第 2 章 随机信号分析

尹林子
物理科学与技术学院信息所

内　　容

- 随机过程基本概念
- 平稳随机过程
- 平稳随机过程的相关函数与功率谱密度
- 高斯过程
- 窄带随机过程
- 正弦波加窄带高斯过程
- 随机过程通过线性系统

2.1 随机过程的基本概念

1 定义：设随机实验 **E** 可能的结果为 $\xi(t)$，试验的样本空间为 S，每次试验之后 $\xi(t)$ 取空间 S 中某一样本函数，称 $\xi(t)$ 为随机函数，当 t 代表时间量时，称 $\xi(t)$ 为随机过程。

两个基本属性：

（1）$\xi(t)$ 是一个时间函数；

（2）给定任意时刻 t_1，$\xi(t_1)$ 是一不含 t 变化的随机变量。

2.1 随机过程的基本概念

2 分布函数和概率密度:

一维分布函数: $F_1(x_1,t_1) = p[\xi(t_1) \le x_1]$

一维概率密度: $\dfrac{\partial F_1(x_1,t_1)}{\partial x_1} = f_1(x_1,t_1)$

n 维分布函数:

$$F_n(x_1,x_2,\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n) = p[\xi(t_1) \le x_1,\xi(t_2) \le x_2,\cdots,\xi(t_n) \le x_n]$$

n 维概率密度:

$$\frac{\partial^n F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} = f_n(x_1,x_2,\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

2.1 随机过程的基本概念

- 分布函数表明了随机变量在 **t1** 时刻取值大小的概率，为 **x** 的单调递增函数，有 F（∞， t1 ）=1； F（-∞， t1 ） =0；
- 概率密度函数表明了随机变量在 **t1** 时刻取某个值的概率， f（x， t1）≥0；且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1,t_1)dx_1 = 1$$

2.1 随机过程的基本概念

3 随机过程的数字特征：

（1）均值（数学期望或统计平均）：

$$E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x,t)dx = a(t)$$

（2）方差：$D[\xi(t)] = E\{[\xi(t) - a(t)]^2\} = E[\xi(t)]^2 - [a(t)]^2$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x,t)dx - [a(t)]^2 = \sigma^2(t)$$

物理意义：表示随机过程在某时刻对于其均值的偏离程度。

2.1 随机过程的基本概念

(3) 相关函数：在衡量随机过程任意两个时刻上获得的随机变量之间的关联程度时，用协方差函数和相关函数。

协方差函数： $B(t_1,t_2)=E\{[\xi(t_1)-a(t_1)][\xi(t_2)-a(t_2)]\}$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_1-a(t_1)][x_2-a(t_2)]f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

相关函数： $R(t_1,t_2)=E[\xi(t_1)\xi(t_2)]$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

2.2 平稳随机过程

1 定义:

狭义平稳: 指随机过程的 n 维分布函数或 n 维概率密度函数与时间起点无关。即:

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau)$$

$$f_1(x,t)=f_1(x) \qquad f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_2(x_1,x_2;\tau)$$

广义平稳: 随机过程的数学期望及方差与时间无关,而其相关函数仅与时间间隔有关。

$$a(t)=a \qquad \sigma^2(t)=\sigma^2 \qquad R(t_1,t_1+\tau)=R(\tau)$$

2.2 平稳随机过程

2 性质：(1) 各态历经性（遍历性）：随机过程中的任一实现（样本函数）都经历了随机过程的所有可能状态。统计平均 --- 时间平均

(2) 自相关函数的性质：

$$R(0) = E[\xi^2(t)] = S \qquad (\xi(t)\text{的平均功率})$$

$$R(\tau) = R(-\tau) \qquad (R(\tau)\text{是偶函数})$$

$$|R(\tau)| \leq R(0) \qquad (R(\tau)\text{的上界})$$

$$R(\infty) = E^2[\xi(t)] \qquad (\xi(t)\text{的直流功率})$$

$$R(0) - R(\infty) = \sigma^2 \qquad (\text{方差，}\xi(t)\text{的交流功率})$$

(3) 频谱特性:

$$P_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$R(\tau) \leftrightarrow P_\xi(\omega)$$

$$R(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(\omega) d\omega = S$$

2.3 高斯随机过程

1 定义：任意 n 维分布都服从正态分布的随机过程。

2 重要性质：

（1）若高斯过程是广义平稳的，则也是狭义平稳的。

（2）若高斯过程中的随机变量之间互不相关，则他们也是统计独立的。

（3）若干个高斯过程之和的过程仍是高斯型。

（4）高斯过程经过线性变换（或线性系统）后的过程仍是高斯型。

2.3 高斯随机过程

3 一维概率密度和分布函数:

（1）概率密度函数: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp[-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}]$

（2）正态分布函数: $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp[-\dfrac{(z-a)^2}{2\sigma^2}]dz$

定义误差函数和误差互补函数:

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

$$erfc(x)=1-erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-t^2}dt$$

2.3 高斯随机过程

则:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}erf\,\dfrac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} & x \quad a\\[2ex] 1-\dfrac{1}{2}erfc\,\dfrac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} & x\le a\end{cases}$$

用误差函数表示 F(x) 的好处是它简明的特性有助于分析通信系统的抗噪性能。

2.3 高斯随机过程

（3）误差函数和互补误差函数的性质：

误差函数是自变量的递增函数：

$$erf(-x) = -erf(x) \qquad erf(\infty) = 1$$

互补误差函数是自变量的递减函数：

$$erfc(-x) = 1 - erfc(x) \qquad erfc(\infty) = 0$$

$$erfc(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \qquad x >> 1$$

2.4 窄带随机过程

1 定义与表达式: $\Delta f << f_c$

$$\xi(t) = a_\xi(t)\cos[\omega_c t + \varphi_\xi(t)] \qquad a_\xi(t) \quad 0$$

$$\xi(t) = \xi_c(t)\cos(\omega_c t) - \xi_s(t)\sin(\omega_c t)$$

$$\xi_c(t) = a_\xi(t)\cos\varphi_\xi(t) \qquad \xi_s(t) = a_\xi(t)\sin\varphi_\xi(t)$$

2.4 窄带随机过程

2 统计特性 --- 结论 **1**：

一个均值为零，方差为σ_ξ^2的窄带平稳高斯过程$\xi(t)$，它的同相分量ξ_c(t)、正交分量ξ_s(t)同样是平稳高斯过程，而且均值都为零，方差也相同。此外，在同一时刻上得到的ξ_c(t)和ξ_s(t)是互不相关的或统计独立的。

2.4 窄带随机过程

2 统计特性 --- 结论 **2**：

一个均值为零，方差为σ_ξ^2的窄带平稳高斯过程$\xi(t)$，

其包络a_ξ(t)的一维分布是瑞利分布，相位φ_ξ(t)

的一维分布是均匀分布，并且就一维分布而言，

$a_\xi(t)$与$\varphi_\xi(t)$是统计独立的。

$$f(a_\xi) = \frac{a_\xi}{\sigma_\xi^2}\exp[-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}] \qquad a_\xi \quad 0$$

$$f(\varphi_\xi) = \frac{1}{2\pi} \qquad 0 \le \varphi_\xi \le 2\pi$$

$$f(a_\xi, \varphi_\xi) = f(a_\xi) \cdot f(\varphi_\xi)$$

2.5 宽带随机过程

1 白噪声：功率谱密度在整个频域内都是均匀分布。

$$p_\xi(w) = \frac{n_0}{2}(w/Hz)$$

$$R(\tau) = \frac{n_0}{2}\delta(\tau)$$

2 带限白噪声： 白噪声被限制在 **($-f_0, f_0$)** 内。

$$R(\tau) = \int_{-f_0}^{f_0} \frac{n_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df = n_0 f_0 \frac{\sin 2\pi f_0 \tau}{2\pi f_0 \tau}$$

2.5 宽带随机过程

- 可见，带限白噪声只有在

$$2\pi f_0\tau = k\pi\text{，即}\tau = k/(2f_0)$$

时相关函数为 **0**，此时得到的随机变量不相关，因此，如果对带限白噪声按抽样定理抽样的话，则各抽样值是互不相关的随机变量。

2.6 正弦波加窄带高斯过程

设合成信号：$r(t) = A\cos(\omega_c t + \theta) + n(t)$

$n(t) = n_c(t)\cos\omega_c t - n_s(t)\sin\omega_c t$为窄带高斯过程，其均值为零；正弦波的$\theta$在$(0,2\pi)$上均匀分布，且假定振幅$A$和频率$\omega_c$均为常数，则

$$
\begin{aligned}
r(t) &= [A\cos\theta + n_c(t)]\cos\omega_c t - [A\sin\theta + n_s(t)]\sin\omega_c t \\
&= z_c(t)\cos\omega_c t - z_s(t)\sin\omega_c t \\
&= z(t)\cos[\omega_c t + \varphi(t)]
\end{aligned}
$$

$$z_c(t) = A\cos\theta + n_c(t) \qquad z_s(t) = A\sin\theta + n_s(t)$$

2.6 正弦波加窄带高斯过程

合成信号 **r(t)** 的包络和相位：

$$z(t)=\sqrt{z_c^2(t)+z_s^2(t)} \qquad z \quad 0$$

$$\varphi(t)=\arctan\frac{z_s(t)}{z_c(t)} \qquad 0\le\varphi\le 2\pi$$

可以证明：正弦波加窄带高斯过程的包络服从广义瑞利分布，包络的概率密度函数为：

$$f(z)=\frac{z}{\sigma^2}\exp[-\frac{1}{2\sigma^2}(z^2+A^2)]I_0(\frac{Az}{\sigma^2}) \qquad z \quad 0$$

2.7 随机过程通过线性系统

只要输入有界且系统是物理可实现的，则当输入是

随机过程 $U_i(t)$ 时，便有输出随机过程 $U_i(t)$ ，且有

$$\varepsilon_0(t)=\int_0^{\infty}h(\tau)\varepsilon_i(t-\tau)d\tau$$

（1）若线性系统的输入是平稳随机过程，则输出也是平稳随机过程。即：

$$E[\xi_0(t)]=E[\xi_i(t)]\cdot H(0) \qquad H(0)=\int_0^{\infty}h(t)dt$$

$$R_0(t_1,t_1+\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\alpha)h(\beta)R_i(\tau+\alpha-\beta)d\alpha d\beta=R_0(\tau)$$

2.7 随机过程通过线性系统

（2）系统输出功率谱密度是输入功率谱密度与系统功率传输函数的乘积。

$$P_{\xi_0}(\omega) = \left|H(\omega)\right|^2 P_{\xi_i}(\omega)$$

（3）高斯过程经线性变换后的过程仍为高斯型。