



4.4 线性方程组解的结构

主要内容：齐次线性方程组

非齐次线性方程组



一. 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad \text{即 } AX = 0$$

平凡解: $X = 0$ (零解)

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则下列命题等价:

- 1° $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关;
- 2° $AX = 0$ 有非零解;
- 3° $R(A) < n$.

- 解的性质：

$AX = \mathbf{0}$ 的解向量的线性组合仍为 $AX = \mathbf{0}$ 的解.

证 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为 $AX = \mathbf{0}$ 的解向量，则

$$\begin{aligned} & A(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s) \\ &= A(k_1\alpha_1) + A(k_2\alpha_2) + \dots + A(k_s\alpha_s) \\ &= k_1 A\alpha_1 + k_2 A\alpha_2 + \dots + k_s A\alpha_s \\ &= k_1 \mathbf{0} + k_2 \mathbf{0} + \dots + k_s \mathbf{0} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

所以， $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$ 仍为 $AX = \mathbf{0}$ 的解.



$W = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$ 为 \mathbb{R}^n 的子空间

$AX = 0$ 的**基础解系**： W 的一组基.

1° 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关;

2° $AX = 0$ 的任一解向量均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出

3° **定理1** 设 $R(A) = r < n$, 则 $AX = 0$ 有基解系且所含向量个数为 $n - r$, 即 $\dim W = n - r$, 这里 n 为方程组未知数个数.



证 $R(A) = r$, 不妨设 A 的前 r 个列向量线性无关, 则

$$A \xrightarrow{\text{行初等变换}} B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-1} \\ & & & O & & \end{pmatrix}$$

得 $AX = 0$ 的同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n \\ \cdots \cdots \cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n \end{cases}$$

分别取

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

则依次得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix},$$


便得 $AX = 0$ 的 $n - r$ 个解:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

可证明： $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 即为基础解系：

(1) 证明 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 线性无关}$$

→ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关 

(2) 可以证明 $AX = 0$ 的任一解都可由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性表出。
(略, 思考)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ 为 $AX=0$ 的一个基解系, 则
 $\forall AX=0$ 的解 α ,

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{n-r}\alpha_{n-r}, k_1, k_2, \dots, k_{n-r} \in \mathbf{R}.$$

$AX=0$ 的通解

$AX=0$ 的基解系一般不惟一, 但其任一基解系中所含向量个数必为
 n (未知数个数) - $R(A)$.

若 $AX=0$ 有非零解, 则必有无穷多个解.



例1 求方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(A) = 2 < n = 4, \quad n - R(A) = 2,$$

为求通解，可进一步化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得同解方程组
$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_3 = -\frac{3}{10}x_4 \end{cases} \quad (x_2, x_4 \text{ 为自由未知量})$$

基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{10} \\ 1 \end{pmatrix}$$

方程组通解为

$$X = k_1\xi_1 + k_2\xi_2, \quad k_1, k_2 \in R.$$

例2 解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 3 = n,$$

只有零解 $X = 0$

例3 解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

(x_3 为自由未知量)

基础解系为

$$\xi = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

方程组通解为

$$X = k\xi, k \in R.$$



例4 证明：与 $AX = 0$ 基础解系等价的线性无关的向量组也是该方程组的基础解系。

证： 两个等价的线性无关的向量组所含向量个数相等。

设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 是 $AX = 0$ 基础解系， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与之等价。

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 线性表出，所以是 $AX = 0$ 的解；

$AX = 0$ 的任一解 X 可由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 线性表出，

又 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出，所以 X 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出；

故， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 $AX = 0$ 的基础解系。



例5 设 n 阶矩阵 A, B 满足 $AB = 0$, 证明:

$$R(A) + R(B) \leq n.$$

证 设 $B = (b_1, \dots, b_n)$, 则

$$AB = A(b_1, \dots, b_n) = (A b_1, \dots, A b_n) = 0,$$

$$A b_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

$b_i (i = 1, \dots, n)$ 为 $AX = 0$ 的解, 所以可由基础解系 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r} (r = R(A))$ 线性表出.

所以, 秩(B) = 秩(b_1, \dots, b_n) \leq 秩(ξ_2, \dots, ξ_{n-r}) = $n - r(A)$.

即 $R(A) + R(B) \leq n$.



二. 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

即 $AX = b$

($AX = 0$ 称为 $AX = b$ 的导出组)

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 即

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b,$$

$AX = b$ 有解

$\Leftrightarrow b$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出

$\Leftrightarrow R(\bar{A}) = R(A)$

解的性质:

性质1 设 η_1, η_2 为 $AX = b$ 的解, 则 $\eta_1 - \eta_2$ 为其导出组的解.

证
$$A(\eta_1 - \eta_2) = A\eta_1 - A\eta_2 = b - b = \mathbf{0}$$

所以, $\eta_1 - \eta_2$ 为 $AX = \mathbf{0}$ 的解.

性质2 设 η 为 $AX = b$ 的解, ξ 为 $AX = \mathbf{0}$ 的解, 则 $\eta + \xi$ 为 $AX = b$ 的解.

证
$$A(\eta + \xi) = A\eta + A\xi = b + \mathbf{0} = b$$

所以, $\eta + \xi$ 为 $AX = b$ 的解.

$AX = b$ 的**特解**: $AX = b$ 的任一解.

性质3 设 η_0 为 $AX = b$ 的一个特解, 则 $AX = b$ 的任一解 η 可表为
$$\eta = \eta_0 + \xi, \quad (\xi \text{ 为 } AX = 0 \text{ 的一个解})$$

对于 $AX = b$ 的任一个特解 η_0 , 当 ξ 取遍它的导出组的全部解时, $\eta = \eta_0 + \xi$ 就给出 $AX = b$ 的全部解.

性质3的证明

$$\eta = \eta_0 + \underline{(\eta - \eta_0)}$$

为 $AX = 0$ 的解, 设为 ξ

为了求 $AX = b$ 的通解（全部解），只需求其一个特解 η_0 ，以及导出组的全部解即可：

设 η_0 为 $AX = b$ 的一个特解， $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 为其导出组的基础解系，则 $AX = b$ 的通解为

$$X = \eta_0 + k_1 \xi_1 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r}, \quad k_1, \dots, k_{n-r} \in \mathbb{R}$$



非齐次线性方程组

例6 解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

解

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$R(A) = R(\bar{A}) = 2 < n = 3,$$

有无穷多解

得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = 3 + x_3 \\ x_2 = 2 - 2x_3 \end{cases}$$

(1) 求非齐次的特解: 取 $x_3=0$, 得 $\eta_0 = (3, 2, 0)^T$

(2) 求导出组的基础解系: 取 $x_3=1$, 得 $\xi = (1, -2, 1)^T$

$AX = b$ 的通解为: $X = \eta_0 + k \xi, k \in \mathbb{R}$



非齐次线性方程组

例7 解
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

解

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

$$R(A) = 2 \neq R(\bar{A}) = 3, \quad \text{无解}$$



非齐次线性方程组

例8 解
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$
 解
$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda(1 - \lambda) \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 & 1 - \lambda^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda(1 - \lambda) \\ 0 & 0 & 2 - \lambda - \lambda^2 & 1 - \lambda^2 + \lambda - \lambda^3 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & \lambda(1 - \lambda) \\ 0 & 0 & (1 - \lambda)(\lambda + 2) & (1 + \lambda)^2(1 - \lambda) \end{pmatrix}$$



非齐次线性方程组

(1) $\lambda = 1$ 时, $R(A) = R(\bar{A}) = 1 < n = 3$, 有无穷多解

$$\bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{得同解方程组} \quad x_1 = 1 - x_2 - x_3$$

导出组基础解系: $\xi_1 = (-1, 1, 0)^T$, $\xi_2 = (-1, 0, 1)^T$

非齐次特解: $\eta_0 = (1, 0, 0)^T$

原方程组通解: $X = \eta_0 + k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2, k_1, k_2 \in \mathbf{R}$

(2) $\lambda = -2$ 时, $R(A) = 2 \neq R(\bar{A}) = 3$, 无解

(3) $\lambda \neq 1, -2$ 时, $R(A) = R(\bar{A}) = 3 = n$, 有惟一解:


$$\begin{cases} x_1 = \frac{-\lambda-1}{\lambda+2} \\ x_2 = \frac{1}{\lambda+2} \\ x_3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{cases}$$

例9 判断方程组有无解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ ax_1 + bx_2 = c \quad (a, b, c \text{互不等}) \\ a^2x_1 + b^2x_2 = c^2 \end{cases}$$

解

$$\det \bar{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \neq 0$$

$$\begin{aligned} R(\bar{A}) &= 3, \\ R(A) &= 2, \end{aligned}$$


所以，方程组无解

\bar{A} 的行向量组是 B 的行向量组的部分组，
所以 \bar{A} 的行向量组可由 B 的行向量组线性表出
 \bar{A} 的行向量组的秩 $\leq B$ 的行向量组的秩

$$R(\bar{A}) \leq R(B) = R(A),$$

又

已知

$$R(\bar{A}) \leq R(\bar{A}),$$

故

$$R(\bar{A}) = R(\bar{A}),$$

方程组有解



思考题 1. 证明 $R(A^T A) = R(A)$.

证 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, x 为 n 维列向量.

若 x 满足 $Ax = 0$, 则有 $A^T(Ax) = 0$, 即
 $(A^T A)x = 0$;

若 x 满足 $(A^T A)x = 0$, 则 $x^T(A^T A)x = 0$, 即
 $(Ax)^T(Ax) = 0$, 从而推知 $Ax = 0$.

综上所述可知方程组 $Ax = 0$ 与 $(A^T A)x = 0$ 同解,

$$\therefore n - R(A) = n - R(A^T A)$$

因此 $R(A^T A) = R(A)$.

2. 已知四元齐次方程组 (I) : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$ 及另一

四元齐次方程组 (II) 的通解为

$$k_1(0, 1, 1, 0)^T + k_2(-1, 2, 2, 1)^T \quad (k_1, k_2 \in R).$$

问 (I) 与 (II) 是否有非零公共解? 若有, 求出来; 若没有, 说明理由.



解 将(II)的通解代入(I)得

$$\begin{cases} -k_2 + k_1 + 2k_2 = 0 \\ k_1 + 2k_2 - k_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = -k_2.$$

故(II)与(I)的公共解为

$$k_1(0,1,1,0)^T + k_2(-1,2,2,1)^T = k_2(-1,1,1,1)^T$$

所有非零公共解为

$$k(-1,1,1,1)^T \quad (k \neq 0).$$



3. 设 A 是 $m \times 3$ 矩阵,且 $R(A) = 1$.如果非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个解向量 η_1, η_2, η_3 满足

$$\eta_1 + \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 + \eta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 + \eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

求 $Ax = b$ 的通解.



解

$\because A$ 是 $m \times 3$ 矩阵, $R(A)=1$,

$\therefore Ax=0$ 的基础解系中含有 $3-1=2$ 个线性无关的解向量.

方法1

令 $\eta_1 + \eta_2 = a, \eta_2 + \eta_3 = b, \eta_3 + \eta_1 = c$,则

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(a + c - b) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \frac{1}{2}(a + b - c) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix},$$

$$\eta_3 = \frac{1}{2}(b + c - a) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix},$$

$$\eta_1 - \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \eta_1 - \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

为 $Ax = 0$ 的基础解系中的解向量.

故 $Ax = b$ 的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

其中 k_1, k_2 为任意实数.

方法2 (更简单) :

$$(\eta_1 + \eta_2) - (\eta_2 + \eta_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (\eta_1 + \eta_2) - (\eta_3 + \eta_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

线性无关, 所以为 $AX = 0$ 的基础解系.

$$A\left(\frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_3)\right) = \frac{1}{2}(b + b) = b,$$

$$\therefore \frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

为 $AX = b$ 的解.

故 $Ax = b$ 的通解为

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$



齐次线性方程组

非齐次线性方程组