6.1 实二次型及其标准形

主要内容：

- 二次型及其矩阵
- 合同变换
- 用配方法化二次型为标准形
- 用正交变换化二次型为标准形

一. 二次型及其矩阵

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

其中： $a_{ij}=a_{ji}$

$$\begin{aligned}&=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n\\&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\&+\cdots\cdots\\&+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2\end{aligned}$$

称为 n 元二次型.

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

若a_{ij}为实数，则称为实二次型.

若a_{ij}为复数，则称为复二次型.

$$设\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\ a_{ij}=a_{ji},$$

则 $f(x_1, \ldots, x_n) = X^{\mathrm{T}}AX$.

A: 二次型 $f(x_1, \ldots, x_n)$ 的矩阵.

例1 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 3x_2x_3$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X^T A X$$

A: $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵

若令 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, 则有 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T B X$

但 $B^T \neq B$, 故 B 不是 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵

二次型 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$

也记为 $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX$.　　$(A^{\mathrm{T}}=A)$

二次型 $f(X)$的秩：A 的秩.

在例1 中， $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$R(A)=3$,

故 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的秩为 3 .

二. 合同变换

1. 矩阵合同

定义 对n阶矩阵A, B, 若存在可逆矩阵C, 使

$$C^TAC = B,$$

则称 A与 B合同.

矩阵合同具有以下性质：

(1) 反身性：矩阵A与自身合同；

(2) 对称性：若A与B合同，则B与A合同；

(3) 传递性：若A与B合同，且B与C合同, 则A与C合同.

A与B等价：$PAQ = B$, P, Q 可逆；

A与B相似：$P^{-1}AP = B$, P 可逆；

请思考：矩阵合同与等价、相似有何关系？

2. 合同变换

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \quad (1)$$

(1)式称为从 $y_1, \ldots, y_n$ 到 $x_1, \ldots, x_n$ 的线性变换.

令 $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

则(1)式可记为

$$X = C\,Y \qquad (2)$$

若C为可逆矩阵，则(2)式称为可逆变换，

若C为正交矩阵，则(2)式称为正交变换.

当C可逆时，(2)式又可记为

$$Y = C^{-1}X \qquad (3)$$

对于二次型 $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX$，若令$X=CY$ (C可逆),则

$$f(X)=(CY)^{\mathrm{T}}A(CY)=Y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)Y.$$

记 $B=C^{\mathrm{T}}AC$, 则 $B^{T}=B$, 且

$$f(X)=Y^{\mathrm{T}}BY=g(Y).$$

二次型 $f(X)$与 $g(Y)$ 的矩阵 A与B合同.

也称二次型 $f(X)$与 $g(Y)$ 合同.

称$X=CY$ (C可逆)为合同变换.

正交变换是一种特殊的可逆变换，也是一种特殊的合同变换，而合同变换就是可逆变换.

三. 用配方法化二次型为标准形

只含平方项的二次型

$$d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \ldots + d_r y_r^2 \qquad (d_i \neq 0)$$

称为标准形.

形如

$$z_1^2 + \ldots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \ldots - z_r^2$$

的二次型称为规范形.

p: 正惯性指数;

$r - p$: 负正惯性指数;

$|r - 2p|$: 符号差.

例2 用配方法化二次型为标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 2x_1x_3$$

$$=(x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3) + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2 + (x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2) - 2x_3^2$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 - 2x_3^2$$

令 $$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \qquad x_2 + 2x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad x_3 \end{cases}$$

则 $$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = \quad\quad x_2 + 2x_3 \\ y_3 = \quad\quad\quad\quad x_3 \end{cases}$ (1) 即 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = \quad\quad y_2 - 2y_3 \\ x_3 = \quad\quad\quad\quad y_3 \end{cases}$ (2)

(1): 从x_1, x_2, x_3到 y_1, y_2, y_3的线性变换.

(2): 从y_1, y_2, y_3到 x_1, x_2, x_3 的线性变换.

(1)与(2)所表达的x_1, x_2, x_3与 y_1, y_2, y_3 的关系是相同的.

利用配方法与归纳法可以证明：

定理1 任一实二次型$f(X) = X^TAX$ 都可用配方法化为标准形.

例3 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

令
$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = \qquad\quad y_3 \end{cases}$$

则，$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$

$$= 2(y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2) - 2y_2^2 - 2y_3^2 + 8y_2y_3$$

$$= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2^2 - 4y_2y_3 + 4y_3^2) + 6y_3^2$$

$$= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2$$

$$= 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$$

上式最后一步使用的变换是

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = \qquad\qquad y_3 \end{cases}$$

若再令 $\begin{cases} t_1 = \sqrt{2}z_1 \\ t_2 = \sqrt{6}z_3 \\ t_3 = \sqrt{2}z_2 \end{cases}$

则,

$$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2 = t_1^2 + t_2^2 - t_3^2$$

定理2 任何一个实二次型的规范形都是惟一的.

证 将实二次型 $f(X) = X^{\mathrm{T}}AX$ 经合同变换化为标准形后，将正项集中在前，负项集中在后：

$$d_1 y_1^2 + \ldots + d_{\mathrm{p}} y_{\mathrm{p}}^2 - d_{\mathrm{p}+1} y_{\mathrm{p}+1}^2 - \ldots - d_r y_r^2$$

令 $z_i = \sqrt{d_i} y_i \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$

得 $f(X) = X^{\mathrm{T}}AX$ 的规范形为

$$z_1^2 + \ldots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \ldots - z_r^2$$

由于合同变换不改变二次型的秩，所以 r 是惟一确定的. 在理论上还可进一步证明正惯性指数 p 是惟一的(此证明略)，因此，负惯性指数 $r-p$ 与符号差 $|r-2p|$ 也是惟一的.

四. 用正交变换化二次型为标准形

定理3 任一 n 元实二次型 $f(X) = X^TAX$ 都可用正交变换 $X = CY$ 化为标准形

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

其中 λ_1, λ_2, …, λ_n是A 的特征值.

证 因A 为n 阶实对称矩阵,

所以存在正交矩阵C (回顾5.4) , 使

$$C^TAC = C^{-1}AC = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

令 $X = CY$, 则

$$f(X) = Y^T C^TACY = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

例4 用正交变换化二次型为标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$$

解 $f(x_1, x_2, x_3)$的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda+7)$$

特征值：$\lambda_1 = 2$（二重特征值），$\lambda_2 = -7$,

求$\lambda_1 = 2$ 的特征向量：

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$$

特征向量：$\alpha_1 = (-2, 1, 0)^T$， $\alpha_2 = (2, 0, 1)^T$

将α_1, α_2 正交化：

$$\beta_1 = \alpha_1 = (-2, 1, 0)^T,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \cdots = \frac{1}{5}(2, 4, 5)^T$$

求λ_1= -7 的特征向量：

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 4 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} x_3, \\ x_2 = x_3 \end{cases} \qquad \alpha_3 = (1, 2, 2)^{\mathrm{T}},$$

将 β_1, β_2 , α_3 单位化：

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^T, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}(2, 4, 5)^T$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)^T$$

用正交变换化二次型为标准形

令 $C=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$$X=(x_1,x_2,x_3)^T,\quad Y=(y_1,y_2,y_3)^T$$

则 $X=CY$ 为正交变换，且

$$f = 2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$$

学到了什么?

- 二次型及其矩阵
- 合同变换
- 用配方法化二次型为标准形
- 用正交变换化二次型为标准形