



## 3.4 空间直线

主要内容:

点向式方程

参数式方程

一般式方程

直线与直线的位置关系

直线与平面的位置关系

## 一、点向式方程

方向向量的定义：

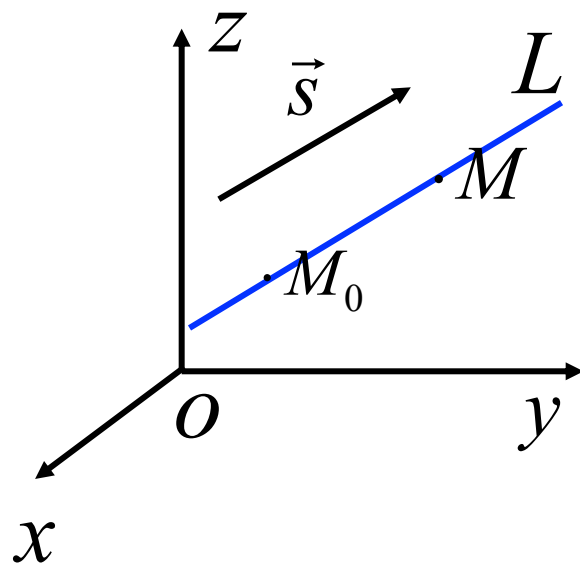
如果一非零向量 $\vec{s}$ 平行于一条已知直线 $L$ ，向量 $\vec{s}$ 称为直线 $L$ 的方向向量。

$$M_0(x_0, y_0, z_0), M(x, y, z),$$

$$\forall M \in L, \vec{M_0M} \parallel \vec{s}$$

$$\vec{s} = (m, n, p),$$

$$\vec{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$



$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

直线的点向式方程

直线的一组方向数

方向向量的方向余弦称为直线的方向余弦.



# 空间直线

**例1** 求过空间两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$ 的直线方程.

**解**  $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$

$$l: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

**例2**  $l: \frac{x + 3}{2} = \frac{y - 2}{0} = z - 1.$

**说明:** (1)  $\vec{s} = (2, 0, 1),$

(2)  $y - 2 = 0$ , 即:  $l$  在平面  $y = 2$  上.

**例3** 一直线过点 $A(2, -3, 4)$ 且和 $y$ 轴垂直相交, 求其方程。

**解** 因为直线和 $y$ 轴垂直相交

所以交点为 $B(0, -3, 0)$

取 $\vec{s} = \vec{BA} = (2, 0, 4)$

所求直线方程:  $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-4}{4}$ .

## 二、参数式方程

设直线  $l$  的方程

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$$

则

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

上式称为直线  $l$  的参数方程， $t$  称为参数，不同的  $t$  对应于直线  $l$  上不同的点。



# 参数式方程

**例 4** 设  $l$  过  $M(3, 4, -4)$ ,  $\vec{s}$  是  $l$  的方向向量,  $\vec{s}$  的方向角为  $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}$ , 求  $l$  的方程。

**解:**  $\vec{e}_s = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

取  $\vec{s} = (1, \sqrt{2}, -1)$

$$l: \begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + \sqrt{2}t \\ z = z_0 - t \end{cases}$$



# 参数式方程

**例5** 求过点 $M(2,1,3)$ 且与直线 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程。

**解** 先作一过点 $M$ 且与已知直线垂直的平面  $\Pi$

$$3(x-2) + 2(y-1) - (z-3) = 0$$

再求已知直线与该平面的交点 $N$ ,

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t \end{cases}$$



# 参数式方程

代入平面方程得  $t = \frac{3}{7}$ , 交点  $N(\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, -\frac{3}{7})$

取所求直线的方向向量为  $\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MN} = (\frac{2}{7} - 2, \frac{13}{7} - 1, -\frac{3}{7} - 3) = (-\frac{12}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{24}{7}),$$

所求直线方程为

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{4}.$$

# 一般式方程

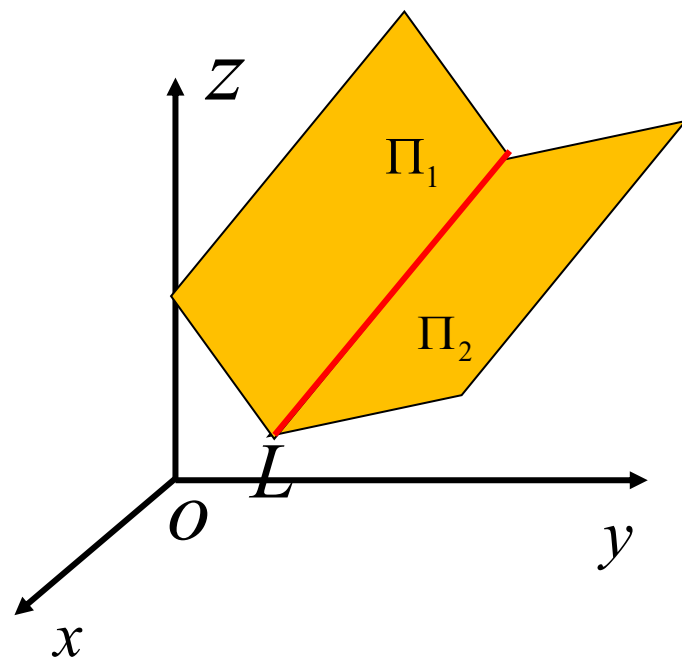
## 三、一般式方程

空间直线可看成两平面的交线.

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$



**空间直线的一般式方程**



# 一般式方程

**例6** 用点向式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

**解一** 在直线上任取一点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\text{取 } x_0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y_0 + z_0 + 2 = 0 \\ y_0 - 3z_0 - 6 = 0 \end{cases}$$

解得  $y_0 = 0, z_0 = -2$

$M_0$ 点的坐标为  $(1, 0, -2)$ ,



# 一般式方程

因所求直线与两平面的法向量都垂直

$$\text{取 } \vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (4, -1, -3),$$

点向式方程

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+2}{-3},$$

参数方程

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$$



# 一般式方程

**解二** 由解法一已得直线上点 $M_0$ 的坐标 $(1,0,-2)$ ,

取 $x_1=0$ , 则

$$\begin{cases} y_1 + z_1 + 1 = 0 \\ -y_1 + 3z_1 + 4 = 0 \end{cases}$$

解得 $y_1 = \frac{1}{4}, z_1 = -\frac{5}{4}$ , 得点 $M_1$ 的坐标 $(0, \frac{1}{4}, -\frac{5}{4})$

$$\vec{M_0M_1} = (-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}),$$

取直线的方向向量为 $\vec{s}=(4,-1,-3)$ ,

得直线方程为

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+2}{-3},$$



# 一般式方程

**解三** 由直线方程 
$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 & (1) \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1)+(2): 3x + 4z + 5 = 0 \implies z = \frac{-3x - 5}{4},$$

$$(1)\times 2 - (2): 3y - z - 2 = 0 \implies z = 3y - 2$$

$$\frac{-3x - 5}{4} = \frac{3y - 2}{1} = \frac{z}{1}, \quad \text{即} \quad \frac{x + \frac{5}{3}}{-4} = \frac{y - \frac{2}{3}}{1} = \frac{z}{3}. \quad (3)$$

方程 (3) 的方向向量  $(-4, 1, 3)$  与  $(4, -1, -3)$  平行, 且点  $(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0)$  在解法一、二所确定的直线上, 故方程 (3) 与解法一、二所得的方程表示的为同一直线.



# 一般式方程

**解四** (用高斯消元法——行初等变换)

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\therefore \begin{cases} x = 1 - 4y \\ z = -2 + 3y \end{cases}$$

参数式:

$$\therefore \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

# 一般式方程

**例7** 确定直线 $l$ 外一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到 $l$ 的距离.

**解:** 设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 是直线 $l$ 上任意一确定的点,

$$\overrightarrow{M_1M} = \vec{s} = (m, n, p),$$

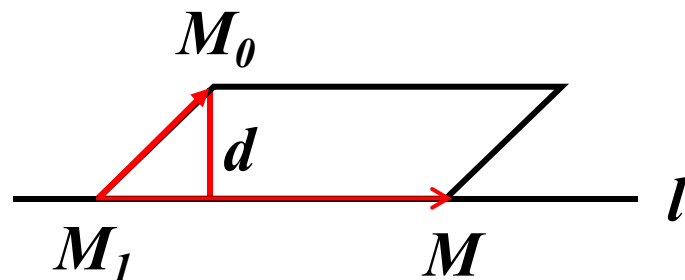
则直线 $l$ 的方程为

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p},$$

如图所示平行四边形面积

$$S = \|\overrightarrow{M_1M_0} \times \overrightarrow{M_1M}\| = \|\vec{s} \times \overrightarrow{M_1M_0}\| = d \|\vec{s}\|$$

$$d = \frac{\|\vec{s} \times \overrightarrow{M_1M_0}\|}{\|\vec{s}\|}.$$





# 一般式方程

**例8** 求点 $M_0(1,2,1)$ 到直线 $l: \begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$ 的距离。

**解** 取 $z=0$ , 得 $x=1, y=1, M_1(1,-1,0) \in l$ .

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k},$$

$$\overrightarrow{M_1M_0} = (0,3,1).$$

$$d = \frac{\|\vec{s} \times \overrightarrow{M_1M_0}\|}{\|\vec{s}\|} = \dots = \sqrt{\frac{35}{6}}.$$



# 直线与直线的位置关系

## 四. 直线与直线的位置关系

两直线 $L_1$ 与 $L_2$ 的方向向量 $\vec{s}_1$ 与 $\vec{s}_2$ 的夹角（通常指锐角）称为 $L_1$ 与 $L_2$ 的夹角，记为 $\langle L_1, L_2 \rangle$ .

$$\text{直线 } L_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$

$$\text{直线 } L_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2},$$

$$\cos \langle L_1, L_2 \rangle = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$



# 直线与直线的位置关系

## 2. 两直线的位置关系:

$$(1) L_1 \perp L_2 \iff m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0,$$

$$(2) L_1 // L_2 \iff \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

**例:** 直线  $L_1 : \vec{s}_1 = (1, -4, 0)$ ,

直线  $L_2 : \vec{s}_2 = (0, 0, 1)$ ,

$\because \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0, \quad \therefore \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2, \quad \text{即 } L_1 \perp L_2.$



# 直线与直线的位置关系

**例9** 求过点 $(-3, 2, 5)$ 且与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行的直线方程。

**解** 设所求直线的方向向量为 $\vec{s} = (m, n, p)$ ,

根据题意知： $\vec{s} \perp \vec{n}_1, \vec{s} \perp \vec{n}_2$ ,

取： $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-4, -3, -1)$ ,

所求直线的方程为：

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{1}.$$



# 直线与直线的位置关系

**例10** 判断直线  $\begin{cases} l_1 : x = y = z - 4 \\ l_2 : -x = y = z \end{cases}$  的位置关系?

**解** (1)  $\vec{s}_1 = (1, 1, 1), \vec{s}_2 = (-1, 1, 1)$

$\vec{s}_1$  不平行  $\vec{s}_2$ ,  $l_1$  不平行  $l_2$

(2)  $M_1(0, 0, 4) \in l_1, M_2(0, 0, 0) \in l_2,$

$$\left[ \begin{array}{c} \vec{M_1N_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2 \\ M_1N_2, \vec{s}_1, \vec{s}_2 \end{array} \right] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

$\therefore l_1$  与  $l_2$  异面

# 直线与平面的位置关系

## 五、直线与平面的位置关系

### 1、直线与平面的夹角

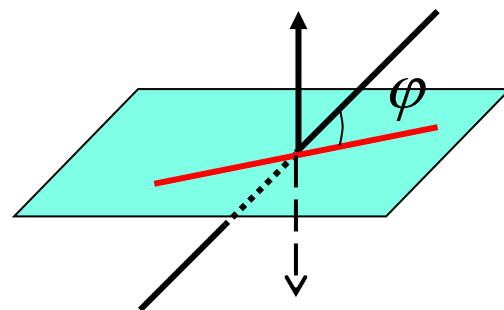
直线和它在平面上的投影直线的夹角  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ) 称为**直线与平面的夹角**.

$$L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$\vec{s} = (m, n, p), \vec{n} = (A, B, C),$$

$$\langle \vec{s}, \vec{n} \rangle = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad \langle \vec{s}, \vec{n} \rangle = \frac{\pi}{2} + \varphi$$





# 直线与平面的位置关系

$$\sin \varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right|.$$

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

直线与平面的夹角公式

## 2. 直线与平面的位置关系:

$$(1) L \perp \Pi \iff \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

$$(2) L // \Pi \iff Am + Bn + Cp = 0.$$



# 直线与平面的位置关系

**例11** 设直线 $L: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$ , 平面 $\Pi: x - y + 2z = 3$ ,  
求直线与平面的夹角。

**解**  $\vec{n} = (1, -1, 2), \vec{s} = (2, -1, 2)$ ,

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \\ &= \frac{|1 \times 2 + (-1) \times (-1) + 2 \times 2|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{9}} = \frac{7}{3\sqrt{6}}.\end{aligned}$$

$\therefore \varphi = \arcsin \frac{7}{3\sqrt{6}}$  为所求夹角



# 直线与平面的位置关系

**例12** 判断  $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{2}$  与  $\pi: x+4y-z-1=0$  的位置关系.

若相交, 则求出交点与夹角.

**解**

$$\vec{s} = (1, -2, 2), \vec{n} = (1, 4, -1)$$

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = -9 \neq 0, \text{ 所以 } l \text{ 与 } \pi \text{ 相交}$$

$$l: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{代入 } \pi, \text{ 得 } t = -\frac{8}{9}$$

$$\text{所以 } l \text{ 与 } \pi \text{ 交点 } \left( \frac{1}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{16}{9} \right)$$

$$\therefore \varphi = \arcsin \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{n}\| \|\vec{s}\|} = \arcsin \frac{|1 - 8 - 2|}{\sqrt{18} \sqrt{9}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

# 直线与平面的位置关系

**例13** 直线 $l$ 过点 $M(2,5,-2)$ 且与直线

$$l_1: \begin{cases} x - y + 2z - 4 = 0 \\ 3x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

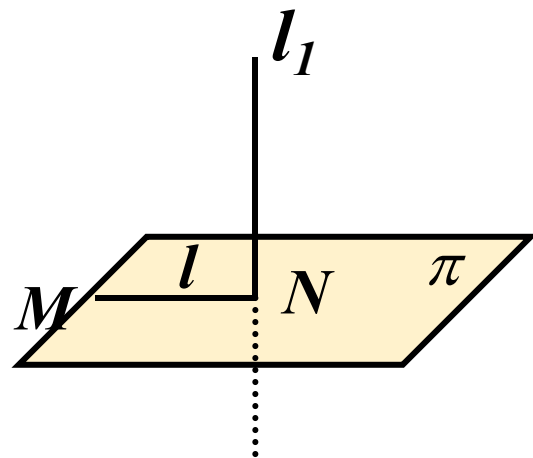
垂直相交, 求 $l$ 的方程.

**解** 只需求出交点 $N$ 的坐标即可.

过 $M$ 作平面 $\pi$ 与 $l_1$ 垂直,  $\pi$ 与 $l_1$ 的交点即 $N$ .

$l_1$  的方向向量:

$$\vec{s}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}.$$





# 直线与平面的位置关系

过 $M(2, 5, -2)$ 且与 $l_1$ 垂直的平面

$$\pi: -9(x - 2) + 5(y - 5) + 7(z + 2) = 0.$$

$$9x - 5y - 7z - 7 = 0.$$

将直线 $l_1$ 与 $\pi$ 的方程联立:

$$\begin{cases} x - y + 2z - 4 = 0 \\ 3x + 4y + z = 0 \\ 9x - 5y - 7z - 7 = 0 \end{cases} \quad \bar{A} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

解得:  $x = 1, y = -1, z = 1.$

这就是 $l_1$ 与 $\pi$ 的交点 $N$ 的坐标 $(1, -1, 1).$



# 直线与平面的位置关系

直线 $l$ 的方向向量

$$\vec{s} = \vec{MN} = (-1, -6, 3).$$

$l$  的方程:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z+2}{3}.$$



# 直线与平面的位置关系

## 3. 平面束

设直线 $l$ 的方程是

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \cdots (1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \cdots (2) \end{cases}$$

除方程(2)所表示的平面外, 经过直线 $l$ 的所有平面都可由下式表示:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (3)$$

经过直线 $l$ 的平面全体称为过 $l$ 的**平面束**.

方程(3)称为过直线 $l$ 的**平面束方程**.



# 直线与平面的位置关系

**例14** 求直线

$$l: \frac{x-4}{4} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-2}{3}$$

在平面

$$\pi: 2x + 2y + z - 11 = 0$$

上的投影直线.

**解** (1) 过直线 $l$ 作一平面 $\pi'$ 与 $\pi$ 垂直, 则 $\pi'$ 与 $\pi$ 的交线 $l'$ 就是 $l$ 在 $\pi$ 上的投影

将 $l$ 的方程改写为一般式

$$\begin{cases} x + 4y - 24 = 0 \\ 3y + z - 17 = 0 \end{cases}$$

**Tip:** 任何两项交替相乘化简



# 直线与平面的位置关系

过 $l$ 的平面束方程为

$$x + 4y - 24 + \lambda (3y + z - 17) = 0$$

即

$$x + (4 + 3\lambda)y + \lambda z - (24 + 17\lambda) = 0$$

其法向量为

$$\vec{n}' = (1, 4 + 3\lambda, \lambda),$$

由 $\pi' \perp \pi$ 可得:

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 \cdot 1 + 2(4 + 3\lambda) + 1 \cdot \lambda = 7\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda = -\frac{10}{7},$$



# 直线与平面的位置关系

$\pi'$  的方程为:

$$x + \left(4 - \frac{30}{7}\right)y - \frac{10}{7}z - \left(24 - \frac{170}{7}\right) = 0,$$

即

$$7x - 2y - 10z + 2 = 0$$

直线  $l$  在  $\pi$  上的投影为

$$l': \begin{cases} 7x - 2y - 10z + 2 = 0 \\ 2x + 2y + z - 11 = 0 \end{cases}$$



# 直线与平面的位置关系

**解 (2)** 作过  $l$  且与  $\pi$  垂直的  $\pi'$  : 则  $l$  上的点  $M(4, 5, 2)$  在  $\pi'$  上

$$\text{取 } \vec{n}' = \vec{s} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-7, 2, 10)$$

$$\therefore \pi' : -7(x-4) + 2(y-5) + 10(z-5) = 0$$

$$\text{即 } 7x - 2y - 10z + 2 = 0$$

$$\text{所以 } l \text{ 在 } \pi \text{ 上的投影直线为: } l' : \begin{cases} 7x - 2y - 10z + 2 = 0 \\ 2x + 2y + z - 11 = 0 \end{cases}$$

点向式方程

参数式方程

一般式方程

直线与直线的位置关系

直线与平面的位置关系