5.2 矩阵的相似对角化

主要内容：相似矩阵的基本概念

矩阵的相似对角化

一. 相似矩阵的基本概念

例　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

求　A^{10}.

解　$A = P\Lambda P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = P\Lambda P^{-1} P\Lambda P^{-1} \cdots P\Lambda P^{-1} P\Lambda P^{-1} = P\Lambda^{10} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

问题：　1. 什么样的矩阵有这样的 P 与 Λ？

　　　　2. $P = ?$　　$\Lambda = ?$

一. 矩阵相似的定义与性质

定义 设A与B都是n阶矩阵，如果存在可逆矩阵P,使

$$P^{-1}AP=B$$

则称A与B相似，记为$A\sim B$.

简单性质： (1)反身性 $A\sim A$;

(2)对称性 $A\sim B\Rightarrow B\sim A$;

(3)传递性 $A\sim B$ 且 $B\sim C\Rightarrow A\sim C$.

证(3): $A=PBP^{-1}$ $B=QCQ^{-1}$

$$A=PQCQ^{-1}P^{-1}=DCD^{-1}\quad (D=PQ).$$

定理1 相似矩阵有相同的特征值 .

证 设 $A \sim B$,则 $B = P^{-1}AP$.

$$|\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1}AP|$$
$$= |P^{-1}(\lambda I - A)P|$$
$$= |P^{-1}||\lambda I - A||P|$$
$$= |\lambda I - A|$$

思考：相似矩阵有相同的行列式？

二. 矩阵的相似对角化

定理2 设矩阵

$$A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

则 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ 是A的全部特征值.

证： $|\lambda I-\Lambda| = \begin{vmatrix} \lambda-\lambda_1 & & & \\ & \lambda-\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda-\lambda_n \end{vmatrix}$

$$=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

$\therefore$ Λ的全部特征值是:$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

$\because$ A与Λ的特征值相同，

$\therefore$ A的全部特征值是: $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

定理3 n阶矩阵A与对角矩阵相似的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量.

证:充分性　设A有n个线性无关的特征向量：

$$P_1, P_2, \cdots, P_n \qquad AP_i = \lambda_i P_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

令 $P = (P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_n)$ $\quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

则 $AP = P\Lambda \qquad P^{-1}AP = \Lambda$

$$\therefore \ A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

矩阵的相似对角化

必要性　设 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

则　$AP=P\Lambda$

设　$P=(P_1\quad P_2\quad \cdots\quad P_n)$

则　$(AP_1\quad AP_2\quad \cdots\quad AP_n)=(\lambda_1P_1\quad \lambda_2P_2\quad \cdots\quad \lambda_nP_n)$

$AP_i=\lambda_iP_i\quad (i=1,2,\cdots,n)$

$\therefore$　$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是 A 的 n 个线性无关的特征向量.

定理4 矩阵 A 不同特征值的特征向量线性无关 .

证：设 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2,\cdots,A\alpha_m=\lambda_m\alpha_m$，且 $\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots,\ \lambda_m$ 互不相同.

当 $m=2$ 时，设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$.　(1)

则 $A(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)=k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2=k_1\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_2\alpha_2=0$　(2)

又由式(1)：　$k_1\lambda_1\alpha_1+k_2\lambda_1\alpha_2=0$　(3)

(2)−(3)：　$k_2(\lambda_2-\lambda_1)\alpha_2=0$

$\because$　$\lambda_1\neq\lambda_2$ 且 $\alpha_2\neq 0$，　　$\therefore$　$k_2=0$，同理，$k_1=0$，

$\therefore$　α_1,α_2 线性无关.

推论1 如果矩阵 A 的特征值都是单特征根，则 A 与对角矩阵相似 .

证：设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的互异特征值

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是它们对应的特征向量

则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，

$\therefore$ A 与对角矩阵相似.

推论2 设 $\boldsymbol{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值，$\boldsymbol{\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir_i}}$ 是 $\boldsymbol{\lambda_i}$ 的线性无关特征向量，则 $\boldsymbol{\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{k1},\cdots,\alpha_{kr_k}}$ 线性无关 .

推论3 n阶矩阵A与对角矩阵相似

$\Leftrightarrow$ 若λ_i是A的k_i重特征值，则$(\lambda_i I - A)X = 0$的基础解系由k_i个解向量组成 .

$\Leftrightarrow$ $R(\lambda_i I - A) = n - k_i$.

分析：设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 是 A的全部互异特征值，

则 $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$.

例1 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}$，求 A^{10}.

解 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -6 & 0\\ 3 & \lambda+5 & 0\\ 3 & 6 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$

$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=1$（二重）.

$(\lambda_1 I-A)=\begin{pmatrix}-6 & -6 & 0\\ 3 & 3 & 0\\ 3 & 6 & -3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$x_1=-x_3$，$x_2=x_3$，$\alpha_1=(-1,1,1)^T$

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -2x_2 + 0x_3$$

$$\alpha_2 = (-2, 1, 0)^T, \quad \alpha_3 = (0, 0, 1)^T.$$

令 $P = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \Lambda$

矩阵的相似

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

$$A^{10} = P\Lambda^{10}P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1022 & -2046 & 0 \\ 1023 & 2047 & 0 \\ 1023 & 2046 & 1 \end{pmatrix}$$

例2 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a \end{pmatrix} \quad (a\neq 0)$$

求 A 的特征值与特征向量，

并判断A能否与对角矩阵相似．

解 $$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -a & \cdots & -a \\ -a & \lambda-a & \cdots & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & \lambda-a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-na & \lambda-na & \cdots & \lambda-na \\ -a & \lambda-a & \cdots & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & \lambda-a \end{vmatrix} =(\lambda-na)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a & \lambda-a & \cdots & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & \lambda-a \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-na)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-na)\lambda^{n-1},$$

$$\lambda_1=na,\quad \lambda_2=0\ (n-1\text{重}).$$

$$(\lambda_1 I-A)X=0\ \text{即}$$

$$\begin{pmatrix}(n-1)a & -a & \cdots & -a\\ -a & (n-1)a & \cdots & -a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a & -a & \cdots & (n-1)a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\alpha_1=(1,\ 1,\ \cdots,1)^T$$

λ_1 对应的特征向量为：$k_1\alpha_1\ (k_1\neq 0)$.

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} -a & -a & \cdots & -a \\ -a & -a & \cdots & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & -a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

$$\alpha_2 = (1,\ -1,\ 0,\ \cdots,0,\ 0)^T,$$

$$\alpha_3 = (0,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ 0,\ 0)^T,$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\alpha_n = (0,\ 0,\ 0,\ \cdots,1,\ -1)^T.$$

A 有 n 个线性无关的特征向量,能与对角矩阵相似.

例3　下列矩阵能否与对角矩阵相似．

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\2&0&-2\\2&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{pmatrix}$$

解　$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&2\\2&2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3)$$

$A\sim diag\,(1，-1，3)$

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 2 \\ -2 & \lambda & 2 \\ -2 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)^2$$

$$\lambda_1 = 0,\quad \lambda_2 = 1\,(\text{二重}).$$

$$\lambda_2 I - B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 + x_3,\quad \alpha_2 = (1,2,0)^T,\ \alpha_3 = (1,0,1)^T.$$

$$B \sim diag(0,\ 1,\ 1)$$

又 $R(\lambda_2 I - B) = 1$,

$\therefore$ B与对角矩阵相似.

$$|\lambda I - C| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 0 \\ -4 & 8 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2)$$

$\lambda_1 = 1$,(二重) $\lambda_2 = -2$,

$R(\lambda_1 - C) = 2$,

$\therefore$ C不能与对角矩阵相似.

例4 设

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}\sim\Lambda \text{ 为对角阵 .}$$

求x与y应满足的条件 .

解：$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-x&\lambda-1&-y\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$$\lambda_1=1\text{（二重）},\lambda_2=-1.$$

$A\sim$对角阵$\Leftrightarrow\lambda_1$有两个线性无关的特征向量

$$\Leftrightarrow R(\lambda_1E-A)=1$$

$$\lambda_1 E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -x-y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(\lambda_1 E - A) = 1 \Leftrightarrow -x - y = 0$$

即 $x + y = 0$.

例5 设 $A\sim B$，$C\sim D$，证明：

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

证：$\because\ A\sim B, C\sim D$

$\therefore\ \exists$ 可逆矩阵P, Q，使

$$P^{-1}AP=B,\ Q^{-1}CQ=D$$

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

例6 设 A 是 3 阶矩阵且 $I+A, 3I-A, I-3A$ 均不可逆．证明：

(1) A可逆， (2) A与对角矩阵相似．

证 (1) $\because$ $I+A$不可逆，$\therefore$ $|I+A|=0$，

$\therefore$ $(-1)^3|-I-A|=0 \Rightarrow |-I-A|=0$，

$\therefore$ $\lambda_1=-1$ 是A特征值．

$\lambda_2=3$是A的特征值．

$|I-3A|=3^3\left|\frac{1}{3}I-A\right|=0 \Rightarrow \left|\frac{1}{3}I-A\right|=0$，

$\therefore$ $\lambda_3=\frac{1}{3}$是A的特征值． A的特征值均不为零，故A可逆．

(2) $\because$ $\boldsymbol{A}$的特征值都是单特征值，

$$\therefore \quad \boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 3 & \\ & & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

学到了什么?

相似矩阵的基本概念

矩阵的相似对角化