



## 2.5 矩阵的秩

主要内容:

矩阵秩的概念

矩阵秩的计算

矩阵的标准形（分解）

三个证明例子

## 矩阵秩的概念

**定义** 矩阵 $A$ 中非零子式的最高阶数 $r$ , 称为 $A$ 的秩, 记为 $R(A) = r$ .

显然对任意矩阵 $A$ ,  $A$ 的秩唯一, 但其最高阶非零子式一般不唯一.

## 矩阵的秩的另一种理解：

设在矩阵  $A$  中有一个不等于  $0$  的  $k$  阶子式  $D$ ，且所有  $r+1$  阶子式（如果存在的话）全等于  $0$ ，那末  $D$  称为矩阵  $A$  的最高阶非零子式，数  $r$  称为矩阵  $A$  的秩.



# 矩阵秩的概念

例1. 求矩阵的秩:

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; (2) B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; (3) C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

解. (1)、(2) 易

(3):  $C$ 中所有3阶子式全为零,  
可得  $R(A) = 2$ .

为什么 ?

思考:

若  $R(A) = r$ ,  $A$ 的所有  $r$ 阶子式不为零 ?  
所有  $r - 1$ 阶子式不为零 ?



# 矩阵秩的概念

## 基本结论与性质：

1.  $R(A)=0 \Leftrightarrow A=O$ ;
2.  $R(A) \geq r \Leftrightarrow A$ 有一个 $r$ 阶子式不为零;
3.  $R(A) \leq r \Leftrightarrow A$ 的所有 $r+1$ 阶子式全为零。
4.  $R(kA) = \begin{cases} 0, & k=0, \\ R(A), & k \neq 0. \end{cases}$
5. 设 $A$ 为 $m \times n$ 阶矩阵, 则 $0 \leq R(A) \leq \min(m, n)$ ;
6. 对任意矩阵 $A$ ,  $R(A^T) = R(A)$ ;
7.  $n$ 阶矩阵 $A$ 可逆  $\Leftrightarrow R(A) = n$ .

**(满秩矩阵—可逆矩阵**

**降秩矩阵—不可逆矩阵)**

**例2** 求下列矩阵的秩:  $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

解: 有三阶子式  $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$

所有四阶子式全为零, 所以  $R(A) = 3$ .

对于行阶梯形矩阵  $A$ ,  $R(A) = A$  的非零行的行数

**定理1** 初等变换不改变矩阵的秩。

**例3** 求矩阵的秩:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

**解**

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以  $R(A) = 2$ .

$R(A) = r \Leftrightarrow$  经行初等变换能将 $A$ 化为具有 $r$ 个非零行的行阶梯形矩阵.

例4

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

求矩阵 $A$ 及矩阵 $B = (A|b)$ 的秩.



# 矩阵的计算

解：分析：设  $B$  的行阶梯形矩阵为  $\tilde{B} = (\tilde{A}, \tilde{b})$ ，  
则  $\tilde{A}$  就是  $A$  的行阶梯形矩阵，  
故从  $\tilde{B} = (\tilde{A}, \tilde{b})$  中可同时看出  $R(A)$  及  $R(B)$ 。

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_2 - 2r_1 \\ r_3 + 2r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_2 \div 2 \\ r_3 - r_2 \\ r_4 + 3r_2 \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} r_3 \div 5 \\ r_4 - r_3 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore R(A) = 2, \quad R(B) = 3.$$

**推论** 对任意矩阵A,

$$R(PA) = R(AQ) = R(PAQ) = R(A),$$

其中P, Q分别为可逆矩阵.

**证** 因为Q可逆, 存在初等矩阵 $E_1, \dots, E_t$ 使得

$$Q = E_1 \cdots E_t,$$

$$AQ = A E_1 \cdots E_t,$$

即AQ为A经列初等变换所得. 故 $R(AQ) = R(A)$ .

同理可证其他.

定理2 对任意矩阵 $A_{m \times n}$ ,都存在可逆矩阵 $P_{m \times m}, Q_{n \times n}$ 使得

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n} Q, \quad R(A) = r$$

其中 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ 称为 $A$ 的标准形. 即任何矩阵都等价于其标准形.

即, 存在可逆矩阵 $K, S$ 使得  $KAS = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$ ,  $R(A) = r$



# 矩阵的标准形 (分解)

(问: 矩阵等价的充要条件是什么?)

( $A$ 与 $B$ 等价 $\Leftrightarrow$ 存在可逆的 $P, Q$ 使得 $A=PBQ$ )

**证.**  $A \xrightarrow{\text{行初等变换}} \text{简化行阶梯形} \xrightarrow{\text{列交换}} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

$r = R(A)$ . (为什么?)

存在初等矩阵 $E_1, \dots, E_k; F_1, \dots, F_s$ 使得

$$(E_k \cdots E_1)A(F_1 \cdots F_s) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$



# 矩阵的标准形（分解）

存在可逆矩阵  $K = E_1, \dots, E_k; S = F_1, \dots, F_s$  使得

$$KAS = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

**推论** 同型矩阵A与B等价的充要条件是  $R(A) = R(B)$ .

**例5** 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{求} A \text{ 的标准形.}$$



# 矩阵的标准形（分解）

解：

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(A) = 2.$$

$$\text{则 } A \text{ 的标准形为 } \begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**例6** 设 $A$ 为 $n$ 阶矩阵( $n \geq 2$ ), 证明  $R(A^*) = \begin{cases} n, & R(A) = n, \\ 0, & R(A) < n - 1. \end{cases}$

**证** ①若 $R(A) = n$ :

$$\det A \neq 0, \quad AA^* = (\det A)I,$$

$$|A| |A^*| = |(\det A)I| = |A|^n \neq 0,$$

所以  $|A^*| \neq 0$ , 即  $R(A^*) = n$ .

②  $R(A) < n-1$ :  $A$ 中所有 $n-1$ 阶子式均为零,

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = O, \quad R(A^*) = 0.$$

# 三个证明例子

## 例7 证明

$$R\left(\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\right) = R(A) + R(B).$$

**证** 设  $R(A) = r_1$ ,  $R(B) = r_2$ . 存在可逆矩阵  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  使得

$$A = P_1 \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_1, \quad B = P_2 \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_2,$$

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_1 & O \\ O & P_2 \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_2 \end{pmatrix}$$

# 三个证明例子

$$= \begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix} & O \\ O & \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix}$$

可逆矩阵，  
为什么？

所以，秩  $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \text{秩} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix} & O \\ O & \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{pmatrix} = r_1 + r_2.$

**例8** 设  $A$  为任一实矩阵,  $R(A^T A)$  与  $R(A)$  是否相等?

**证** 因为对于任一实向量  $x \neq 0$ ,

当  $Ax = 0$  时, 必有  $A^T Ax = 0$ ,

反之当  $A^T Ax = 0$  时, 有  $x^T A^T Ax = 0$

即  $(Ax)^T (Ax) = 0 \Rightarrow Ax = 0$ ;

由此可知  $Ax = 0$  与  $A^T Ax = 0$  同解,

故  $R(A^T A) = R(A)$ .

Tip: 根据第四章齐次线性方程组基础解系性质



矩阵秩的概念

矩阵秩的计算

矩阵的标准形

三个证明例子