4.1 n 维向量空间

主要内容：

- n 维向量空间的概念
- R^n 的子空间

- 一. n 维向量空间的概念

  - 几何空间中:

$$\vec{a} := \overrightarrow{OP} = (a_1, a_2, a_3)$$

点P的坐标

  - 向量的线性运算:

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$
$$k \cdot \alpha = (ka_1, ka_2, ka_3).$$

●所有三维向量组成的集合，按上述线性运算，满足:

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) $\alpha+0=\alpha$;

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$;

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

称这个集合构成一个三维向量空间，记为R^3.

● n 维向量空间 (R^n)：

· n 维向量：

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

有序数组

n 维行向量

α的分量

n 维列向量：$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

· 实（复）向量：分量为实（复）数

n维向量的实际意义

确定飞机的状态，需要以下6个参数：

- 机身的仰角 φ $\left(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$
- 机翼的转角 ψ $(-\pi < \varphi \le \pi)$
- 机身的水平转角 θ $(0 \le \varphi < 2\pi)$
- 飞机重心在空间的位置参数$P(x, y, z)$

所以，确定飞机的状态，需用**6维向量:** $a = (x, y, z, \varphi, \psi, \theta)$

n 维向量空间的概念

- 向量相等： $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow a_i = b_i$$

- 零向量： $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$
- 负向量： $-\alpha = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$
- R^n ： n 维向量的全体.

- **n 维向量的线性运算:** $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$,

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$
$$k \bullet \alpha = (ka_1, ka_2, \ldots, ka_n), \quad k \in \mathrm{R}.$$

加法与数乘满足：

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) $\alpha+0=\alpha$;

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$;

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

称 R^n 构成 n 维实向量空间.

- **线性方程组与n维向量的线性运算**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

- **即** $$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$
- **即** $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b,$
- **即** $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)X = b,$

$$\boxed{AX = b.}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

二. R^n 的子空间

定义

$\boldsymbol{\varphi} \neq \boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{R^n}$, 且$\forall \boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}, \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{R}$, 有 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{k\alpha} \in \boldsymbol{V}$,

则称$\boldsymbol{V}$是$\boldsymbol{R^n}$的一个子空间.

例1： 设$V = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 = 0\}$, V是否是 R^2 的子空间？

例2： 设$V = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 = 1\}$, V是否是 R^2 的子空间？

例3：过坐标原点的平面为$\mathbf{R}^3$的一个子空间;

过坐标原点的空间直线为R^3的一个子空间.

但是:

- 不经过坐标原点的平面不是R^3的一个子空间;
- 不经过坐标原点的空间直线不是R^3的一个子空间.

因为，不存在零元 (0).

学到了什么？

n 维向量空间的概念

R^n 的子空间