



5.1 基本概念与计算

主要内容：特征值与特征向量的定义

特征值与特征向量的性质

特征值与特征向量的计算

思考题



一. 特征值与特征向量的定义

例 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\alpha, \quad A\beta = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4\beta,$$

$$A\gamma = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \neq k\gamma.$$



定义 设 $A \in P^{n \times n}$, $\alpha \in P^n$, $\lambda \in P$. 若 $A\alpha = \lambda\alpha$ ($\alpha \neq 0$), 则称 λ 为 A 的一个特征值, α 为 A 对应于 λ 的一个特征向量.

二. 特征值与特征向量的性质

1. 设 $A\alpha = \lambda\alpha$ ($\alpha \neq 0$), 则

$$A(k\alpha) = k(A\alpha) = k(\lambda\alpha) = \lambda(k\alpha).$$

2. 设 $A\alpha_i = \lambda\alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$), 则

$$\begin{aligned} & A(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s) \\ &= \lambda(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s). \end{aligned}$$

特征子空间

$$\text{设 } V_\lambda = \{ \alpha \mid A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \in R^n \}$$

则由特征值与特征向量的性质可知：

$$\forall \alpha, \beta \in V_\lambda, \alpha + \beta \in V_\lambda$$

$$\forall \alpha \in V_\lambda, k \in R, k\alpha \in V_\lambda.$$

故 V_λ 是 n 维向量空间 R^n 的子空间。

V_λ 称为矩阵 A 的特征子空间。

思考： V_λ 的所有向量都是 A 的特征向量吗？





三. 特征值与特征向量的计算

设 $A\alpha = \lambda\alpha$ ($\alpha \neq 0$), 则 $(\lambda I - A)\alpha = 0$.

α 是 $(\lambda I - A)X = 0$ 的非零解.

求 A 的特征值与特征向量的步骤:

(1) 求 $|\lambda I - A| = 0$ 的根: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$;

(2) 求 $(\lambda_i I - A)X = 0$ 的基础解系:

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_{r_i}},$$

则 A 对应于 λ_i 的特征向量为:

$$k_1\alpha_{i_1} + k_2\alpha_{i_2} + \dots + k_{r_i}\alpha_{i_{r_i}} \\ (k_1, k_2, \dots, k_{r_i} \text{ 不全为零}).$$



特征多项式

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|.$$

$f(\lambda)$ 称为矩阵 A 的特征多项式.

设 $f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2(\lambda + \sqrt{5})^3$,

$\lambda = 1$: A 的单特征根,

$\lambda = -2$: A 的二重特征根,

$\lambda = -\sqrt{5}$: A 的三重特征根.



特征值与特征向量的计算

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= |\lambda I - A| \\ &= \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|. \end{aligned}$$

设 A 的特征值是: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \\ &= \lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|.$$

A 可逆的充要条件是 $\lambda_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \cdots, n$).



例1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, 求 A 的特征值与特征向量.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda + 2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda + 2 & -4 \\ 0 & \lambda - 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 4 & -2 \\ 2 & \lambda + 6 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 4 \\ 2 & \lambda + 6 \end{vmatrix}$$

$$= \dots = (\lambda - 2)^2 (\lambda + 7)$$

$$\lambda_1 = 2 \text{ (二重)}, \quad \lambda_2 = -7.$$



求 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量, $(\lambda_1 I - A)X = 0$ 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -x_2 + x_3$$

基础解系为: $\alpha_1 = (-2 \ 1 \ 0)$, $\alpha_2 = (2 \ 0 \ 1)$.

特征向量为: $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$ (k_1, k_2 不全为零).



求 $\lambda_2 = 7$ 的特征向量.

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases},$$

$$\alpha_3 = (1, 2, -2),$$

特征向量为 $k_3 \alpha_3$ ($k_3 \neq 0$).

例2 求矩阵 A 的特征值与特征向量

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{解 } |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1(\text{二重}).$$



求 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量,

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

$$\alpha_1 = (0, 0, 1)^T,$$

特征向量为 $k_1 \alpha_1$ ($k_1 \neq 0$).



求 $\lambda_2 = 1$ 的特征向量：

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

$$\alpha_2 = (1, 2, -1)^T,$$

特征向量为 $k_2 \alpha_2$ ($k_2 \neq 0$).



特征值的重数与其对应的线性无关特征向量个数的关系

设 λ_0 是矩阵 A 的 k 重特征值，则 λ_0 所对应的线性无关特征向量的个数不超过 k 。

即，齐次方程组 $(\lambda_0 I - A)X = 0$ 的基础解系所含解向量个数不超过 k 。



例3 设

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a \end{pmatrix}$$

求 A 的特征值与特征向量

解: $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -a & \cdots & -a \\ -a & \lambda - a & \cdots & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & \lambda - a \end{vmatrix}$



特征值与特征向量

$$= \begin{vmatrix} \lambda - na & \lambda - na & \cdots & \lambda - na \\ -a & \lambda - a & \cdots & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - na) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a & \lambda - a & \cdots & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & \lambda - a \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - na) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^{n-1} (\lambda - na)$$



$$\lambda_1 = 0 \text{ (} n-1 \text{重)}, \quad \lambda_2 = na .$$

$$\lambda_1 E - A = \begin{pmatrix} -a & -a & \cdots & -a \\ -a & -a & \cdots & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & -a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

$$\alpha_1 = (1, -1, 0, \cdots, 0)^T,$$

$$\alpha_2 = (1, 0, -1, \cdots, 0)^T,$$

$$\alpha_{n-1} = (1, 0, 0, \cdots, -1)^T.$$

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_{n-1} \alpha_{n-1} \text{ (} k_i \text{不全为零)}$$



$$(\lambda_2 E - A)X = \begin{pmatrix} (n-1)a & -a & \cdots & -a \\ -a & (n-1)a & \cdots & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & (n-1)a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha_n = (1, 1, \cdots, 1)^T. \quad k_n \alpha_n \quad (k_n \neq 0).$$



例4 设 $A^2 = A$, 证明: A 的特征值为 0 或 1 .

证: 设 $A\alpha = \lambda\alpha$ ($\alpha \neq \mathbf{0}$)

则 $A^2\alpha = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda(A\alpha) = \lambda^2\alpha$

$\therefore \lambda^2\alpha = \lambda\alpha, (\lambda^2 - \lambda)\alpha = \mathbf{0}$

$\therefore \lambda = \mathbf{0}$ 或 $\lambda = \mathbf{1}$.



例5 设矩阵 A 可逆且 $A\alpha = \lambda\alpha$ ($\alpha \neq 0$),
求 A^{-1} 与 A^* 的特征值与特征向量 .

解 $A^{-1}(A\alpha) = A^{-1}(\lambda\alpha) = \lambda(A^{-1}\alpha) = (A^{-1}A)\alpha = \alpha$

若 $\lambda = 0$, 则 $A\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, 矛盾.

$$\therefore \lambda \neq 0, A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda}\alpha.$$

$$\text{又 } AA^* = |A|I \quad A^* = |A|A^{-1},$$

$$\therefore A^*\alpha = |A|A^{-1}\alpha = \frac{|A|}{\lambda}\alpha.$$

例6 设 α 是矩阵 A 的特征向量, $f(x)$ 是 x 的多项式, 证明: α 是 $f(A)$ 的特征向量.

分析: $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

$$f(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad (\alpha \neq 0)$$

$$f(A)\alpha = ? \alpha$$

$$f(A)\alpha = a_n A^n \alpha + \cdots + a_1 A\alpha + a_0 \alpha$$

$$A^n \alpha = ?$$



证： 设 $A\alpha = \lambda\alpha$ ($\alpha \neq 0$)

$$\text{则 } A^2\alpha = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda(A\alpha) = \lambda^2\alpha$$

$$\therefore A^n\alpha = \lambda^n\alpha,$$

$$f(A)\alpha = a_n A^n\alpha + \cdots + a_1 A\alpha + a_0\alpha$$

$$= a_n \lambda^n\alpha + \cdots + a_1 \lambda\alpha + a_0\alpha$$

$$= (a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0)\alpha$$

$$= f(\lambda)\alpha$$

思考： 设 $\lambda_0 = 2$ 是矩阵 A 的一个特征值， 确定 $A^3 - 3A^2 + 2I - 4A^{-1}$ 的一个特征值。



例7 设 A 是奇数阶实矩阵, 且 $A^T A = I$, $|A| = -1$,

证明: $\lambda = -1$ 是 A 的特征值.

分析: $A\alpha = -\alpha$? $|-I - A| = 0$?

证: $|-I - A| = |-A^T A - A|$

$$= |-A^T - I| |A|$$

$$= -|-I - A|$$

$$\therefore |-I - A| = 0.$$

思考题： 1. 是否任一数 λ_0 都是某个矩阵 A 的特征值？

是。比如，

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & \mathbf{0} & \\ & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

2. 是否任一列向量 α 都是某个矩阵 A 的特征向量？

若 $\alpha \neq \mathbf{0}$ ，则是。比如， $I\alpha = 1\alpha$ 。



3. 怎样判断数 λ_0 是否矩阵 A 的特征值？

(1) 是否存在非零向量 α 使 $A\alpha = \lambda_0\alpha$.

(2) $|\lambda_0 I - A| = 0$?

例 设

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{求 } A^{-1} \text{ 与 } I + A^{-1} \text{ 的特征值.}$$

$$\text{解 } |\lambda I - A| = \cdots = (\lambda + 5)(\lambda - 1)^2,$$

$$\lambda_1 = -5, \quad \lambda_2 = 1 \text{ (二重).}$$



A^{-1} 的特征值为： $\mu_1 = -\frac{1}{5}$ ， $\mu_2 = 1$ (二重)

设 $A^{-1}\alpha = \mu_1\alpha = -\frac{1}{5}\alpha$ ，则

$$(I + A^{-1})\alpha = \alpha + \mu_1\alpha = (1 + \mu_1)\alpha = \frac{4}{5}\alpha.$$

$\therefore I + A^{-1}$ 的一个特征值是： $\frac{4}{5}$.

$$\text{又 } \left| -\frac{1}{5}I - A^{-1} \right| = 0, \quad \therefore \left| \frac{4}{5}I - (I + A^{-1}) \right| = 0,$$

$\frac{4}{5}$ 是 $I + A^{-1}$ 的一个特征值.

同样可得 $I + A^{-1}$ 的另一个特征值： 2 (二重).



特征值与特征向量的定义

特征值与特征向量的性质

特征值与特征向量的计算