2.4 克拉默法则

主要内容：

逆矩阵的一个简明表达式

克拉默法则

一. 逆矩阵的一个简明表达式

引理1. 设$A=(a_{ij})_{n,n}$，则

$$a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}\det A, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

证.

$$\text{设} i\neq j:\ a_{i1}A_{j1}+\cdots a_{in}A_{jn}=\begin{array}{c}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ i\text{行}\\ \\ j\text{行}\\ \\ \\ \end{array}=0$$

Tip: 原来第j行元素换为第i行的元素

逆矩阵的一个简明表达式

引理2 设A为n阶矩阵，则 $AA^* = A^*A = (\det A)I$

其中：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} (A\text{的伴随矩阵})$$

证.

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

逆矩阵的一个简明表达式

??

$$= \operatorname{diag}(\det A, \det A, \dots, \det A) = (\det A)I$$

定理1 方阵A可逆的充要条件为$|A|\neq 0$。当A可逆时，

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{*}.}$$

证. A可逆的充要条件为$|A|\neq 0$。（前面已证）

当A可逆时， $|A|\neq 0$：

逆矩阵的一个简明表达式

$$AA^* = (\det A)I,$$

$$A\left(\frac{1}{\det A}A^*\right) = I,$$

所以

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^*.$$

逆矩阵的一个简明表达式

例1. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 7\\ 2 & 4 & -3\\ -3 & 7 & 2\end{pmatrix}$是否可逆？若可逆则求$A^{-1}$.

解: $\det \boldsymbol{A}=196\neq 0$, 所以$\boldsymbol{A}$可逆。

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{*}=\frac{1}{196}\begin{pmatrix}29 & 55 & -19\\ 5 & 23 & 17\\ 26 & 2 & 10\end{pmatrix}$$

例2. 设 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，求$(A^*)^{-1}$.

解： $AA^*=(\det A)I$，A^{-1}存在，所以$\det A\neq 0$，

$$\left(\frac{1}{\det A}A\right)A^*=I,\quad (A^*)^{-1}=\frac{1}{\det A}A.\quad \frac{1}{\det A}=\det A^{-1}=2.$$

$$A=(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{\det A^{-1}}(A^{-1})^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

逆矩阵的一个简明表达式

$$(A^*)^{-1} = \frac{1}{\det A} A = 2A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

克拉默法则

已有定理： 方阵A可逆的充要条件为$AX=b$有唯一解.

克拉默法则 设A可逆，则$AX=b$的唯一解为：

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \ (j = 1, \ldots, n)$$

$\mathbf{det}A_j$是用b代替$\mathbf{det}A$中的第j列得到的行列式.

说明：

$$
\left|A_j\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}
$$

$$
= b_1 A_{j1} + b_2 A_{j2} + \cdots + b_n A_{jn} \ .
$$

证. 解的唯一性（显然）

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=A^{-1}b=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\ A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}\det A_1\\ \vdots\\ \det A_n\end{pmatrix}$$

为什么？

例3 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + a x_2 + a^2 x_3 = 1 \\ x_1 + b x_2 + b^2 x_3 = 1 \end{cases}$

解：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = (b-a)(b-1)(a-1)$$

若 $b \neq a$，$b \neq 1$，$a \neq 1$，则 $|A| \neq 0$.

$$|A_1| = |A|,$$

克拉默法则

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & b^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 1, \quad x_2 = x_3 = 0.$$

克拉默法则

例4 求一个二次多项式 $f(x)$，使

$$f(1)=0,\quad f(2)=3,\quad f(-3)=28.$$

解 设所求的二次多项式为

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

得一个关于未知数 a,b,c 的线性方程组，

$$f(1)=a+b+c=0,$$

$$f(2)=4a+2b+c=3,$$

$$f(-3)=9a-3b+c=28,$$

克拉默法则

又 $D=-20\neq 0,\ D_1=-40, D_2=60, D_3=-20.$

得 $a=D_1/D=2,\ b=D_2/D=-3,\ c=D_3/D=1$

故所求多项式为

$$f(x)=2x^2-3x+1.$$

注意： 解方程组一般不用Gramer法则，计算量非常大，不具有实际计算意义，主要是理论上的意义（如，给出了解的表达式）。

学到了什么？

逆矩阵的一个简明表达式

克拉默法则