



4.3 向量组的秩与最大无关组

主要内容:

向量组的秩与最大无关组的概念

R^n 的基、维数与坐标



向量组的秩与最大无关组的概念

一. 向量组的秩与最大无关组的概念

例1 $\alpha_1 = (1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (1, -1, 1)$, $\alpha_3 = (2, 0, 2)$ 。

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关。

α_1, α_2 线性无关; α_2, α_3 线性无关,

最大无关组

定义 设向量组T满足

1° 在T中有 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关;

2° T中任意 $r + 1$ 个向量都线性相关;

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量组T的一个**最大无关组**, 数 r 为向量组T的**秩**。

最大无关组一般不惟一, 秩是惟一的。



向量组的秩与最大无关组的概念

若向量组线性无关，则其最大无关组就是它本身，秩 = 向量个数.

向量组线性无关(相关) \Leftrightarrow
向量组的秩 = ($<$) 向量组所含向量个数.

例2 \mathbf{R}^n 的秩为 n , 且任意 n 个线性无关的 n 维向量均为 \mathbf{R}^n 的一个最大无关组.

矩阵 A 的**列秩**: A 的列向量组的秩;

矩阵 A 的**行秩**: A 的行向量组的秩.



向量组的秩与最大无关组的概念

定理1 若 $A_{m \times n} \xrightarrow{\text{行初等变换}} B$, 则 A 的任意 k 个 ($1 \leq k \leq n$) 个列向量与 B 的对应 k 个列向量有相同的线性相关性.

证

$$A_k \xrightarrow{\text{行初等变换}} B_k,$$

任取 A 的 k 个列向量所得

$A_k X=0$ 与 $B_k X=0$ 同时有非零解或只有零解.

A_k 的列向量与 B_k 的列向量有相同的线性相关性.



向量组的秩与最大无关组的概念

定理2 矩阵的 行秩 = 列秩 = 矩阵的秩.

证 设 $R(A) = r$,

$$A \xrightarrow{\text{行初等变换}} B(\text{行阶梯形矩阵}),$$

B 有 r 个非零行, B 的 r 个非零行的非零首元素所在的 r 个列向量线性无关, 为 B 的列向量组的最大无关组. 

A 中与 B 的这 r 个列向量相对应的 r 个列向量也是 A 的列向量组的最大无关组.

故 A 的列秩等于 r . 

同理, 由 $R(A) = R(A^T)$, 并且 A 的行向量即为 A^T 的列向量, 可得 A 的行秩等于 r .



向量组的秩与最大无关组的概念

定理2的证明—求向量组的秩和最大无关组的方法.

例3 求向量组 $\alpha_1=(1,2,0,3)$, $\alpha_2=(2,-1,3,1)$, $\alpha_3=(4,-7,9,-3)$ 的秩和一个最大无关组, 并判断线性相关性.

解

$$A=(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -15 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

所以,秩 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 < 3$,

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

α_1, α_2 为一个最大无关组.

例4 求向量组

$$\alpha_1=(1,2,0,3), \alpha_2=(2,-1,3,1), \alpha_3=(4,-7,9,-3)$$

的一个最大无关组，并将其余向量用最大无关组线性表出。

解 $A=(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B,$

$$B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ 所以, } \alpha_3 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2.$$



向量组的秩与最大无关组的概念

例5 求向量组

$$\alpha_1=(2,4,2), \alpha_2=(1,1,0), \alpha_3=(2,3,1), \alpha_4=(3,5,2)$$

的秩和一个最大无关组，并将其余向量用最大无关组线性表出。

解

$$A=(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B, \quad \text{所以, 秩}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)=2$$

$$B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{故, } \alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2.$$



向量组的秩与最大无关组的概念

- 向量组与其任一最大无关组等价；
- 一向量组的任两个最大无关组等价；
- 一向量组的任两个最大无关组所含向量个数相等，其个数都等于向量组的秩.



向量组的秩与最大无关组的概念

定理3 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 则 $r \leq s$.

证 为便于书写, 不妨设向量均为列向量, 设

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r), \quad B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s),$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出, 所以存在

$$K = (k_{ij})_{s \times r} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r), \quad \text{使得 } A = BK.$$

若 $r > s$, 则 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ 线性相关, 则有不全为零的数 x_1, x_2, \dots, x_r 使

$$\begin{pmatrix} \gamma_1, \dots, \gamma_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = KX = 0, \quad \begin{matrix} x_1 \gamma_1 + x_2 \gamma_2 + \dots + x_r \gamma_r = 0 \\ \text{所以 } AX = BKX = B0 = 0. \end{matrix}$$

$AX=0$ 有非零解, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性相关, 矛盾!



两向量组秩的关系:

若向量组(I)可由组(II)线性表出, 则
组(I)的秩 $r_1 \leq$ 组(II)的秩 r_2 .

证 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_1}$ 为(I)的最大无关组为(II)的最大无关组.

组(I)可由组(II)线性表出, 所以 $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_1}$ 可由 $\beta_1, \dots, \beta_{r_2}$
线性表出, 又 $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_1}$ 线性无关, 故 $r_1 \leq r_2$.

若组(I)与组(II)等价, 则
组(I)的秩 $r_1 =$ 组(II)的秩 r_2 .



向量组的秩与最大无关组的概念

定理4 设 $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性无关部分组，它是最大无关组的充要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中每一个向量均可由 $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}$ 线性表出。

证： **充分性：** 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由 $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}$ 线性表出，则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任 $r + 1$ 个向量线性相关(定理3逆否)，所以， $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}$ 是最大无关组。

必要性： 若 $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的最大无关组，

$\forall \alpha_j \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}:$ $\begin{cases} \alpha_j \in \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}\} & \text{结论显然} \\ \alpha_j \notin \{\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}\} & \alpha_j, \alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r} \text{线性相关} \end{cases}$

因而 α_j 可由 $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}$ 线性表出。



向量组的秩与最大无关组的概念

例6 设 A, B 分别为 $m \times r, r \times n$ 矩阵, 证明

$$\mathbf{R}(AB) \leq \min\{\mathbf{R}(A), \mathbf{R}(B)\}.$$

证 设 $C_{m \times n} = AB$, $(c_1, \dots, c_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix}$

$$c_k = b_{1k}\alpha_1 + b_{2k}\alpha_2 + \dots + b_{rk}\alpha_r, \quad (k = 1, \dots, n)$$

(AB) 的列向量组可由 A 的列向量组线性表出,

故 $\mathbf{R}(AB) \leq \mathbf{R}(A)$.

又, $\mathbf{R}(C) = \mathbf{R}(C^T) = \mathbf{R}(B^T A^T) \leq \mathbf{R}(B^T) = \mathbf{R}(B)$.

所以 $\mathbf{R}(AB) \leq \min\{\mathbf{R}(A), \mathbf{R}(B)\}$.



二. R^n 的基、维数与坐标

R^n : n 维向量空间

R^n 的一组基: R^n 的一个最大无关组

R^n 的维数($\dim R^n$): R^n 的秩, $\dim R^n = n$.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 R^n 的一组基, 则

$$R^n = L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

又, $R^n = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$

R^n 的标准基

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为一组基,

$$\alpha = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n$$

α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标

一个向量在确定基下的坐标是惟一的(坐标的惟一性).

例7 (1) 设 $\alpha = (x_1, x_2, x_3) \neq 0$,

$L(\alpha) : \mathbb{R}^3$ 的一维子空间;

(2) 设 $\alpha = (x_1, x_2, x_3), \beta = (y_1, y_2, y_3)$ 线性无关,

$L(\alpha, \beta) : \mathbb{R}^3$ 的二维子空间.



向量组的秩与最大无关组的概念

R^n 的基、维数与坐标