



3.2 向量的乘法

主要内容:

内积

外积

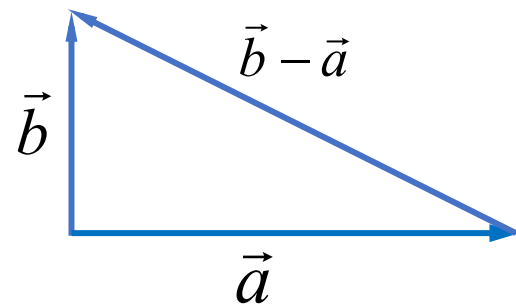
混合积

一、内积

设非零向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 相互垂直,
则由右图可知:

$$\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{b} - \vec{a}\|^2$$

$$\begin{aligned} \text{即 } & (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\ & = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 \end{aligned}$$



由此式可推出

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$



内积

定义 设向量

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

称为 \vec{a} 与 \vec{b} 的内积（或数量积）。 $\vec{a} \cdot \vec{a}$ 记为 \vec{a}^2

由定义可知，基向量 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 的内积为

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0.$$



向量的内积具有以下性质:

$$(1) \vec{a}^2 = \|\vec{a}\|^2;$$

证 $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \|\vec{a}\|^2 .$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{0} = 0;$$

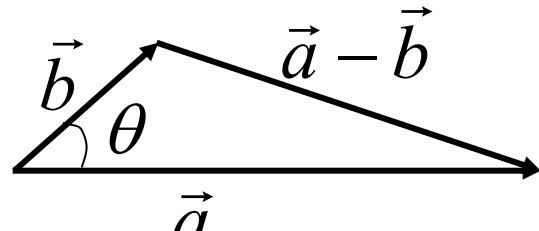
$$(3) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a},$$

$$(4) (\lambda \vec{a}) \cdot (\mu \vec{b}) = \lambda \mu (\vec{a} \cdot \vec{b}), \quad \lambda, \mu \in R;$$

$$(5) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

性质(2)—(5)很容易用内积定义作出证明.

由余弦定理可知

$$\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$


$$2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$

$$- (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2 - (a_3 - b_3)^2$$

$$= 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta = \|\vec{a}\|\text{Pr } j_{\vec{a}}\vec{b} = \|\vec{b}\|\text{Pr } j_{\vec{b}}\vec{a}.$$



内积

若 $\|\vec{a}\| \neq 0, \|\vec{b}\| \neq 0$, 则

$$\begin{aligned}\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \\ &= \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \cdot \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \vec{e}_{\vec{a}} \cdot \vec{e}_{\vec{b}}\end{aligned}$$

若 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{2}$, 则称 \vec{a} 与 \vec{b} 正交 (或垂直), 记为 $\vec{a} \perp \vec{b}$.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$

例1 设 $\|\vec{a}\|=11$, $\|\vec{b}\|=23$, $\|\vec{a}-\vec{b}\|=30$, 求 $\|\vec{a}+\vec{b}\|$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \|\vec{a}+\vec{b}\|^2 &= (\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 650 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 &= (\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 650 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}\end{aligned}$$

$$\therefore 2\vec{a}\cdot\vec{b} = -250,$$

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = 400, \quad \|\vec{a}+\vec{b}\| = 20.$$



内积

例2. $\vec{a} = (-2, 2, 1), \vec{b} = (1, 3, -3), \vec{c} = (3, -4, 12),$

$\vec{d} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c},$ 求 $\text{Pr}_{\vec{c}} \vec{d}.$

解 $\vec{d} = (-6 - 8 + 12)(1, 3, -3) + (-2 + 6 - 3)(3, -4, 12)$
 $= (1, -10, 18),$

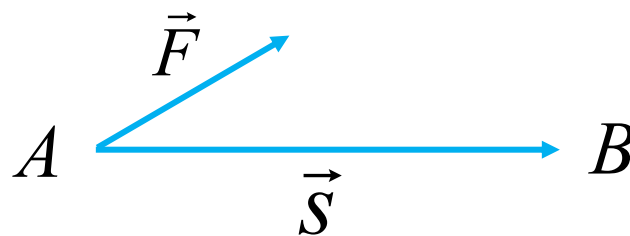
$$\text{Pr}_{\vec{c}} \vec{d} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{\|\vec{c}\|} = \frac{259}{13}$$

例3. 内积的物理意义

一质点在力 F 的作用下从点A移动到B, 力所做的功.

记 $\vec{s} = AB$, 则

$$\begin{aligned}
 W &= \|\vec{s}\| \|\vec{F}\| \cos \langle \vec{s}, \vec{F} \rangle \\
 &= \vec{F} \cdot \vec{s}.
 \end{aligned}$$



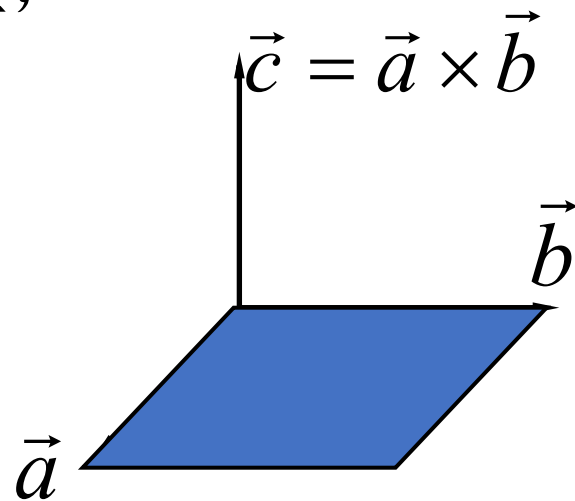
二. 外积

定义：向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的外积 $\vec{a} \times \vec{b}$ 是一个向量，

$$(1) \quad \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle,$$

(2) $\vec{a} \times \vec{b}$ 与 \vec{a} , \vec{b} 所确定的平面垂直，
且 \vec{a} , \vec{b} , $\vec{a} \times \vec{b}$ 符合右手系。

外积又称为向量积。



外积的性质

$$(1) \vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b};$$

$$(2) \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}, \vec{0} \times \vec{a} = \vec{0};$$

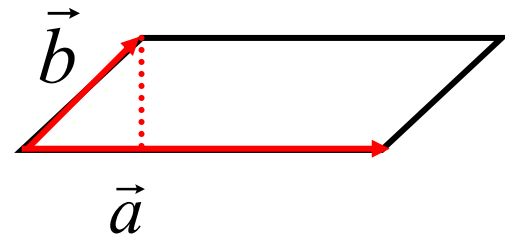
$$(3) \vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0};$$

$$(4) \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a};$$

$$(5) (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b});$$

$$(6) (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

外积的几何意义



$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

$$= \|\vec{a}\| h$$

= 以 \vec{a}, \vec{b} 为邻边的平行四边形的面积

基向量的外积

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1,$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

利用坐标计算外积

设 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) \\ &= a_1b_2\vec{k} - a_1b_3\vec{j} - a_2b_1\vec{k} + a_2b_3\vec{i} + a_3b_1\vec{j} - a_3b_2\vec{i} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

例2 求与 $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ 都垂直的单位向量。

解

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 10\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\because \|\vec{c}\| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5},$$

$$\therefore \vec{e}_{\vec{c}} = \pm \frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|} = \pm \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k} \right).$$

例3 在顶点为 $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$ 和 $C(1, 3, -1)$ 的三角形中, 求 AC 边上的高 BD .

解 $AC = (0, 4, -3)$, $AB = (4, -5, 0)$

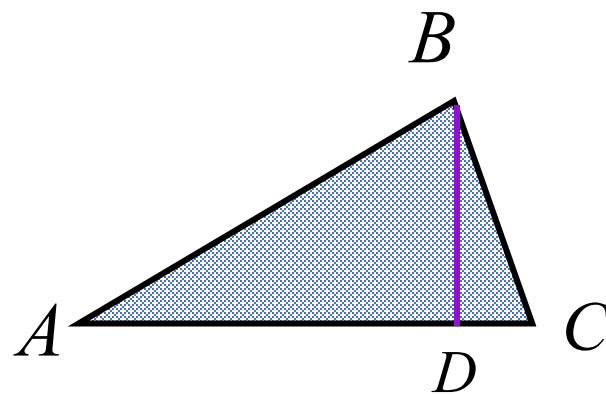
三角形 ABC 的面积为

$$S = \frac{1}{2} \|\vec{AC} \times \vec{AB}\|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = \frac{25}{2}$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5, \quad S = \frac{1}{2} \|\vec{AC}\| \cdot \vec{BD}$$

$$\frac{25}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot BD \quad \therefore BD = 5.$$



例4 设单位向量 OA 与三个坐标轴夹角相等, B 是点 $M(1,-3,2)$ 关于 $N(-1,2,1)$ 的对称点. 求 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$.

解 设 α, β, γ 是 \overrightarrow{OA} 的方向角, 则

$$\overrightarrow{OA} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

由 $\alpha = \beta = \gamma$ 可得

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 3 \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$OA = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

设点 B 的坐标是 (x, y, z) ,则点 N 是 MB 的中点, 且

$$\frac{x+1}{2} = -1, \quad \frac{y-3}{2} = 2, \quad \frac{z+2}{2} = 1.$$

$$x = -3, \quad y = 7, \quad z = 0.$$

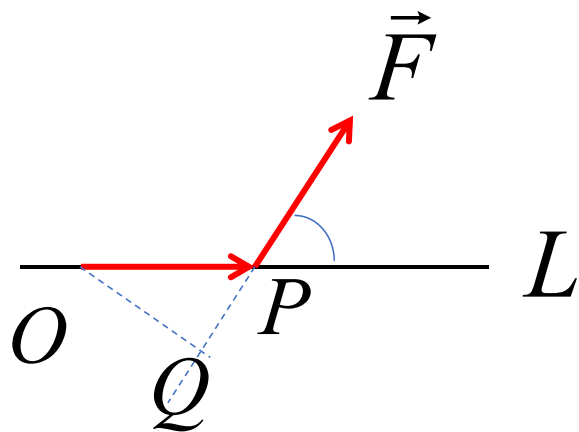
$$\vec{OB} = (-3, 7, 0),$$

$$OA \times OB = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{3}} & \pm \frac{1}{\sqrt{3}} & \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -3 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} (-7, -3, 10).$$

例5 外积的物理意义

设 O 为一杠杆 L 的支点，有一力 \vec{F} 作用在这杠杆上的 P 点处。力 F 与 OP 的夹角为 θ 。力 \vec{F} 对支点 O 的力矩是一向量 \vec{M} ，它的模

$$\begin{aligned} \|\vec{M}\| &= \|OQ\| \|\vec{F}\| \\ &= \|OP\| \|\vec{F}\| \sin \theta \end{aligned}$$



\vec{M} 的方向垂直于 OP 与 \vec{F} 所决定的平面，指向符合右手系

三、混合积

定义 设已知三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 数量 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ 称为这三个向量的混合积, 记为 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$.

设 $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \quad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k},$

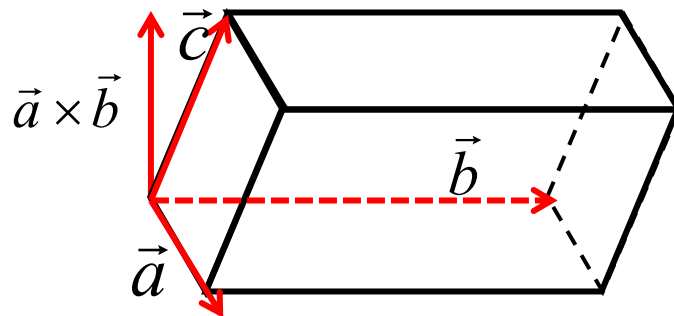
$$\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k},$$

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

这是混合积的坐标表达式

混合积的几何意义与性质：

(1) 向量的混合积 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ 是这样的一个数，它的绝对值表示以向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积



$$(2) [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}.$$

$$(3) \text{三向量 } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ 共面} \Leftrightarrow [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0$$

例6 已知 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=2$, 计算 $[(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})] \cdot (\vec{c} + \vec{a})$.

$$\begin{aligned}
 & \text{解} \quad [(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})] \cdot (\vec{c} + \vec{a}) \\
 &= [\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c}] \cdot (\vec{c} + \vec{a}) \\
 &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + \underbrace{(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{c}}_{=0} + \vec{0} \cdot \vec{c} + \underbrace{(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{c}}_{=0} \\
 &\quad + \underbrace{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}}_{=0} + \underbrace{(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}}_{=0} + \vec{0} \cdot \vec{a} + \underbrace{(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}}_{=(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}} \\
 &= 2(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 2[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 4.
 \end{aligned}$$

例7 已知不在一平面上的四点 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$, 求四面体的体积。

解 由立体几何知, 四面体的体积等于以向量 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AD} 为棱的平行六面体的体积的六分之一。

$$V = \frac{1}{6} |[AB \ AC \ AD]|$$

$$\because AB = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\vec{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

$$\vec{AD} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1)$$

$$\therefore V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

式中正负号的选择和行列式的符号一致.



内积

外积

混合积