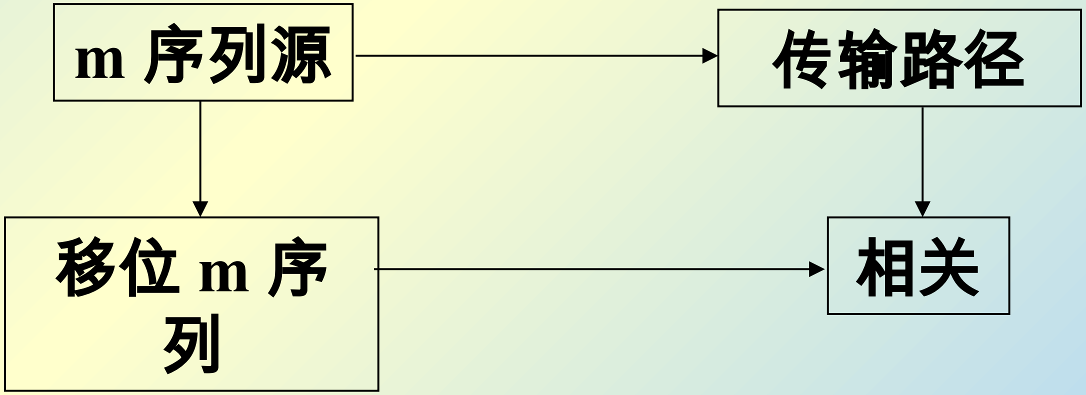
一、误码率测量：





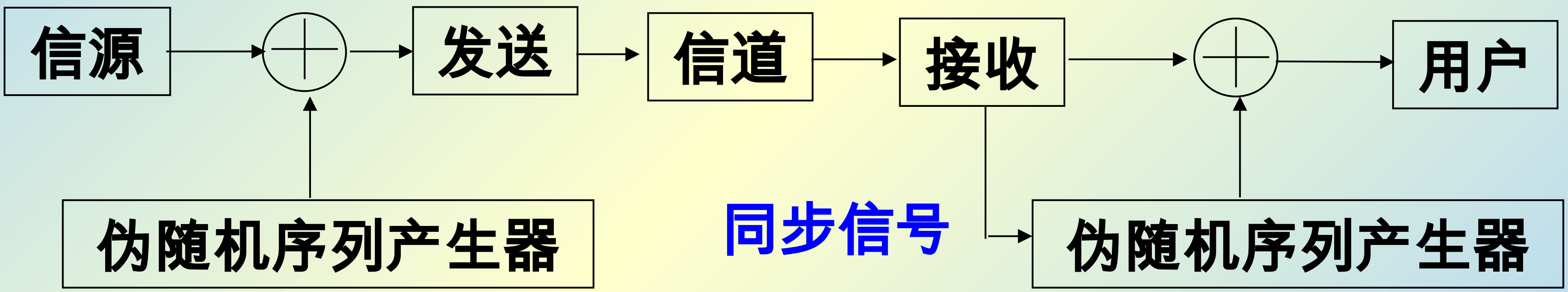
二、时延测量：





三、噪声产生器：

四、通信加密：

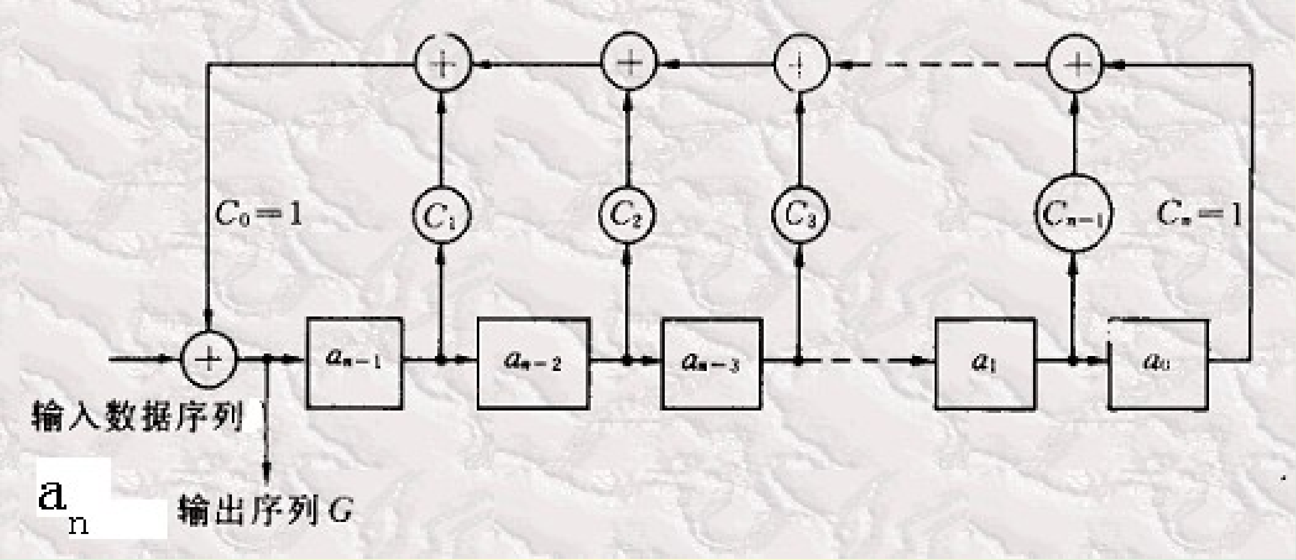


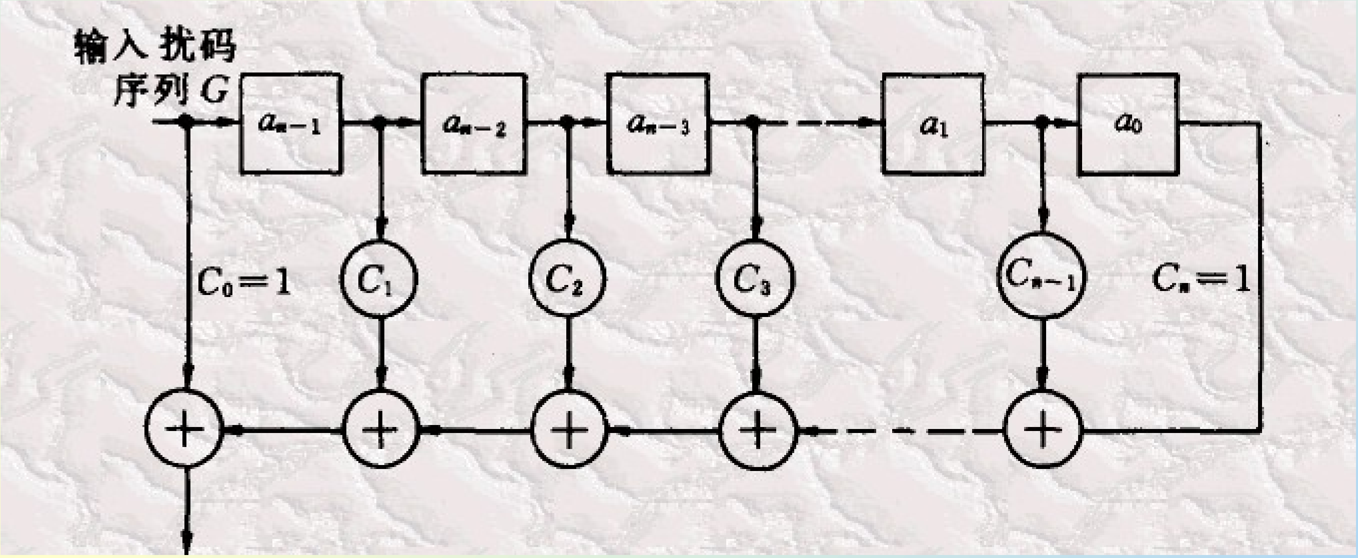
§ 10.4　伪随机序列的应用

五、数据序列的加扰与解扰：

- 将二进制数字信息先作“随机化”处理，变为伪随机序列，也能限制连 **0** （或连 **1** ）的长度。这种“随机化”称为“扰码”。
- 在接受端消除“扰乱”的过程称为“解扰”。
- 完成“扰码”和“解扰”的电路相应的称为扰码器和解扰器。
- 扰码器实际上就是一个 **m** 序列伪随机的发生器。

§ 10.4　伪随机序列的应用





§ 10.4　伪随机序列的应用

六、扩展频谱通信：

七、分离多径技术：