



1.3 逆矩阵

主要内容:

逆矩阵的概念与性质

用行初等变换求逆矩阵

一. 逆矩阵的概念与性质

? : 矩阵A
 $A(?) = I$

数 $a \neq 0$: $a a^{-1} = a^{-1} a = 1$

定义: 设A为n阶矩阵, 若存在n阶矩阵B, 使得
 $AB = BA = I$,
则称A为可逆矩阵, B为A的逆矩阵, 记为 $A^{-1} = B$.

若A可逆, 则 A^{-1} 存在, 且 $A A^{-1} = A^{-1} A = I$.

一. 逆矩阵的概念与性质

1. 单位阵 I : $I^{-1} = I$

2. 对角阵:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}, (d_1, \dots, d_n \neq 0) ; \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$$

$$(kI)^{-1} = \frac{1}{k} I, (k \neq 0)$$



一. 逆矩阵的概念与性质

定理1: 设 A 可逆, 则它的逆是唯一的.

证: 设有 B 和 C 满足

$$AB = BA = I, \quad AC = CA = I.$$

$$\text{则 } B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

注意

若 A, B 均为方阵, 且 $AB = I$ (或 $BA = I$), 则 A 可逆且 $B = A^{-1}$.

应用:



一. 逆矩阵的概念与性质

性质： 设 A, B 均为 n 阶可逆矩阵，数 $\lambda \neq 0$ ，则

1. A^{-1} 可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. λA 可逆，且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$;
3. AB 可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$;
4. A^T 可逆，且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

证 3： $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1}A^{-1}) = AA^{-1} = I$

所以 AB 可逆，且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4： $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I$



一. 逆矩阵的概念与性质

例1. 设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2I = O$, 证明:

(1) A 和 $I - A$ 都可逆, 并求其逆矩阵;

(2) $A+I$ 和 $A-2I$ 不同时可逆.

证: (1): $A(A - I) = 2I$

$$A\left(\frac{1}{2}(A - I)\right) = I$$

所以 A 可逆, 且 $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I)$

$$\left(-\frac{1}{2}A\right)(I - A) = I$$

所以 $I - A$ 可逆, 且 $(I - A)^{-1} = -\frac{1}{2}A$

(2): $(A + I)(A - 2I) = A^2 - A - 2I = O$

所以, $A+I$ 和 $A-2I$ 不同时可逆.



一. 逆矩阵的概念与性质

例2 设 $B^2 = B$, $A = I + B$

证明: A 可逆且 $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$.

$$\begin{aligned} \text{证: } A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (3I - A) &= \frac{3}{2} A - \frac{1}{2} A^2 \\ &= \frac{3}{2} (I + B) - \frac{1}{2} (I + B)^2 \\ &= \frac{3}{2} I + \frac{3}{2} B - \frac{1}{2} (I^2 + 2B + B^2) \\ &= \frac{3}{2} I + \frac{3}{2} B - \frac{1}{2} I - B - \frac{1}{2} B^2 = I \\ \therefore A \text{ 可逆且 } A^{-1} &= \frac{1}{2} (3I - A). \end{aligned}$$

一. 逆矩阵的概念与性质

例3 矩阵 A 满足: $A^k = 0$,

(1) 证明: $I - A$ 可逆;

(2) 求: $(I - A)^{-1}$.

分析: $(I - A) \bullet ? = I$.

$$\begin{aligned} \text{解: } & (I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \\ &= (I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) + (-A - A^2 - \cdots - A^{k-1} - A^k) \\ &= I - A^k = I \end{aligned}$$

$$\therefore I - A \text{ 可逆且 } (I - A)^{-1} = I + A + \cdots + A^{k-1}.$$



一. 逆矩阵的概念与性质

例4. 设 A 可逆, 则

$$AX = b \text{ 有唯一解 } X = A^{-1}b$$

$$AX = 0 \text{ 只有零解 } X = 0$$

问题: 初等矩阵可逆吗? 其逆阵呢?

为什么?

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij}; \quad E_i^{-1}(c) = E_i\left(\frac{1}{c}\right), \quad c \neq 0; \quad E_{ij}^{-1}(c) = E_{ij}(-c).$$



一. 逆矩阵的概念与性质

定理： 设 A 为 n 阶矩阵，则下列各命题等价：

1. A 是可逆的；
2. $AX = 0$ 只有零解；
3. A 与 I 行等价；
4. A 可表为有限个初等矩阵的乘积.

证：1 \rightarrow 2：显然（为什么？）

2 \rightarrow 3： $A \xrightarrow{\text{行初等变换}} B$ （行阶梯形矩阵）

$BX = 0$ 只有零解.

B 的对角元均非零。（否则 B 的最后一行元素全为0，
则 $BX=0$ 有非零解，矛盾！）

则， $B \xrightarrow{\text{行初等变换}} B$ 的行简化阶梯形 $= I$



一. 逆矩阵的概念与性质

3→4: 由条件, A 可经行初等变换得 I .

存在初等矩阵 E_1, \dots, E_k , 使得 $E_k \cdots E_1 A = I$

$$A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} I = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$$

4→1: 显然 (为什么?)

推论: 设 A 为 n 阶矩阵, 则 $AX = b$ 有唯一解的充要条件是 A 可逆.

证 充分性: $AX = b$ 有唯一解 $X = A^{-1}b$

必要性: 设 $AX = b$ 有唯一解 X , 但 A 不可逆.

A 不可逆 $\Rightarrow AX = 0$ 有非零解 Z .

令 $Y = X + Z$, 则 Y 为 $AX = b$ 的解, 矛盾.



二. 用行初等变换求逆矩阵

求逆矩阵的简便方法

设 A 可逆,所以存在初等矩阵 E_1, \dots, E_k , 使得

$$E_k E_{k-1} \cdots E_1 A = I$$

$$A^{-1} = E_k E_{k-1} \cdots E_1 = E_k E_{k-1} \cdots E_1 I$$

方法

$$(A, I) \xrightarrow{\text{行初等变换}} (I, A^{-1})$$



二. 用行初等变换求逆矩阵

例5. 求A的逆矩阵: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

解

$$\begin{aligned} (A, I) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & | & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



二. 用行初等变换求逆矩阵

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -\frac{11}{4} & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{array} \right),$$

$$\text{所以, } A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$



二. 用行初等变换求逆矩阵

例6. 求 A 的逆矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

解

$$(A, I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

A 不可逆

为什么？



二. 用行初等变换求逆矩阵

例7 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

计算: (1) $(A + 2I)^{-1}(A^2 - 4I)$, (2) $(A + 2I)^{-1}(A - 2I)$.

解: $(A + 2I)^{-1}(A^2 - 4I) = (A + 2I)^{-1}(A + 2I)(A - 2I)$
 $= A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$



二. 用行初等变换求逆矩阵

$$(2) (A+2I)^{-1}(A-2I)=?$$

$$(A+2I \vdots I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+2I)^{-1}(A-2I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

二. 用行初等变换求逆矩阵

例8 解矩阵方程 : (1) $AX = B$, (2) $XA = B$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

解 : (1) $A^{-1}AX = X = A^{-1}B$.

$$(A \ I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

二. 用行初等变换求逆矩阵

$$\rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 1 & -4 & -7 \\ -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \quad XA = B, \quad XAA^{-1} = BA^{-1},$$

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$



二. 用行初等变换求逆矩阵

解矩阵方程的其他情况：

(1) $AXB = C$, 且 A 与 B 可逆, 则

$$A^{-1}AXB^{-1} = A^{-1}CB^{-1}, \quad X = A^{-1}CB^{-1}.$$

(2) $AX + B = C$, 且 A 可逆, 则

$$AX = C - B, \quad X = A^{-1}(C - B).$$

(3) 如果 A 不可逆, 怎样求解矩阵方程：

$$AX = B?$$

设 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$, 由 $AX = B$ 建立 3 个

线性方程组求解.

二. 用行初等变换求逆矩阵

例9 求 A 的逆矩阵 A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & a_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & a_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \prod_{i=1}^n a_i \neq 0.$$

解:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & a_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & a_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & a_{n-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ a_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$



二. 用行初等变换求逆矩阵

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & a_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & a_2 & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & a_{n-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$



二. 用行初等变换求逆矩阵

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \cdots$$



二. 用行初等变换求逆矩阵

例10 设三阶矩阵 A, B 满足关系:

$$A^{-1}BA = 6A + BA, \text{ 且 } A = \begin{pmatrix} 1/2 & \mathbf{0} & \\ & 1/4 & \\ \mathbf{0} & & 1/7 \end{pmatrix} \text{ 求 } B.$$

解 $A^{-1}BA - BA = 6A$

$$\Rightarrow (A^{-1} - E)BA = 6A \Rightarrow (A^{-1} - I)B = 6I$$

$$\Rightarrow B = 6(A^{-1} - I)^{-1}.$$



二. 用行初等变换求逆矩阵

$$\begin{aligned} B &= 6(A^{-1} - I)^{-1} \\ &= 6 \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} = 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



逆矩阵的概念与性质

用行初等变换求逆矩阵