# 3.1 空间直角坐标系

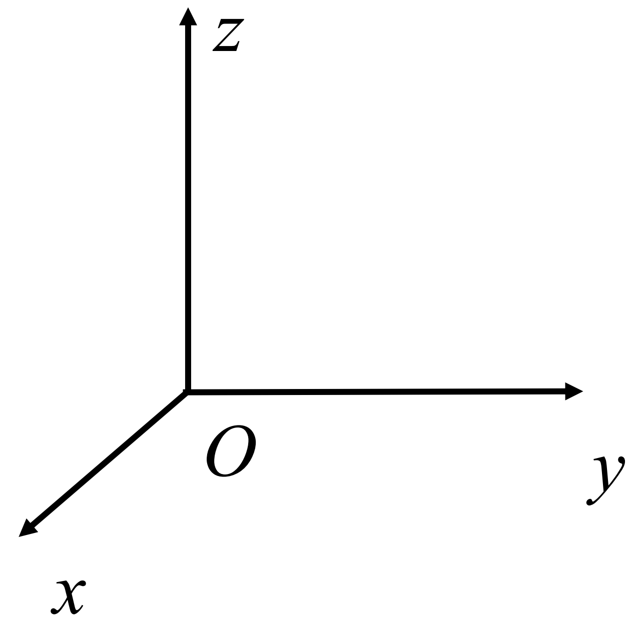
**主要内容：**

- 空间直角坐标系
- 向量的概念
- 向量的线性运算
- 向量在轴上的投影
- 线性运算的几何意义
- 向量的模与方向余弦

# 一、空间直角坐标系

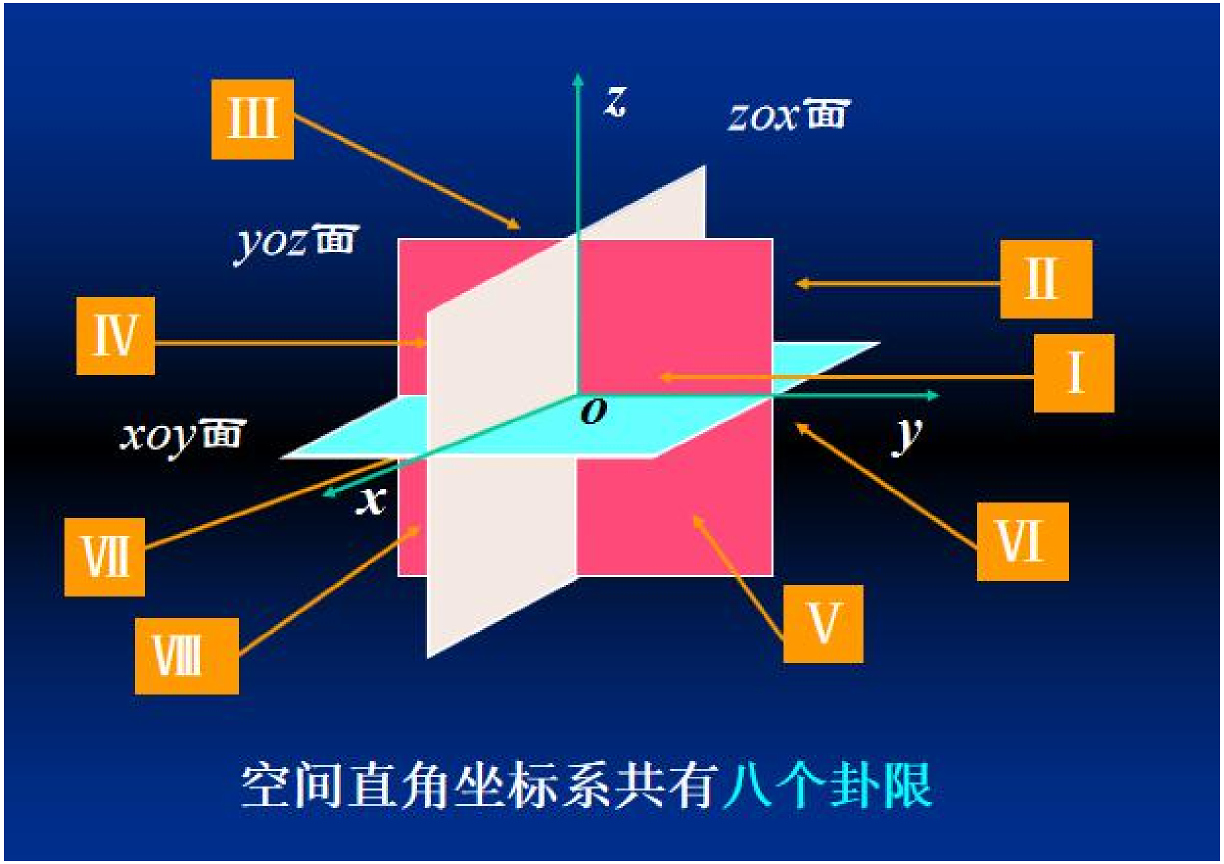
三个坐标轴的正方向符合右手系.

即右手握住$z$轴，当右手的四个手指从正向$x$轴转向正向$y$轴时，大拇指的指向就是Z轴的正向



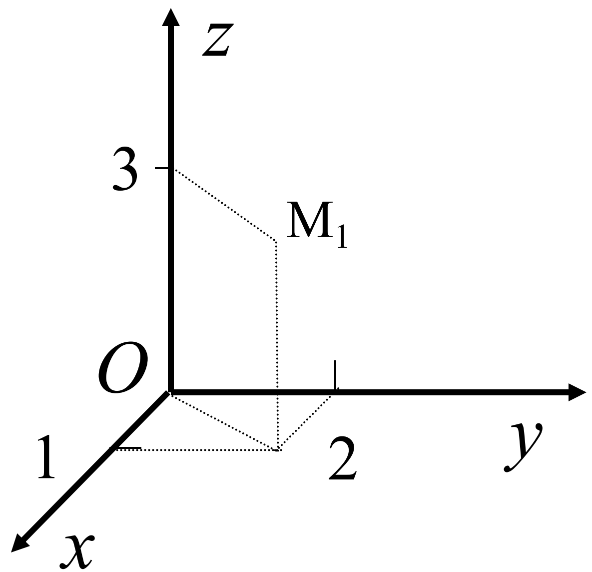

$x$轴:横轴；$y$轴：纵轴；$z$轴：竖轴

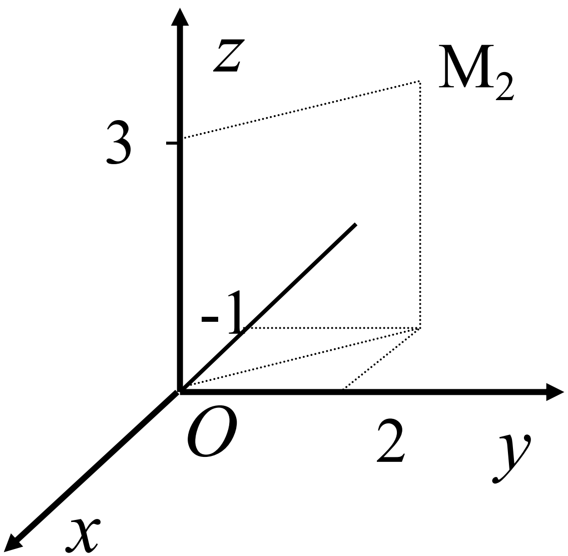
# 空间直角坐标系与向量

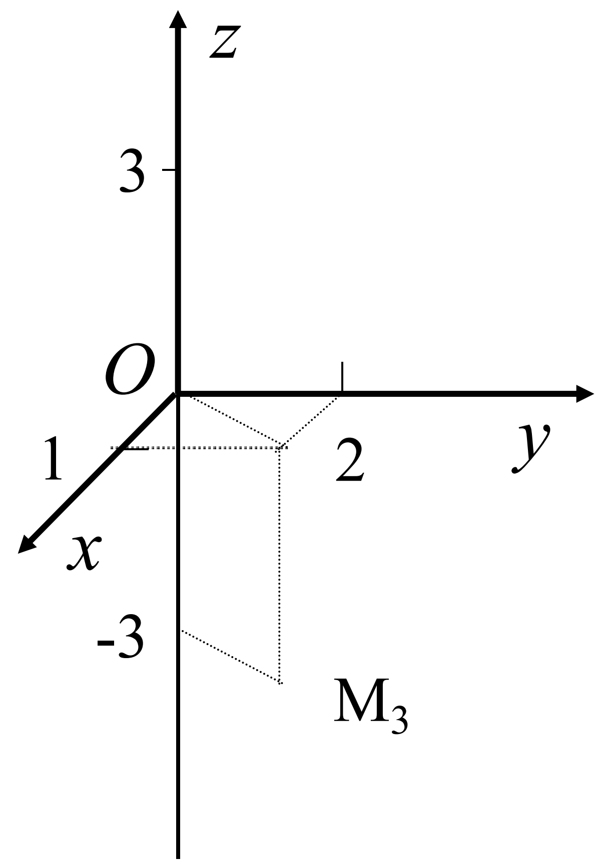


**例** 在O—xyz坐标系中表示以下三个点：

$M_1(1,\ 2,\ 3)$，$M_2(-1,\ 2,\ 3)$，$M_3(1,\ 2,\ -3)$.

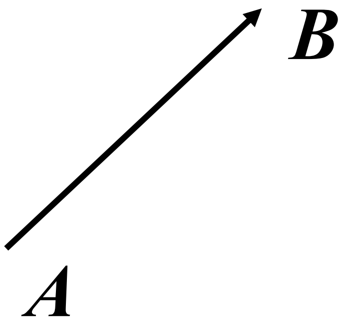



z
M$_2$
3
-1
O
2
y
x


z
3
O
1
2
y
x
-3
M$_3$

## 二. 向量的概念

**向量**：既有大小又有方向的量.




**向量的表示**：$\vec{a}$或 $\overrightarrow{AB}$

以$A$为起点，$B$为终点的有向线段.

**向量的模**：向量的大小. $\|\vec{a}\|$或 $\|\overrightarrow{AB}\|$

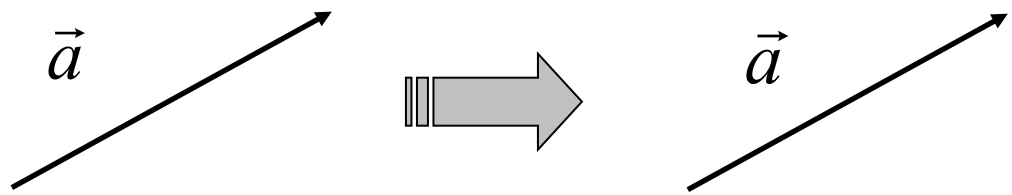
（模又称为长度或范数）.

**单位向量**：模为1的向量.

**零向量**：模为0的向量.

# 向量的概念

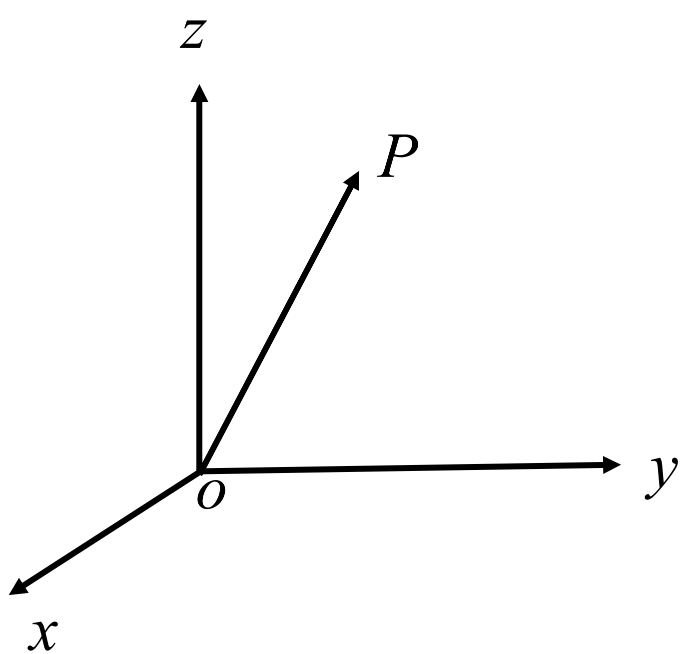
**自由向量**：不考虑起点位置的向量




**相等向量**：大小相等且方向相同的向量


**负向量**：大小相等但方向相反的向量

**向径**：空间直角坐标系中任一点 $P$ 与原点构成的向量. $\overrightarrow{OP}$



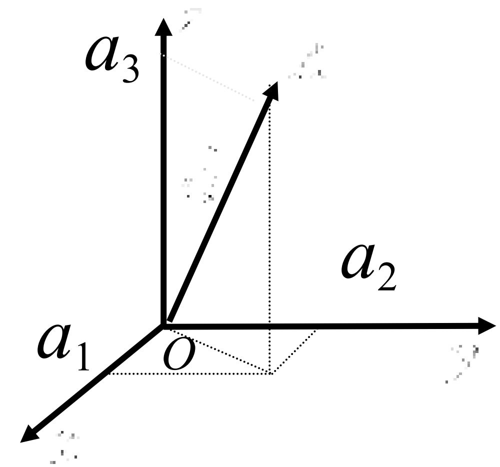
# 三、向量的线性运算

## 1. 向量的分量：

把向量 作平行移动，使其起点与原点重合。

设其终点$A$的坐标为$(a_1, a_2, a_3)$, 则称$a_1, a_2, a_3$为向量 $\overrightarrow{OA}$ 的**分量或坐标**，

记为 $=(a_1, a_2, a_3)$.



## 2. 向量的线性运算

**定义** 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, b_3)$,

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3),$$
$$k\bullet\boldsymbol{\alpha}=(ka_1, ka_2, ka_3).$$

$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 称为***加法***， $k\bullet\boldsymbol{\alpha}$ 称为***数乘***.

加法与数乘统称为**线性运算**.

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$$
$$=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3).$$

## 3. 线性运算满足的运算规律

- (1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;
- (2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;
- (3) $\alpha+0=\alpha$;
- (4) $\alpha+(-\alpha)=0$;
- (5) $1\alpha=\alpha$;
- (6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;
- (7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;
- (8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

## 4. 基向量与线性表出

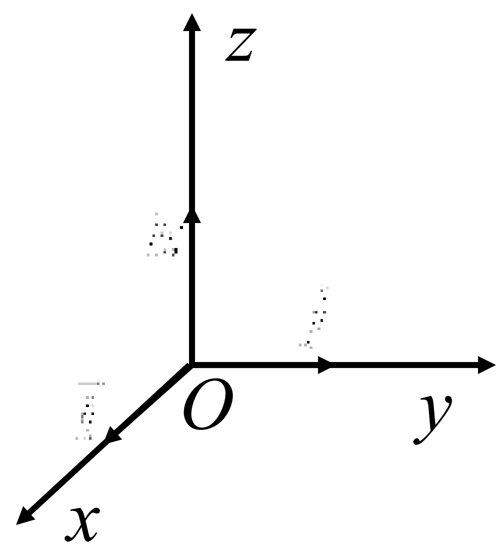
$$\vec{i}=(1,0,0),\ \vec{j}=(0,1,0),\ \vec{k}=(0,0,1)$$

单位向量 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 称为基向量.

$$\begin{aligned}\vec{a}&=(a_1, a_2, a_3)\\&=(a_1, 0,0)+(0, a_2, 0)+(0, 0, a_3)\\&=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\end{aligned}$$

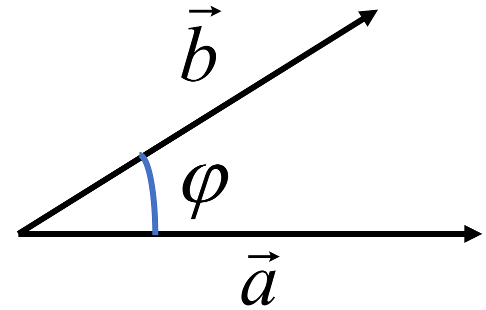
称 $\vec{a}$ 可由 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 线性表出。

$a_1\vec{i}$ 称为向量 $\vec{a}$ 在 $x$ 轴上的分向量



# 四、向量在轴上的投影

## 1. 空间两向量的夹角的概念：



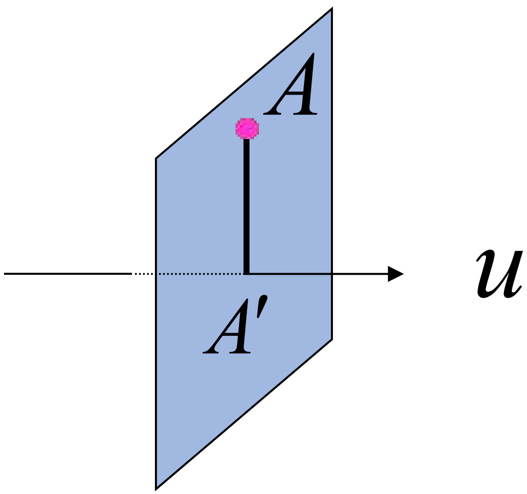

$\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$,向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的夹角为:

$$\varphi = <\vec{a}, \vec{b}> = <\vec{b}, \vec{a}> \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

类似地，可定义**向量与一轴**或**空间两轴**的夹角.

特殊地，**当两个向量中有一个零向量时**，规定它们的夹角可在0与 $\pi$ 之间任意取值.

## 2. 空间一点在轴上的投影

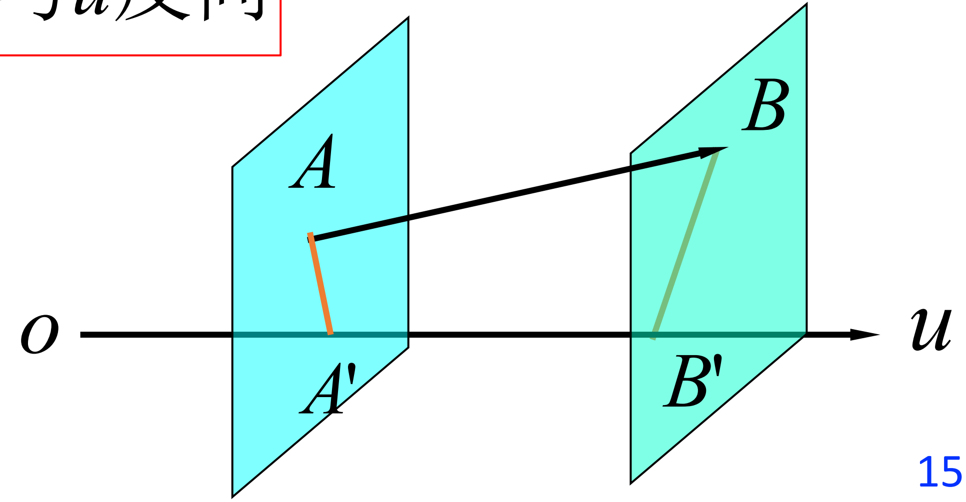



过点$A$作轴$u$的垂直平面，交点$A'$即为点$A$在轴$u$上的投影。

## 3. 向量在轴上的投影

过空间点*A*,*B*作平面与轴 *u*垂直，与轴 *u*相交于*A'*, *B'*,向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 *u*上的投影定义为

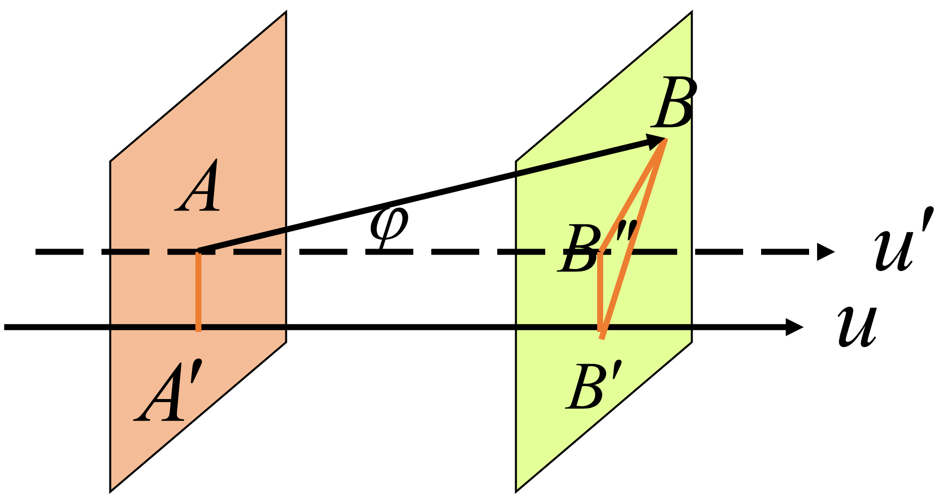
$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = \begin{cases} \|A'B'\|, A'B'与u同向 \\ -\|A'B'\|, A'B'与u反向 \end{cases}$$



**向量在轴上的投影有以下两个性质：**

(1) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 $u$ 上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角的余弦：$\Pr j_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi$

**证**




$$\Pr j_u AB = \Pr j_{u'} AB$$
$$= \| AB \| \cos\varphi$$

# 向量在轴上的投影

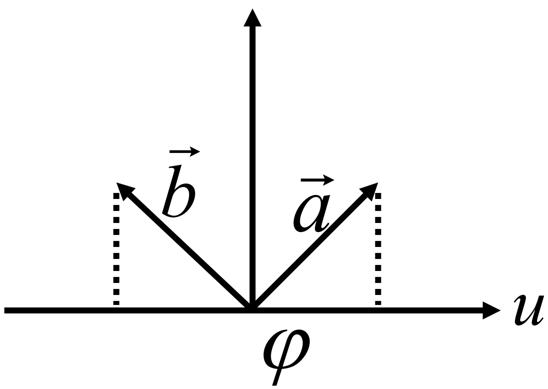
**由性质1容易看出：**

(1) $0 \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$,投影为正

(2) $\dfrac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$,投影为负

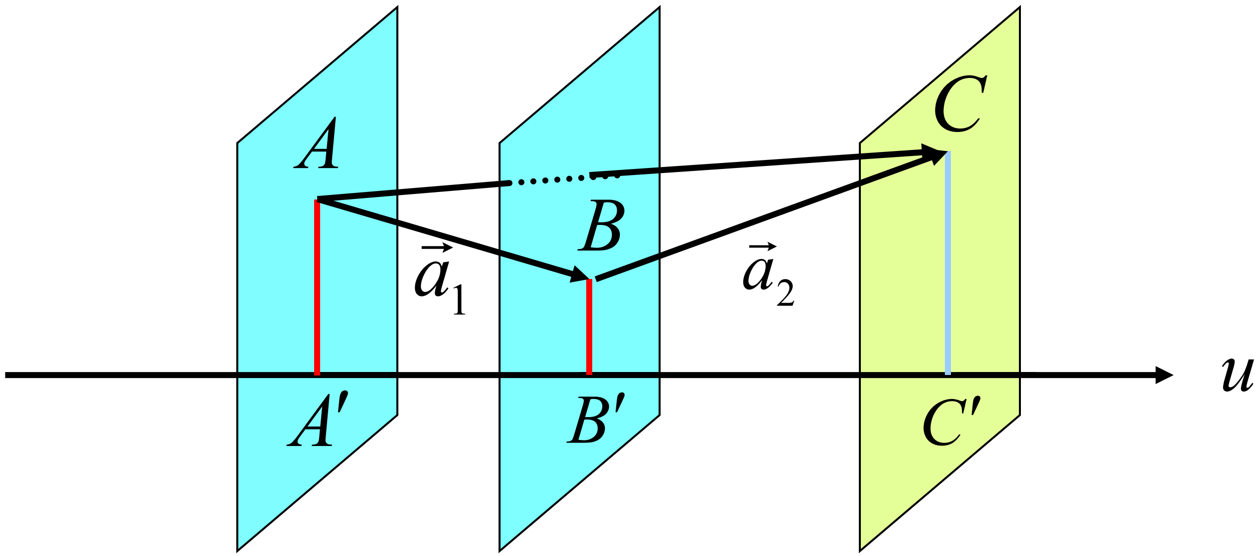
(3) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$,投影为零

(4) 相等向量在同一轴上投影相等；



（2）两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上投影之和（可推广到有限多个）

$$\mathrm{Pr}\, j_u(\vec{\boldsymbol{a}}_1+\vec{\boldsymbol{a}}_2)=\mathrm{Pr}\, j_u\vec{\boldsymbol{a}}_1+\mathrm{Pr}\, j_u\vec{\boldsymbol{a}}_2.$$



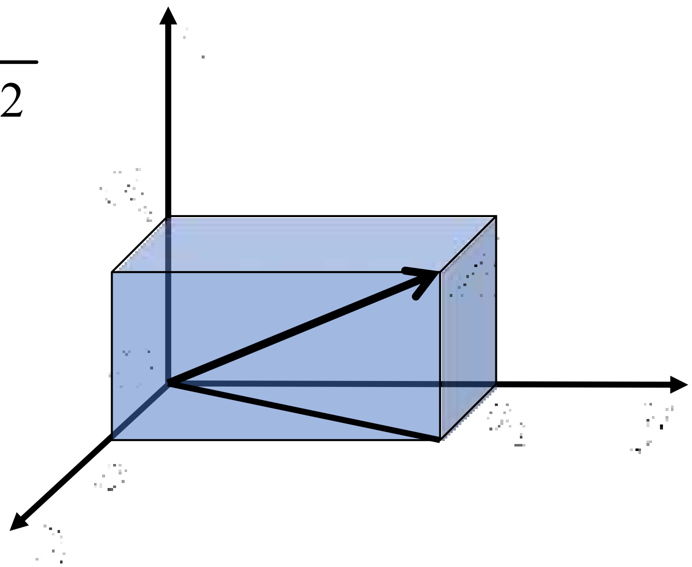
向量$\overrightarrow{OA}$的坐标$a_1, a_2, a_3$分别是 $\overrightarrow{OA}$ 在三个坐标轴上的投影.

利用勾股定理从图中可得

$$\|\boldsymbol{OA}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\|k\boldsymbol{OA}\| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2 + (ka_3)^2}$$

$$= |k| . \| \overrightarrow{OA} \|$$



## 五. 线性运算的几何意义

设$\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2), OB=(b_1,b_2)$, 则

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(a_1+b_1,a_2+b_2)=\overrightarrow{OP},$$

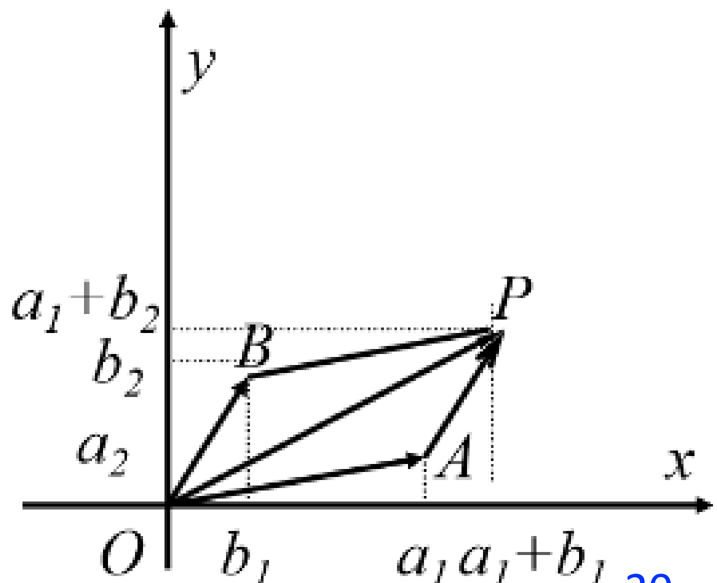
$$\operatorname{Pr} j_{Ox} BP = a_1+b_1-b_1=a_1$$

$$\operatorname{Pr} j_{oy} BP = a_2+b_2-b_2=a_2$$

经平行移动后可与 重合.

故 $\overrightarrow{BP}//\overrightarrow{OA}$,同理 $\overrightarrow{AP}//\overrightarrow{OB}$

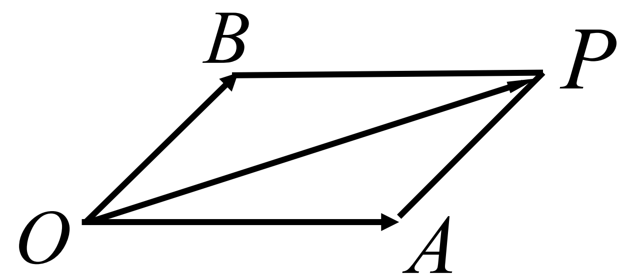
所以，***OAPB***是平行四边形.



# 线性运算的几何意义

## 1. 平行四边形法则

$$\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{OP},$$




$\vec{OP}$ 是以 $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ 为边的平行四边形的对角线.

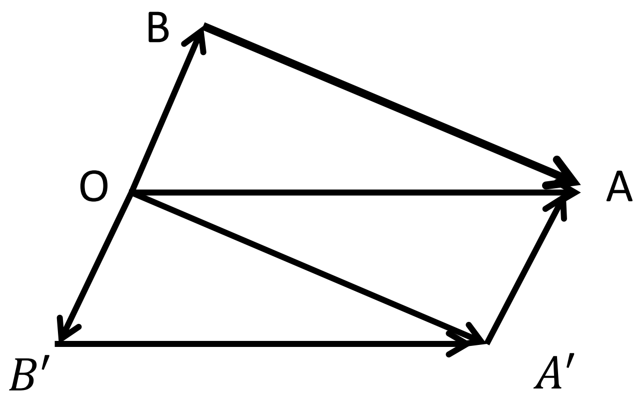
$$\vec{AP}=\vec{OB},\quad \vec{OA}+\vec{AP}=\vec{OP}.$$

平行四边形法则也可表示为三角形法则。

$$\vec{OA}-\vec{OB}=\vec{OA}+\vec{OB'}$$

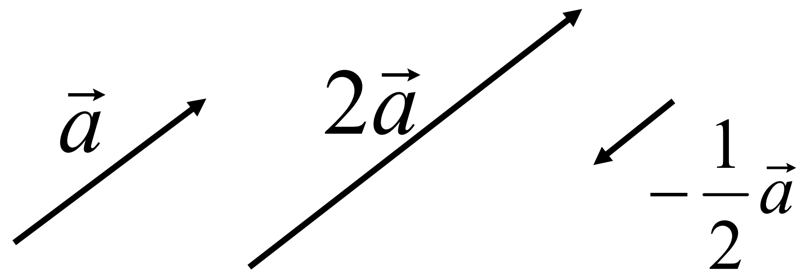
$$=\vec{OA'}$$

$$=\vec{BA}$$



# 线性运算的几何意义

## 2. 伸缩变换




（1） $\vec{b} = \lambda\vec{a}$

（2） $\lambda > 0, \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向；

（3） $\lambda < 0, \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向.

（4） $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = \lambda(a_1, a_2, a_3) = \lambda\vec{a}$

（5） $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2} = \dfrac{b_3}{a_3}.$

(若 $a_i = 0$, 则 $b_i = 0$).

**例1.** 非零向量单位化.

设向量$\vec{a} \neq 0$,令 $\vec{e}_a = \dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$,则

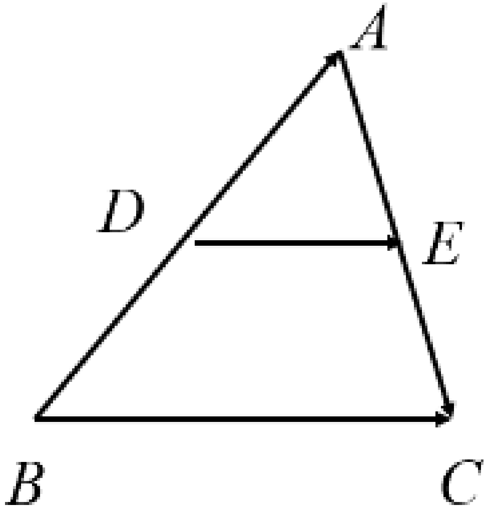
$$\|\vec{e}_a\| = \left|\frac{1}{\|\vec{a}\|}\right| \cdot \|\vec{a}\| = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\|\vec{a}\| = 1$$

$\vec{e}_a$ 是与 $\vec{a}$同方向的单位向量.

**例2. 证明：** 三角形的中位线平行于底边且等于底边的一半.

**证** 设$DE$是中位线，

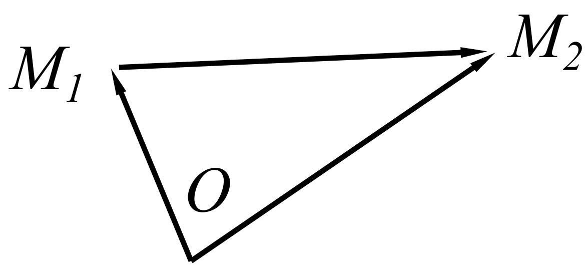
$$\vec{DE}=\vec{DA}+\vec{AE}$$
$$=\frac{1}{2}\vec{BA}+\frac{1}{2}\vec{AC}$$
$$=\frac{1}{2}(\vec{BA}+\vec{AC})$$
$$=\frac{1}{2}\vec{BC}$$



**例3.** 设$M_1(x_1, y_1, z_1)$ , $M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间二点.

(1) 求 $\|M_1M_2\|$;

**解.**




$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

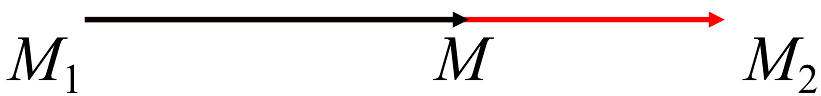
$$\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

这就是**空间两点间的距离公式**.

# 线性运算的几何意义

（2）设$M$为$\overrightarrow{M_1M_2}$上一点，$\dfrac{\|M_1M\|}{\|MM_2\|}=\lambda$，求$M$的坐标.

**解.**




设$M$的坐标为$(x, y, z)$，由$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$得，

$$(x-x_1, y-y_1, z-z_1)=\lambda(x_2-x, y_2-y, z_2-z)$$

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),\qquad x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

同理，$y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$，$z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

# 线性运算的几何意义

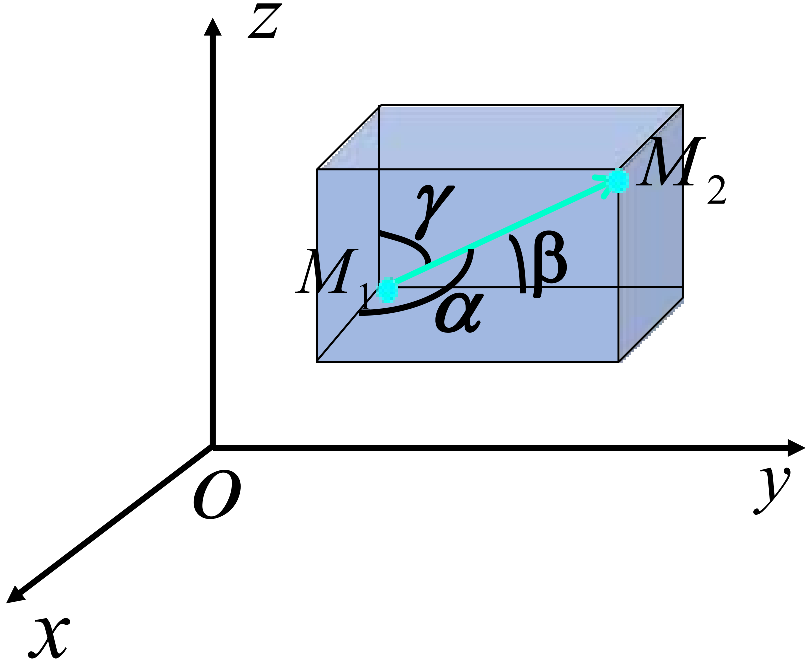
若$M$为$M_1M_2$的中点，则$M$的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

## 六、向量的模与方向余弦

非零向量 $\vec{a}$ 与三条坐标轴的正向的夹角称为**方向角**.

$$\alpha = <\vec{a},\vec{i}>,\ \beta = <\vec{a},\vec{j}>,\ \gamma = <\vec{a},\vec{k}>,$$




$$0 \le \alpha \le \pi,$$

$$0 \le \beta \le \pi,$$

$$0 \le \gamma \le \pi.$$

# 向量的模与方向余弦

由图示可知

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}}$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$称为向量 $\vec{a}$的方向余弦

# 向量的模与方向余弦

## 方向余弦的特征

$$\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1}$$

**特殊地：** 单位向量的方向余弦为

$$\vec{e}_a=\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$$

**例4** 设有向量$\overrightarrow{P_1P_2}$, 已知其模长为2，它与$x$轴和$y$轴的夹角分别为$\frac{\pi}{3}$和$\frac{\pi}{4}$，如果$P_1$的坐标为$(1,0,3)$，求$P_2$的坐标

**解：** 设$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向角分别为$\alpha$，$\beta$，$\gamma$则

$$\alpha=\frac{\pi}{3}, \cos\alpha=\frac{1}{2}, \beta=\frac{\pi}{4}, \cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\because \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

$$\therefore \cos\gamma=\pm\frac{1}{2}.$$

# 向量的模与方向余弦

设$P_2$的坐标为$(x, y, z)$，

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x-1, y-0, z-3)$$

$$= \|\overrightarrow{P_1P_2}\| (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$$= 2(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{1}{2}) = (1, \sqrt{2}, \pm 1)$$

$$\therefore x = 2, y = \sqrt{2}, z = 4 \text{或} 2$$

$$\therefore P_2(2, \sqrt{2}, 4) \text{ 或 } (2, \sqrt{2}, 2)$$

**例4** 设 $\vec{m}=3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k},\vec{n}=2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k},\vec{p}=5\vec{i}+1\vec{j}-4\vec{k}$,

求向量 $\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$ 在$x$轴上的投影及在$y$轴上的分量。

**解** $\because \vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$

$=4(3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k})+3(2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k})-(5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k})$

$=13\vec{i}+7\vec{j}+15\vec{k}$,

所以在$x$轴的投影为$a_1=13$,

在$y$轴上的分量为$7\vec{j}$.

# 你学到了什么

- 空间直角坐标系
- 向量的概念
- 向量的线性运算
- 向量在轴上的投影
- 线性运算的几何意义
- 向量的模与方向余弦