

# 第 2 章 随机信号分 析

尹林子

物理科学与技术学院信息所



# 内 容

- ❖ 随机过程基本概念
- ❖ 平稳随机过程
- ❖ 平稳随机过程的相关函数与功率谱密度
- ❖ 高斯过程
- ❖ 窄带随机过程
- ❖ 正弦波加窄带高斯过程
- ❖ 随机过程通过线性系统

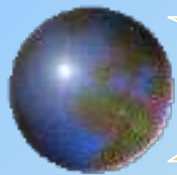


## 2.1 随机过程的基本概念

**1 定义：** 设随机实验  $E$  可能的结果为  $\xi(t)$  ，  
试验的样本空间为  $S$  ， 每次试验之后  $\xi(t)$   
取空间  $S$  中某一样本函数  $\xi(t)$  称 为随机函  
数， 当  $t$  代表时间量时  $\xi(t)$  称 为随机过程。

**两个基本属性：**

- ( 1 )  $\xi(t)$  是一个时间函数；
- ( 2 ) 给定任意时刻  $t_1$   $\xi(t_1)$  是一不含  $t$  变化的随机变量。



# 2.1 随机过程的基本概念

## 2 分布函数和概率密度:

一维分布函数  $F_1(x_1, t_1) = p[\xi(t_1) \leq x_1]$

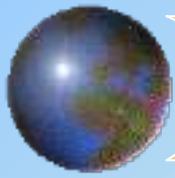
一维概率密度  $\frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1} = f_1(x_1, t_1)$

### n 维分布函数:

$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = p[\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \dots, \xi(t_n) \leq x_n]$

### n 维概率密度:

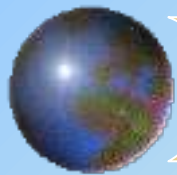
$\frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$



## 2.1 随机过程的基本概念

- 分布函数表明了随机变量在 **t1** 时刻取值大小的概率，为 **x** 的单调递增函数，有  $F(-\infty, t_1) = 0$ ； $F(\infty, t_1) = 1$ ；
- 概率密度函数表明了随机变量在 **t1** 时刻取某个值的概率， $f(x, t_1) \geq 0$ ；且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1, t_1) dx_1 = 1$$



## 2.1 随机过程的基本概念

### 3 随机过程的数字特征:

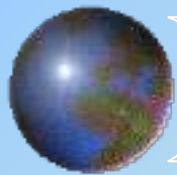
(1) 均值（数学期望或统计平均）：

$$E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x, t)dx = a(t)$$

(2) 方差： $D[\xi(t)] = E\{[\xi(t) - a(t)]^2\} = E[\xi(t)]^2 - [a(t)]^2$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x, t)dx - [a(t)]^2 = \sigma^2(t)$$

**物理意义：**表示随机过程在某时刻对于其均值的偏离程度。



## 2.1 随机过程的基本概念

(3) 相关函数：在衡量随机过程任意两个时刻上获得的随机变量之间的关联程度时，用协方差函数和相关函数。

协方差函数：
$$B(t_1, t_2) = E\{[\xi(t_1) - a(t_1)][\xi(t_2) - a(t_2)]\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - a(t_1)][x_2 - a(t_2)] f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

相关函数：
$$R(t_1, t_2) = E[\xi(t_1)\xi(t_2)]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$



## 2.2 平稳随机过程

1 定义:

**狭义平稳:** 指随机过程的  $n$  维分布函数或  $n$  维概率密度函数与时间起点无关。即:

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau)$$

$$f_1(x, t) = f_1(x) \quad f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2; \tau)$$

**广义平稳:** 随机过程的数学期望及方差与时间无关, 而其相关函数仅与时间间隔有关。

$$a(t) = a \quad \sigma^2(t) = \sigma^2 \quad R(t_1, t_1 + \tau) = R(\tau)$$



## 2.2 平稳随机过程

**2 性质：** (1) **各态历经性（遍历性）**：随机过程中的任一实现（样本函数）都经历了随机过程的所有可能状态。统计平均 --- 时间平均

(2) **自相关函数的性质：**

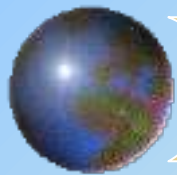
$$R(0) = E[\xi^2(t)] = S \quad (\xi(t)\text{的平均功率})$$

$$R(\tau) = R(-\tau) \quad (R(\tau)\text{是偶函数})$$

$$|R(\tau)| \leq R(0) \quad (R(\tau)\text{的上界})$$

$$R(\infty) = E^2[\xi(t)] \quad (\xi(t)\text{的直流功率})$$

$$R(0) - R(\infty) = \sigma^2 \quad (\text{方差}, \xi(t)\text{的交流功率})$$



## 2.2 平稳随机过程

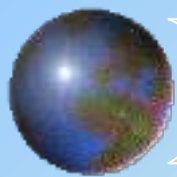
(3) 频谱特性:

$$P_{\xi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

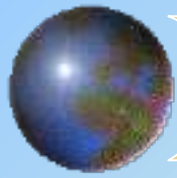
$$R(\tau) \leftrightarrow P_{\xi}(\omega)$$

$$R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi}(\omega) d\omega = S$$



## 2.3 高斯随机过程

- 1 **定义**：任意  $n$  维分布都服从正态分布的随机过程。
- 2 **重要性质**：
  - (1) 若高斯过程是广义平稳的，则也是狭义平稳的。
  - (2) 若高斯过程中的随机变量之间互不相关，则他们也是统计独立的。
  - (3) 若干个高斯过程之和的过程仍是高斯型。
  - (4) 高斯过程经过线性变换（或线性系统）后的过程仍是高斯型。



## 2.3 高斯随机过程

3 一维概率密度和分布函数:

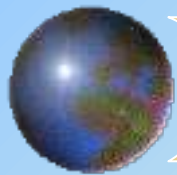
(1) 概率密度函数:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$

(2) 正态分布函数:  $F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right] dz$

定义误差函数和误差互补函数:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$$

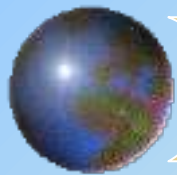


## 2.3 高斯随机过程

则:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} & x > a \\ 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} & x \leq a \end{cases}$$

用误差函数表示  $F(x)$  的好处是它简明的特性有助于分析通信系统的抗噪性能。



## 2.3 高斯随机过程

(3) 误差函数和互补误差函数的性质:

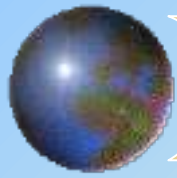
误差函数是自变量的递增函数:

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x) \qquad \operatorname{erf}(\infty) = 1$$

互补误差函数是自变量的递减函数:

$$\operatorname{erfc}(-x) = 1 - \operatorname{erfc}(x) \qquad \operatorname{erfc}(\infty) = 0$$

$$\operatorname{erfc}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \qquad x \gg 1$$



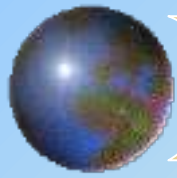
## 2.4 窄带随机过程

1 定义与表达式:  $\Delta f \ll f_c$

$$\xi(t) = a_\xi(t) \cos[\omega_c t + \varphi_\xi(t)] \quad a_\xi(t) \geq 0$$

$$\xi(t) = \xi_c(t) \cos(\omega_c t) - \xi_s(t) \sin(\omega_c t)$$

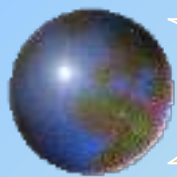
$$\xi_c(t) = a_\xi(t) \cos \varphi_\xi(t) \quad \xi_s(t) = a_\xi(t) \sin \varphi_\xi(t)$$



## 2.4 窄带随机过程

### 2 统计特性 --- 结论 1 :

一个均值为零，方差为 $\sigma_{\xi}^2$ 的窄带平稳高斯过程 $\xi(t)$ ，它的同相分量 $\xi_c(t)$ 、正交分量 $\xi_s(t)$ 同样是平稳高斯过程，而且均值都为零，方差也相同。此外，在同一时刻上得到的 $\xi_c(t)$ 和 $\xi_s(t)$ 是互不相关的或统计独立的。



## 2.4 窄带随机过程

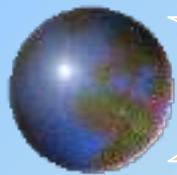
### 2 统计特性 --- 结论 2 :

一个均值为零，方差为 $\sigma_\xi^2$ 的窄带平稳高斯过程 $\xi(t)$ ，其包络 $a_\xi(t)$ 的一维分布是瑞利分布，相位 $\varphi_\xi(t)$ 的一维分布是均匀分布，并且就一维分布而言， $a_\xi(t)$ 与 $\varphi_\xi(t)$ 是统计独立的。

$$f(a_\xi) = \frac{a_\xi}{\sigma_\xi^2} \exp\left[-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right] \quad a_\xi \geq 0$$

$$f(\varphi_\xi) = \frac{1}{2\pi} \quad 0 \leq \varphi_\xi \leq 2\pi$$

$$f(a_\xi, \varphi_\xi) = f(a_\xi) \cdot f(\varphi_\xi)$$



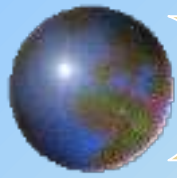
## 2.5 宽带随机过程

1 白噪声：功率谱密度在整个频域内都是均匀分布。

$$p_{\xi}(w) = \frac{n_0}{2} (w / \text{Hz}) \quad R(\tau) = \frac{n_0}{2} \delta(\tau)$$

2 带限白噪声：白噪声被限制在  $(-f_0, f_0)$  内。

$$R(\tau) = \int_{-f_0}^{f_0} \frac{n_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df = n_0 f_0 \frac{\sin 2\pi f_0 \tau}{2\pi f_0 \tau}$$

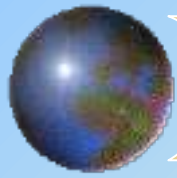


## 2.5 宽带随机过程

✦ 可见，带限白噪声只有在

$$2\pi f_0 \tau = k\pi, \text{ 即 } \tau = k / (2f_0)$$

时相关函数为 **0**，此时得到的随机变量不相关，因此，如果对带限白噪声按抽样定理抽样的话，则各抽样值是互不相关的随机变量。



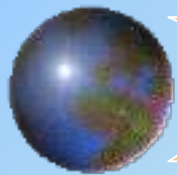
## 2.6 正弦波加窄带高斯过程

设合成信号： $r(t) = A \cos(\omega_c t + \theta) + n(t)$

$n(t) = n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t$  为窄带高斯过程，其均值为零；正弦波的  $\theta$  在  $(0, 2\pi)$  上均匀分布，且假定振幅  $A$  和频率  $\omega_c$  均为常数，则

$$\begin{aligned} r(t) &= [A \cos \theta + n_c(t)] \cos \omega_c t - [A \sin \theta + n_s(t)] \sin \omega_c t \\ &= z_c(t) \cos \omega_c t - z_s(t) \sin \omega_c t \\ &= z(t) \cos[\omega_c t + \varphi(t)] \end{aligned}$$

$$z_c(t) = A \cos \theta + n_c(t) \quad z_s(t) = A \sin \theta + n_s(t)$$



## 2.6 正弦波加窄带高斯过程

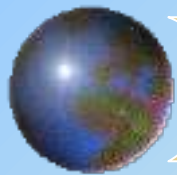
合成信号  $\mathbf{r}(\mathbf{t})$  的包络和相位:

$$z(t) = \sqrt{z_c^2(t) + z_s^2(t)} \quad z \geq 0$$

$$\varphi(t) = \arctan \frac{z_s(t)}{z_c(t)} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

**可以证明:** 正弦波加窄带高斯过程的包络服从广义瑞利分布, 包络的概率密度函数为:

$$f(z) = \frac{z}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(z^2 + A^2)\right] I_0\left(\frac{Az}{\sigma^2}\right) \quad z \geq 0$$



## 2.7 随机过程通过线性系统

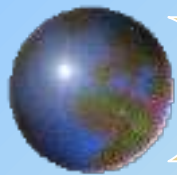
只要输入有界且系统是物理可实现的，则当输入是随机过程  $U_i(t)$  时，便有输出随机过程  $U_o(t)$ ，且有

$$\varepsilon_o(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \varepsilon_i(t - \tau) d\tau$$

(1) 若线性系统的输入是平稳随机过程，则输出也是平稳随机过程。即：

$$E[\xi_o(t)] = E[\xi_i(t)] \cdot H(0) \quad H(0) = \int_0^{\infty} h(t) dt$$

$$R_o(t_1, t_1 + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) R_i(\tau + \alpha - \beta) d\alpha d\beta = R_o(\tau)$$



## 2.7 随机过程通过线性系统

(2) 系统输出功率谱密度是输入功率谱密度与系统功率传输函数的乘积。

$$P_{\xi_0}(\omega) = |H(\omega)|^2 P_{\xi_i}(\omega)$$

(3) 高斯过程经线性变换后的过程仍为高斯型。