



3.3 平面

主要内容:

点法式方程

一般式方程

截距式方程

平面与平面的位置关系

一、点法式方程

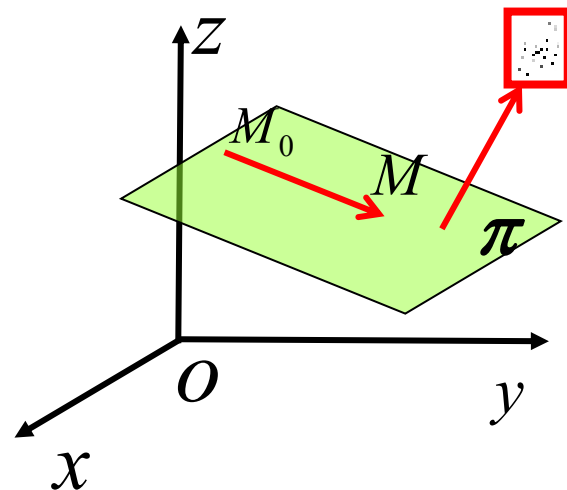
平面 π 可由 π 上任意一点和垂直于 π 的任一向量完全确定. 垂直于 π 的任一向量称为 π 的**法线向量**.

法线向量的特征：垂直于平面内任一向量

设 $\vec{n} = (A, B, C), M_0(x_0, y_0, z_0)$

$M(x, y, z)$ 为平面 π 上的任一点,

必有 $M_0M \perp \vec{n} \Rightarrow M_0M \cdot \vec{n} = 0$





点法式方程

$$\because \vec{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0),$$

$$\therefore A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1)$$

方程(1)称为平面的**点法式方程**,

其中法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$, 已知点 (x_0, y_0, z_0) .

平面上的点都满足方程(1), 不在平面上的点都不满足方程(1), **方程(1)称为平面 π 的方程, 平面 π 称为方程(1)的图形.**

例1 求过三点 $A(2, -1, 4)$, $B(-1, 3, -2)$ 和 $C(0, 2, 3)$ 的平面方程

解 $\vec{AB} = \{-3, 4, -6\}$, $\vec{AC} = \{-2, 3, -1\}$

取 $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \{14, 9, -1\}$,

所求平面方程为:

$$14(x - 2) + 9(y + 1) - (z - 4) = 0,$$

化简得

$$14x + 9y - z - 15 = 0.$$

例2 求过点 $(1,1,1)$ ，且垂直于平面 $x - y + z = 7$ 和 $3x + 2y - 12z + 5 = 0$ 的平面方程

解 $\vec{n}_1 = (1, -1, 1), \vec{n}_2 = (3, 2, -12)$

取法向量 $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (10, 15, 5)$,

所求平面方程为

$$10(x - 1) + 15(y - 1) + 5(z - 1) = 0,$$

化简得

$$2x + 3y + z - 6 = 0.$$



一般式方程

二、一般式方程

由平面的点法式方程

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\Rightarrow Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$$
$$= D$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{平面的一般方程}$$

$$\text{法向量} \quad \vec{n} = (A, B, C).$$

平面一般方程的几种特殊情况：

(1) $D = 0$, 平面通过坐标原点；

(2) $A = 0$, $\begin{cases} D = 0, \text{平面通过}x\text{轴;} \\ D \neq 0, \text{平面平行于}x\text{轴;} \end{cases}$

类似地可讨论 $B = 0, C = 0$ 的情形.

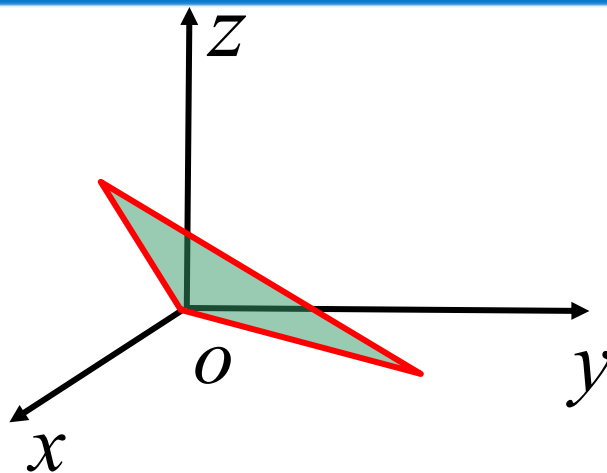
(3) $A = B = 0$, 平面那个性与 xoy 坐标面；

类似地可讨论 $A = C = 0, B = C = 0$ 的情形.

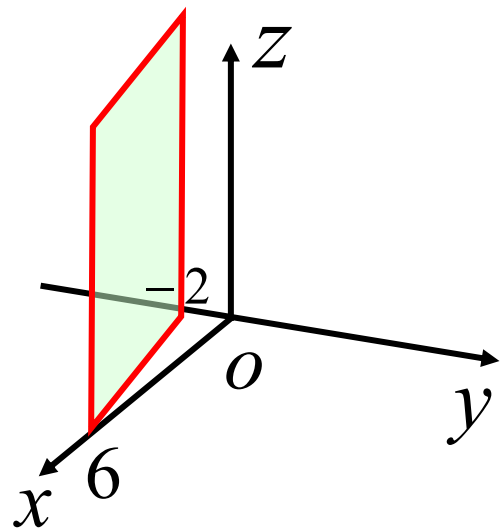
一般式方程

例3 观察下列平面

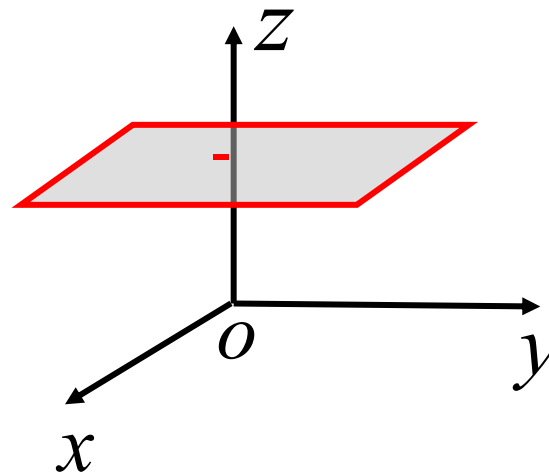
(1) $2x - y - z = 0;$



(2) $-x + 3y + 6 = 0;$



(3) $3z - 7 = 0.$





一般式方程

例4 设平面过原点及点 $(6, -3, 2)$ ，且与平面 $4x - y +$

$2z = 8$ 垂直，求此平面方程.

解 设平面为 $Ax + By + Cz + D = 0$,

由平面过原点知 $D = 0$,

由平面过点 $(6, -3, 2)$ 知 $6A - 3B + 2C = 0$

$\because \vec{n} \perp (4, -1, 2),$

$\therefore 4A - B + 2C = 0$

$\Rightarrow A = B = -\frac{2}{3}C,$

所求平面方程为: $2x + 2y - 3z = 0.$



截距式方程

三. 截距式方程

例5 设平面与 x, y, z 三轴分别交于 $P(a, 0, 0), Q(0, b, 0), R(0, 0, c)$ (其中 $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$), 求此平面方程.

解1 设平面为 $Ax + By + Cz + D = 0$,

$$\text{将三点坐标代入得} \begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{D}{a}, B = -\frac{D}{b}, C = -\frac{D}{c}.$$



截距式方程

将 $A = -\frac{D}{a}, B = -\frac{D}{b}, C = -\frac{D}{c},$

代入所设方程得

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

平面的截距式方程

x轴上的截距

y轴上的截距

z轴上的截距



截距式方程

解2 (点法式) 取 $\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = (-a, b, 0)(-a, 0, c)$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = (bc, ac, ab)$$

所以, $\pi: bc(x - a) + ac(y - 0) + ab(z - 0) = 0$
 $bcx + acy + abz = abc$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

截距式方程

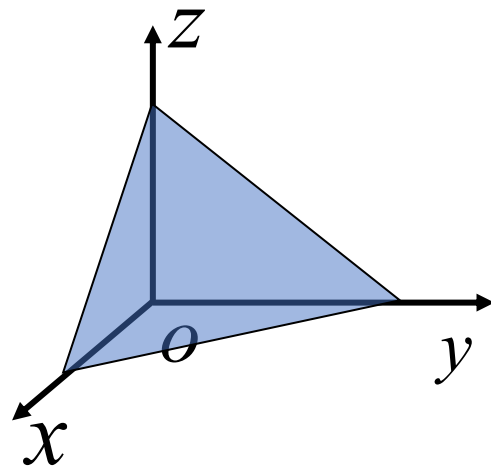
例6 求平行于平面 $6x + y + 6z + 5 = 0$ 而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

解 设平面为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$,

$$\because V = 1, \therefore \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} abc = 1,$$

由所求平面与已知平面平行得

$$\frac{1/a}{6} = \frac{1/b}{1} = \frac{1/c}{6},$$





$$\text{化简得 } \frac{1}{6a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{6c}, \quad \text{令 } \frac{1}{6a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{6c} = t$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{6t}, b = \frac{1}{t}, c = \frac{1}{6t},$$

代入体积式

$$\therefore 1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6t} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{6t} \Rightarrow t = \frac{1}{6},$$

$$\therefore a = 1, \quad b = 6, \quad c = 1,$$

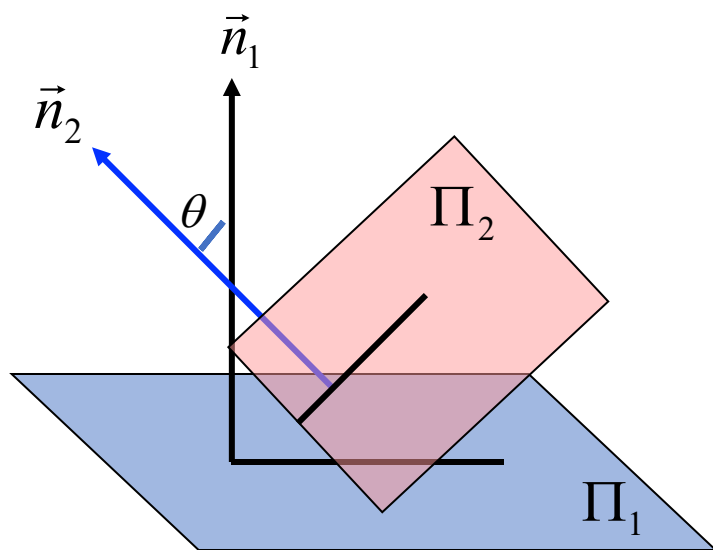
所求平面方程为: $6x + y + 6z = 6.$

平面与平面的位置关系

四、平面与平面的位置关系

1. 两平面的夹角

定义 两平面法向量之间的夹角称为两平面的夹角.
(通常取锐角)



$$\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2),$$



平面与平面的位置关系

按照两向量夹角余弦公式有

$$\cos \theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

两平面夹角余弦公式

2. 两平面垂直与平行的充要条件:

$$(1) \quad \Pi_1 \perp \Pi_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$$

$$(1) \quad \Pi_1 // \Pi_2 \iff \frac{A_1}{A_2} + \frac{B_1}{B_2} + \frac{C_1}{C_2}.$$



平面与平面的位置关系

例7 讨论以下各组平面的位置关系:

$$(1) \quad -x + 2y - z + 1 = 0, \quad y + 3z - 1 = 0$$

$$(2) \quad 2x - y + z - 1 = 0, \quad -4x + 2y - 2z - 1 = 0$$

$$(3) \quad 2x - y - z + 1 = 0, \quad -4x + 2y + 2z - 2 = 0$$

解(1) $\cos \theta = \frac{|-1 \times 0 + 2 \times 1 - 1 \times 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}}$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{60}} \text{ 两平面相交, 夹角 } \theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{60}}.$$



平面与平面的位置关系

解(2) $\vec{n}_1 = (2, -1, 1), \vec{n}_2 = (-4, 2, -2)$

$$\Rightarrow \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}, \quad \text{两平面平行}$$

$$\because M(1, 1, 0) \in \Pi_1 \quad M(1, 1, 0) \notin \Pi_2$$

两平面平行但不重合.

或:

$$\pi_1 : 2x - y + z - 1 = 0$$

$$\pi_2 : 2x - y + z + \frac{1}{2} = 0$$

所以, 两平面平行但不重合.



平面与平面的位置关系

解(3) $\because \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2}$, 两平面平行

$\because M(1,1,0) \in \Pi_1 \quad M(1,1,0) \in \Pi_2$

所以两平面重合.

或:

$$\pi_1 : 2x - y + z - 1 = 0$$

$$\pi_2 : 2x - y + z + 1 = 0$$

所以, 两平面重合.



平面与平面的位置关系

例8 求过点 $M_0(-1,3,2)$ 且与平面 $2x - y + 3z - 4 = 0$ 和 $x + 2y + 2z - 1 = 0$ 都垂直的平面 π 的方程.

解: 两个已知平面的法向量为

$$\vec{n}_1 = (2, -1, 3), \vec{n}_2 = (1, 2, 2),$$

故平面 π 的法向量为

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$$



故平面 π 的方程为

$$-8(x + 1) - (y - 3) + 5(z - 2) = 0,$$

即

$$8x + y - 5z + 15 = 0.$$

平面与平面的位置关系

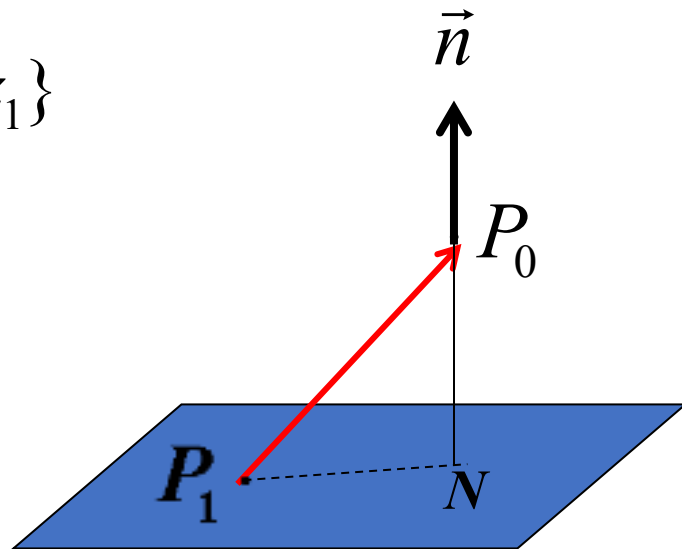
例9 求点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离.

解 $\forall P_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$

$$\vec{P_1P_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\}$$

$$d = |\text{Pr}_{j_n} P_1P_0|$$

$$= \frac{|\vec{P_0P_1} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$





平面与平面的位置关系

$$= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\because Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, (P_1 \in \Pi)$$

$$\therefore d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

点到平面距离公式

点法式方程

一般式方程

截距式方程

平面与平面的位置关系