中国科学院数学与系统科学研究院
Academy of Mathematics and Systems Science
Chinese Academy of Sciences

第二章 概率论基础

洪永淼
中国科学院数学与系统科学研究院
中国科学院大学经济与管理学院

目　录

定义 2.1: 随机试验 (Random Experiment)

- 如果一项试验能够在**相同条件**下**重复**进行，并且该试验至少有两种可能的结果，但在每一次试验前无法确定哪个结果会实现，则称之为**随机试验**。
- 换言之，随机试验是无法确切预知结果的一种机制。

此处“试验”表示一般意义上的观察或测度的过程，而未必是类似于物理学等自然科学中真正实施的实验。

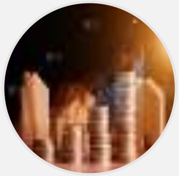
- 任何随机试验均有以下**两个要素**：
  - ✓ 所有可能结果的集合；
  - ✓ 每个结果发生的可能性。
- **现代经济学一个主要目的**是研究不确定市场条件下稀缺资源的有效配置问题。经济主体在决策时通常无法确定其行为所产生的后果。这种经济行为结果的不确定性在某种程度上与随机试验相似。

- 正如第一章所述，现代经济统计分析建立在以下**两个基本公理**上：

> ➢ 经济系统可视为服从某个概率法则的随机试验。
>
> ➢ 任何经济现象 (常以数据形式测度) 都可视为上述随机试验的一个结果。随机试验常被称为“**数据生成过程**”。

- 在现代统计学中，**数理统计分析的主要目的**是为人们所关心的随机试验提供数学概率模型以及推断方法。
- 就计量经济学而言，**计量分析的主要目的**是用经济观测数据推断经济系统所服从的概率法则，进而运用该概率法则。

解释经验典型特征事实



检验经济理论/经济假说

预测未来变化趋势

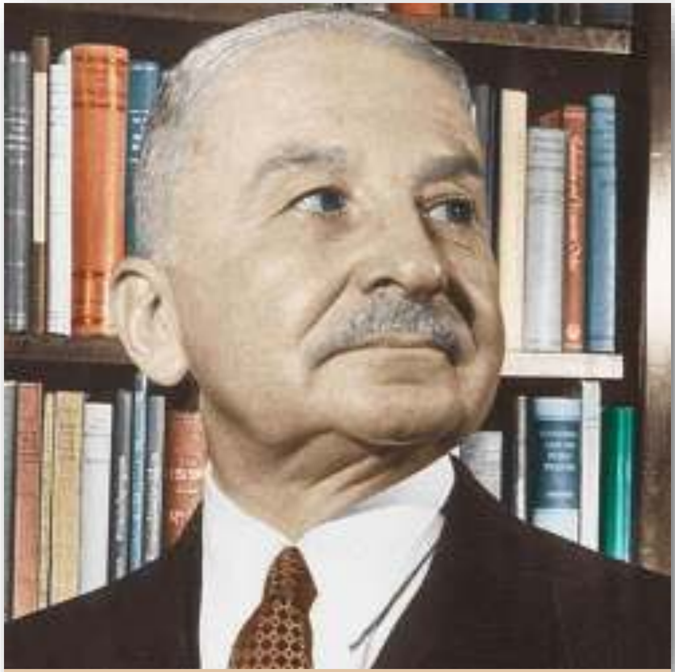
政策评估与分析

目　录

定义 2.2: 样本空间 (Sample Space)

- 随机试验可能产生的结果称为“**基本结果**”(basic outcomes)。所有基本结果的集合构成随机实验的“**样本空间**”(sample space)，用 S 表示。
- 实施一次试验仅会得到样本空间中的一个（且仅一个）结果。若进行多次试验，则可能出现不同的结果或者某些结果可能重复出现。

- 样本空间 S 也常称为**结果空间** (outcome space)。
- S 的每个结果称为 S 的一个**元素** (element) 或一个**样本点** (sample point)。



Ludwig von Mises

澳大利亚数学家和工程师路德维希·冯·密塞斯 (Ludwig von Mises) 1931年**首次**提出样本空间的概念。

例2.1: [抛一枚硬币]

样本空间: {正面朝上H, 反面朝上T}

例2.2: [掷骰子]

样本空间: {1, 2, 3, 4, 5, 6}

例2.3: [抛两枚硬币]

样本空间：{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)}

样本空间可数

例 2.4: [经济周期拐点]

- 若中国国内生产总值 (GDP) 的增长率为正时令变量 $Y=1$，反之则令变量 $Y=0$ 。
- 据此，可用指标变量 Y 的信息考察中国经济运行的拐点。

例 2.5：地区气温

- 假设 t_0 为某地区的最低气温， t_1 为该地区最高气温。令 t 表示该地区可能的气温值，则 t 的样本空间为

$$S = \{t \in \mathbb{R}: t_0 \leq t \leq t_1\}$$

样本空间不可数

其中 $\mathbb{R}$ 表示实数集。

定义 2.3: 事件 (Event)

- 事件 A 是样本空间 S 中具有某些共同特征或服从某些共同约束条件的基本结果所组成的集合。
- 若随机试验导致构成事件 A 的一个（且仅一个）基本结果发生，则称**事件 A 发生**。换言之，若事件 A 的任何一个基本结果发生，则称事件 A 发生。

数学上，一个事件等同于一个集合。因此，“集合”与“事件”两个概念可以互换。

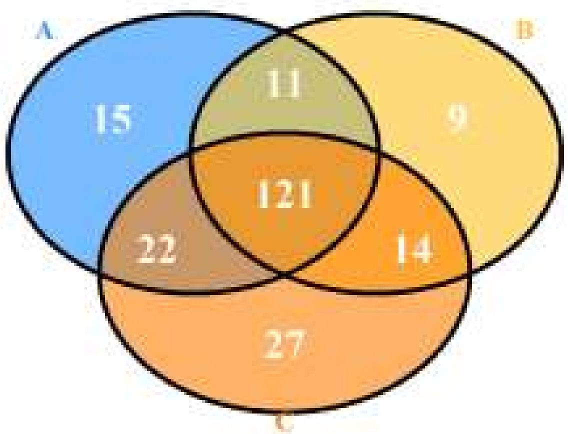
例 2.6 [掷骰子]

- 定义
  - ✓ 事件 A 为“掷骰子的结果是偶数”，则 $A = \{2, 4, 6\}$;
  - ✓ 事件 B 为“掷骰子的结果大于等于 4”，则 $B = \{4, 5, 6\}$。
- 显然，样本空间、基本结果和事件三者之间的关系如下：

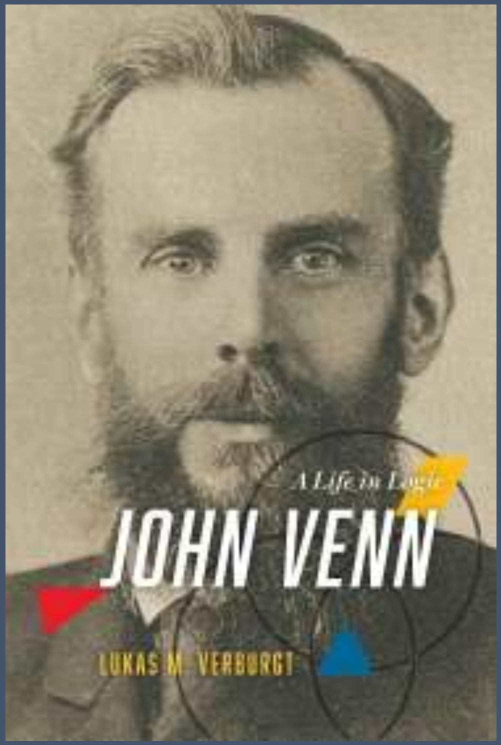
基本结果 $\subseteq$ 事件 $\subseteq$ 样本空间

目　录

- 维恩图 (Venn Diagram): 可用于表示样本点、样本空间、事件或相关概念。



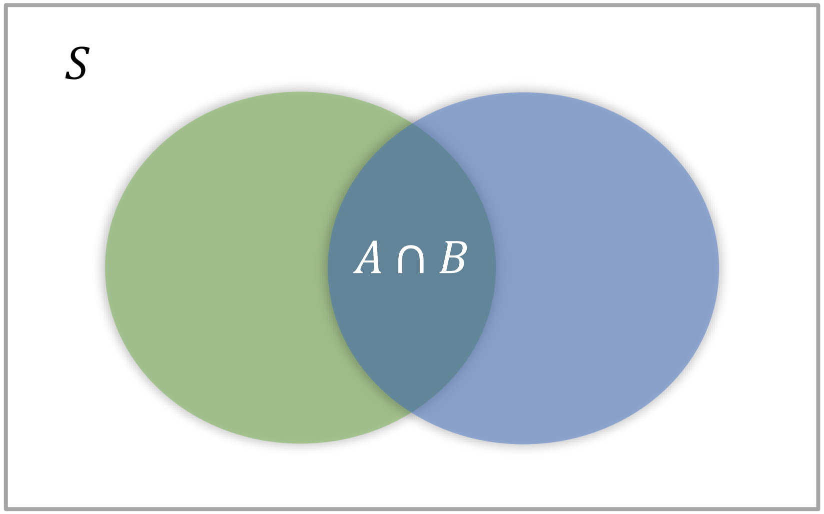
- 维恩图在数学上常用以表示集合之间的关系。



John Venn 在其1881年出版的《符号逻辑》一书中首次提出维恩图

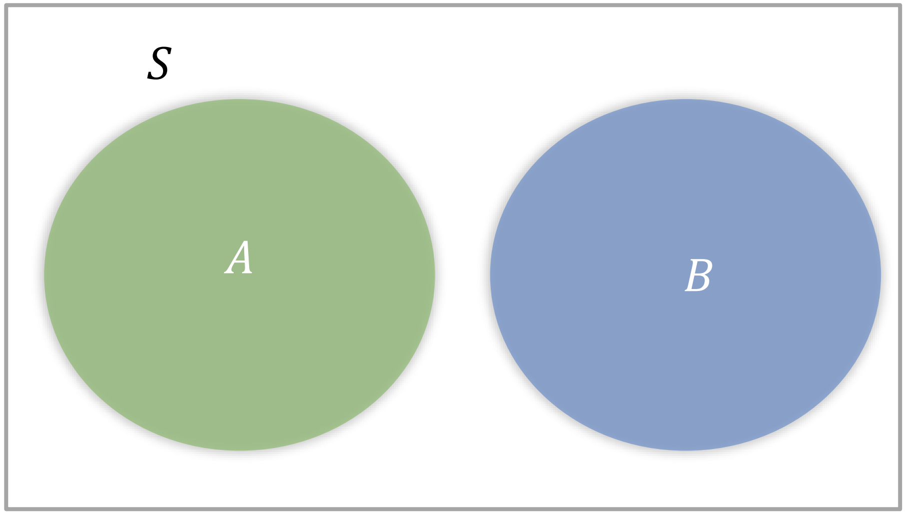
定义 2.4: 交集 (Intersection)

- A 和 B 的交集，记为 $A \cap B$，指样本空间 S 中同时属于 A 和 B 的所有基本结果的集合。
- 当且仅当事件 A 和 B 同时发生时，二者的交集才会发生。



定义 2.5: 互斥 (Exclusiveness)

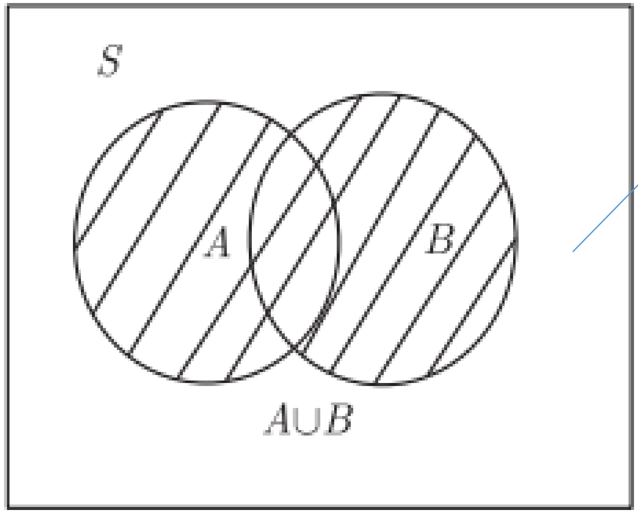
- 若 A 和 B 不存在共同的基本结果，则称为互斥事件。此时交集为空集 $\emptyset$，即 $A \cap B = \emptyset$，其中 $\emptyset$ 表示内部为空的集合。
- 一般认为空集 $\emptyset$ 是任何集合的子集。



由于两个**互斥**事件在维恩图中没有重叠部分，也被称为**不相交**。

定义 2.6: 并集 (Union)

- A 和 B 的并集，记为 $A \cup B$，是样本空间 S 中属于 A 或 B 的所有基本结果的集合。
- 当且仅当 A 或 B (或二者兼有) 发生时，二者的并集才会发生。



(c) $A \cup B$

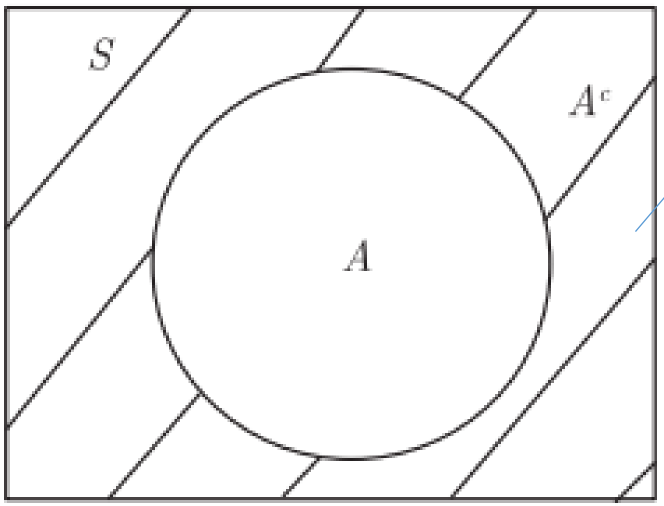
A 和 B 的**并集**也称为**逻辑和**

定义 2.7: 完全穷尽 (Collective Exhaustiveness)

- 假设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是样本空间 S 中的 n 个事件，其中 n 为任意正整数。
- 若 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$，则称这 n 个事件是完全穷尽的。

定义 2.8: 补集 (Complement)

- 子集 A 在样本空间 S 的补集是指所有属于 S 但不属于 A 的基本结果所构成的集合，记为 A^c 。

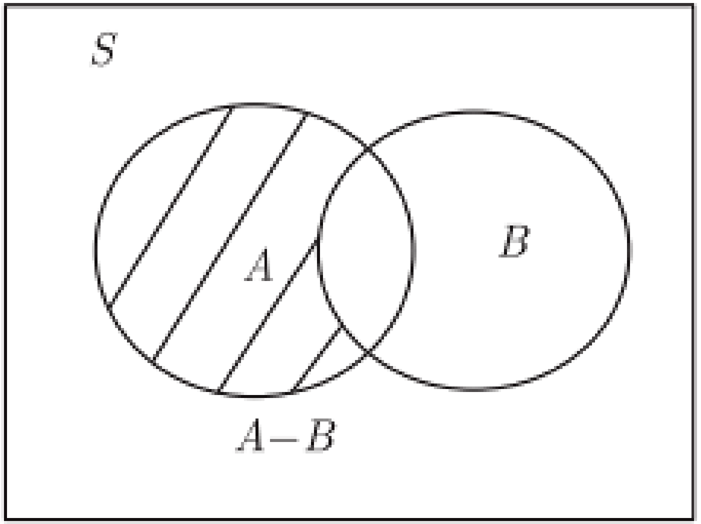


(d) A^c

事件 A 的**补集**也称为 A 的**反**

定义 2.9: 差 (Difference)

- A 和 B 的差是样本空间 S 中属于 A 而不属于 B 的基本结果所构成的集合，用 $A-B=A\cap B^c$ 表示。



(e) $A-B$

定理 2.1: 集合运算法则 (Laws of Sets Operations)

令 A, B, C 表示样本空间 S 的任何三个事件。则

[求补运算 (Complementation)]:

$$(A^c)^c = A$$

$$(\emptyset)^c = S$$

$$S^c = \emptyset$$

[交换律 (Commutativity of union and intersection)]:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

定理 2.1 (Cont.):

[结合律 (Associativity of union and intersection)]:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

[分配律 (Distributivity laws)]:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

一般地，对任意 $n \geq 1$，有

$$B \cap (\cup_{i=1}^{n} A_i) = \cup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$$

$$B \cup (\cap_{i=1}^{n} A_i) = \cap_{i=1}^{n} (B \cup A_i)$$

定理 2.1 (Cont.):

[德摩根律 (De Morgan's laws)]:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

一般地，对任意 $n \geq 1$，有

$$(\cup_{i=1}^{n} A_i)^c = \cap_{i=1}^{n} A_i^c$$

$$(\cap_{i=1}^{n} A_i)^c = \cup_{i=1}^{n} A_i^c$$

例 2.10

令 A 和 B 为样本空间 S 的两个事件。请回答下列问题并给出理由：

(1) $A \cap B$ 和 $A^c \cap B$ 是否互斥?

(2) $(A \cap B) \cup (A^c \cap B) = B$?

(3) A 和 $A^c \cap B$ 是否互斥?

(4) $A \cup (A^c \cap B) = A \cap B$?

例 2.11

令事件集 $\{A_i,\ i=1,\cdots,n\}$ 互斥且完全穷尽, 并令 A 是 S 的任何一个事件。

(1) $A_1\cap A,\cdots,A_n\cap A$ 是否互斥?

(2) $A_i\cap A$ 的并集是否等于 A？ 即是否有

$$\cup_{i=1}^{n}(A_i\cap A)=A?$$

- 完全穷尽且互斥的事件集构成了样本空间 S 的一个**分割**(partition)。
- 完全穷尽且互斥事件的集合可视为**正交基的完备集**，可表示样本空间 S 中的任意事件 A，而 $A_i \cap A$ 代表事件 A 在正交基 A_i 上的投影。

目　录

- 考虑对样本空间 S 中的事件 A 赋予一个概率，以描述该事件发生的可能性。
- 概率函数是从**事件到实数**的映射。若想对事件、事件的补集、并集和交集等赋予概率，就需要允许事件的集合包含事件的各种可能组合。
- 此种事件的集合称为样本空间 S 的子集的**西格玛域或 σ 域**(σ-field)，其构成概率函数的定义域。

定义 2.10：σ 代数 (σ Algebra)

σ 代数 $\mathbb{B}$ 是样本空间 S 中满足下列条件的子集 (即事件) 的集合：

(1) $\emptyset \in \mathbb{B}$ (即空集包含在 $\mathbb{B}$ 中);

(2) 若 $A \in \mathbb{B}$，则 $A^c \in \mathbb{B}$ (即 $\mathbb{B}$ 对于可数补集是封闭的);

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots \in \mathbb{B}$, 则 $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{B}$ (即 $\mathbb{B}$ 对可数并集运算封闭)。

- σ 代数也称 σ 域，是样本空间 S 中满足上述三个条件的所有事件的集合，也是对任意事件赋予概率的概率函数的定义域。
- σ 域是样本空间 S 中子集的集合，但本身并不是 S 的子集。
- 概率论中，事件空间就是 σ 域，而 $(S, \mathbb{B})$ 称为**可测空间**。

例 2.12

证明对任何样本空间 S, 集合 $\mathbb{B}=\{\emptyset,S\}$ 总为 σ 域。

- **证明**: 分别验证 σ 域的三个性质:

(1) $\emptyset\in\{\emptyset,S\}$, 故 $\emptyset\in\mathbb{B}$

(2) $\emptyset^c=S\in\mathbb{B}$ 且 $S^c=\emptyset\in\mathbb{B}$

(3) $\emptyset\cup S=S\in\mathbb{B}$

因此, 集合 $\mathbb{B}=\{\emptyset,S\}$ 总为 σ 域。

例 2.13

设有样本空间 $S=\{1,2,3\}$。证明包含以下 8 个子集 $\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$， $\{1,2\}$，$\{1,3\}$， $\{2,3\}$， $\{1,2,3\}$ 与 $\emptyset$ 的集合是 σ 域。

例 2.14

定义 $\mathbb{B}$ 为样本空间 S 中所有可能子集 (包括空集 $\emptyset$) 的集合。则 $\mathbb{B}$ 是否为 σ 域?

定义 2.11: 概率函数 (Probability Function)

假设一个随机试验有样本空间 S 和相关 σ 域 $\mathbb{B}$。概率函数 $P: \mathbb{B} \to [0,1]$ 定义为满足以下条件的映射:

(1) 对 $\mathbb{B}$ 中的任何事件 A 有 $0 \leq P(A) \leq 1$

表示“任何事件都可能发生”。

$P(A)=0$：事件不可能发生
$P(A)=1$：事件必然发生

(2) $P(S) = 1$

表示“进行任何一次随机试验时总有一个基本结果发生”。

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots \in \mathbb{B}$ 互斥, 则 $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

表明互斥事件“和 (即并集)”的概率等于各事件发生概率的和。

- 概率函数描绘了事件集 $\mathbb{B}$ 中所有事件发生的概率是如何分布的，因此也称为**概率分布**。
- 任何满足以上三个条件的函数 $P(\cdot)$ 都称为**概率函数**。
- 计量经济学家和统计学家的主要任务就是通过数理统计方法与经济观测数据，推断描述经济运行的概率函数。这一概率函数通常被称为**真实概率函数**（或真实概率分布模型）。

◆ 问题

如何解释事件的概率?

方法 1：相对频率解释 (Relative Frequency Interpretation)

- 将概率解释为**相同条件**下大量重复进行某一试验时同类事件发生的**相对频率**。
  - 当进行一次随机试验时，试验结果的实现值是样本空间 S 中的一个基本结果。将该试验在相同条件下重复多次，可得到多个不同的结果或者某些结果可能重复出现。
  - 某一结果的概率可被视为是在相同条件下进行大量独立重复试验时，该结果发生的“相对频率”的**极限**。

例：抛掷一枚硬币

- 重复 N 次试验，“正面”朝上出现 N_h次, 则“正面”朝上在 N 次试验中出现的比例是 N_h/N。当 $N \to \infty$ 时, 该比例 N_h/N 的变动很小。
- 若硬币质地均匀，在试验次数很大时该比例将无限接近 0.5。这一**相对频率**即为“正面”出现的概率。

- 相对频率的解释在相同条件下大量重复试验的假设前提下成立。在统计学中，这种假设常被称为“**独立同分布(independence and identical distribution, IID)**”。

例 2.15:

✓ 当气象局预测下雨的概率为 30% 时，这意味着在相同天气条件下有 30% 的概率下雨。不能确认在某一天是否下雨，但若气象预测准确且长期记录天气情况，会发现在相同天气条件下下雨天数的比例非常接近 30%。

方法 2：主观概率解释 (Subjective Probability Interpretation)

- 主观法（subjective method）：将概率视为某一事件发生的主观可能性。
  - 主观概率常用于考察难以估计或无法估计相对频率的事件。
    - ✓ 例如，由于相同的市场条件基本上不会重复出现，未来某一时期美国 S&P 500 价格指数上升的概率难以用频率解释给予合理的估算。

例: [理性期望概念 (Muth, 1961)]

- 理性期望概念假设经济主体的**主观期望**（如，经济主体主观概率分布的均值）与**数学期望**一致（如，客观概率分布的均值)。所谓期望，就是对随机结果的加权平均，其中权重为主观概率或客观概率。

Econometrica, Vol. 29, No. 3 (July 1961)

RATIONAL EXPECTATIONS AND THE THEORY OF PRICE MOVEMENTS[1]

By John F. Muth

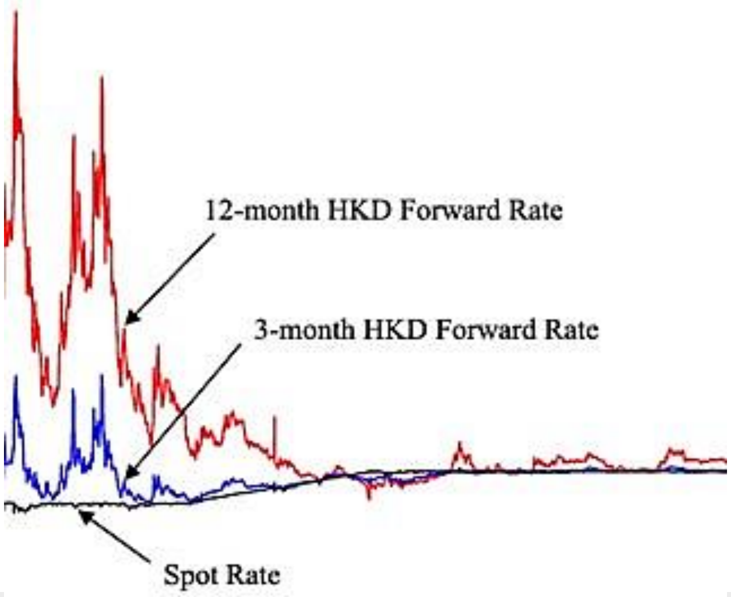
In order to explain fairly simply how expectations are formed, we advance the hypothesis that they are essentially the same as the predictions of the relevant economic theory. In particular, the hypothesis asserts that the economy generally does not waste information, and that expectations depend specifically on the structure of the entire system. Methods of analysis, which are appropriate under special conditions, are described in the context of an isolated market with a fixed production lag. The interpretative value of the hypothesis is illustrated by introducing commodity speculation into the system.

例 2.16 [美联储费城分行的专业预测调查]

- 美国中央银行 —— 美联储费城分行每个季度发布重要宏观经济指标的**专业预测调查**结果，如对 GDP 增长率、通胀率和失业率的预测。
- 美联储费城分行每季度都会对业内相关专业人士**发放调查问卷**，询问他们对这些重要宏观经济指标的概率分布的预测，例如预测通货膨胀率落在不同区间的概率。

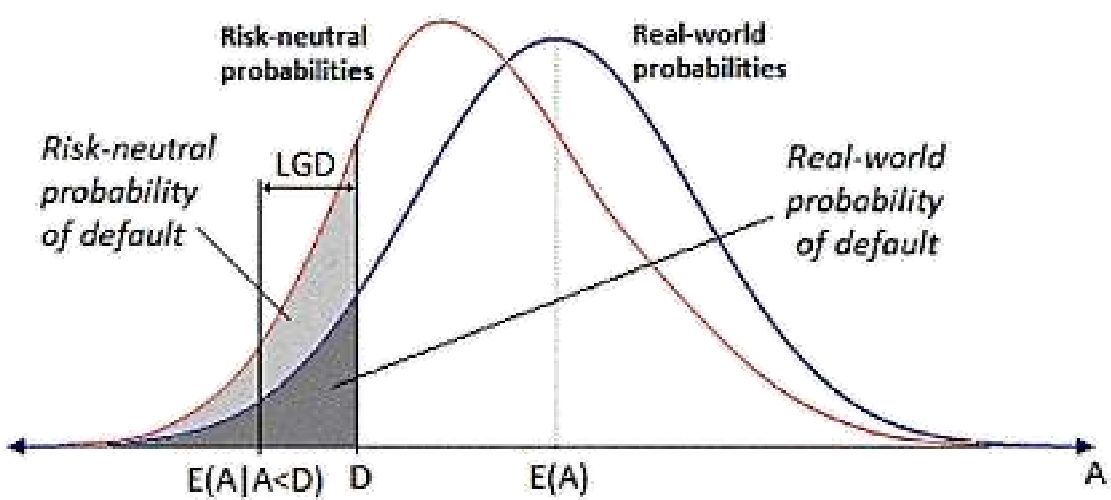
例 2.17 [风险中性概率]

- 在 1997-1998 年亚洲金融危机期间，许多投资者非常担忧港币盯住美元的所谓联系汇率制度的瓦解和港币的贬值。
- 换言之，在那个时期，投资者关于港币贬值的主观概率比港币贬值的客观概率要高。



例 2.17 (Cont.)：

在金融衍生产品定价理论中，前者称为**风险中性概率分布**，后者称为**客观或自然概率分布**。两个概率分布之间的差异反映了市场投资者的**风险态度**。风险中性概率分布是现代金融衍生产品定价的基本概念与基本工具。



定义 2.12: 概率空间 (Probability Space)

概率空间是一个三元组合 $(S, \mathbb{B}, P)$，其中:

- S 是随机试验的样本空间;
- $\mathbb{B}$ 是 S 的子集 (即事件) 构成的 σ 域;
- $P: \mathbb{B} \to [0,1]$ 是概率测度或概率函数。

一个概率空间 $(S,\mathbb{B},P)$ 完整描述了构筑样本空间 S 的**随机试验** (random experiment)。由于概率函数 $P(\cdot)$ 的定义域是 σ 域 $\mathbb{B}$ 或样本空间 S 的事件的集合，故 $P(\cdot)$ 也称为**集合函数** (set function)。

定理 2.2

若将空集记为 ∅，则有 $P(\emptyset) = 0$

- **证明：** 由于 $S = S \cup \emptyset$, 且 S 和 ∅ 互斥, 故

$$P(S) = P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset)$$

因此 $P(\emptyset) = 0$。

- **问题：** $P(A) = 0$ 是否意味着 $A = \emptyset$?

定理 2.3

$P(A) = 1 - P(A^c)$

- **证明：** 注意到 $S = A \cup A^c$, 则

$$P(S) = P(A \cup A^c)$$

因 $P(S) = 1$, 且 A 和 A^c 互斥, 有

$$1 = P(A) + P(A^c)$$

证毕。

事件 A 的概率与互补事件的概率之比称为胜算比（ratio of odds），即 $\frac{P(A)}{P(A^c)} = \frac{P(A)}{1-P(A)}$

定理 2.4

若 A 和 B 是 σ 域 $\mathbb{B}$ 中的两个事件, 且 $A \subseteq B$, 则 $P(A) \leq P(B)$。

- **证明:** 由于 $S = A \cup A^c$ ，根据分配律可得

$$\begin{aligned} B = S \cap B &= (A \cup A^c) \cap B \\ &= (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \\ &= A \cup (A^c \cap B) \quad [A \subseteq B，故 A \cap B = \mathrm{A}] \end{aligned}$$

因 A 和 $A^c \cap B$ 互斥, 则给定 $P(A^c \cap B) \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A) + P(A^c \cap B) \\ &\geq P(A) \end{aligned}$$

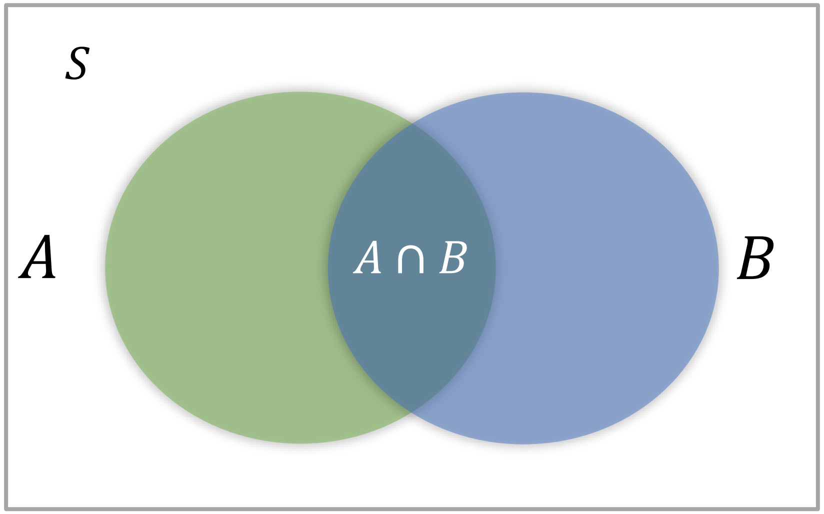
证毕。

定理 2.5

对 σ 域 $\mathbb{B}$ 中任意两个事件 A 和 B,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

- 由于事件的概率等于其在样本空间中所占据的面积，定理2.5可用维恩图表示，如下图所示



定理 2.6 [全概率公式 (Rule of Total Probability)]

若事件序列 $\{A_i \in \mathbb{B}, i = 1,2,\cdots\}$ 互斥且完全穷尽, 而 $A \in \mathbb{B}$ 是样本空间 S 的任意事件, 则

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap A_i)$$

- 全概率公式可用维恩图直观描述，假设只有 3 个事件。

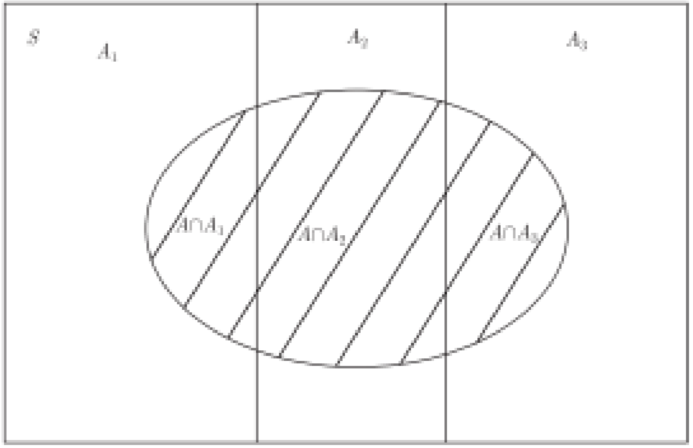


图 2.3：全概率公式的维恩图

例 2.22

- 若 A = {概率论与统计学课程成绩 > 90 分的学生}，A_i={来自国家 i 的学生}。
- 则 $A\cap A_i$={来自国家 i 且其概率论与统计学课程成绩 > 90 分的学生}。

定理 2.7

[次可加性 (Subadditivity)：布尔不等式 (Boole's Inequality)]

对任意事件序列 $\{A_i \in \mathbb{B}, i = 1,2,\cdots\}$, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

目　录

问题

如何计算事件 A 的概率?

- 假设事件 A 包含样本空间 S 中 k 个基本结果 $s_1,\cdots,s_k$, 则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{k} P(s_i)$$

- 若 S 共包含 n 个基本结果 $s_1,\cdots,s_n$, 且这些基本结果出现的概率相同, 则有

$$P(s_i)=\frac{1}{n},\ i=1,\cdots,n$$

CONTINUE

- 此外，假设事件 A 包含 k 个基本结果，则有

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

- 因此, 在 S 中每个基本结果具有相同概率的情况下, 事件 A 概率的计算可简化为分别计算事件 A 和样本空间 S 中基本结果的数目。

定理 2.8 [计数基本定理 (Fundamental Theorem of Counting)]

若随机试验包含 k 项不同任务, 其中第 i 项任务有 n_i 种实现方法, $i = 1, 2, \cdots, k$, 则整个工作有 $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k = \Pi_{i=1}^{k} n_i$ 种完成方式。

排列 (Permutation)

例 2.23

- 假设从 $\{A, B, C, D\}$ 这 4 个英文字母中选取 2 个字母并排序，每次排序时每个字母最多只能出现一次。
- 有多少种不同的排列方式呢?

■ **解：** 共计 12 种排列方式：

$$AB, BA, AC, CA, AD, DA, BC, CB, BD, DB, CD, DC$$

例 2.24

从 26 个英文字母中选 20 个字母并排序，每次排序时每个字母最多只能出现一次，共有多少种不同排列方法呢?

- **解：首先考察一般化问题：**
  - 假设有 x 个盒子排列成一行，并有 n 件不同物品，其中 $x \leq n$。将从 n 件物品中选 x 件分别装入 x 个盒子中。每件物品在每次排列中最多只用一次（不放回)。如此可得到多少不同的排列方式呢？即，从 n 件物品挑出 x 件分别装入到 x 个盒子中，共有多少种排列方式?

CONTINUE

- 第一，将物品装入第 1 个盒子有几种不同方法?

  ※ 因有 n 件不同物品可供选择，故有 n 种方法。

- 第二，假设已将一件物品装入第 1 个盒子，则剩下 $n-1$ 件物品且其中每一件都可装入第 2 个盒子。故有 $n-1$ 种方法装入第 2 个盒子。

  ※ 因此共有 $n(n-1)$ 种方法在前 2 个盒子中放置物品。

- 第三，假设已在前两个盒子中装入物品，则剩下 $n-2$ 种方法将物品装入第 3 个盒子。

  ※ 因此，共有 $n(n-1)(n-2)$ 种方法将物品装入前 3 个盒子。

……

CONTINUE

- 对最后一个盒子 (第 x 个盒子)，因已将 $x-1$ 件物品装入前 $x-1$ 个盒子，则剩余 $n-(x-1)$ 件物品，故有 $n-(x-1)$ 种方法将一件物品装入最后一个盒子。
- 综上, 从 n 件物品中按照不同次序选取 x 件所有可能的排列方式总数为

$$P_n^x = \frac{n!}{(n-x)!} = n(n-1)(n-2)\cdots[n-(x-1)]$$

- $k!$ 称为 k 的阶乘 (k factorial)，一般约定 $0! = 1$。

$$k! = k \times (k-1) \times (k-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

CONTINUE

- **因此**，用排列公式验证例 2.23 的结果，若 $n = 4, x = 2$，则

$$P_n^x = P_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

- 同样可计算出例 2.24 的结果，此时 $n = 26, x = 20$，则

$$P_n^x = \frac{26!}{(26-20)!} = \frac{26!}{6!}$$

例 2.25

- 某精品店共有 6 个销售代表，实行以下销售激励计划。
  - ✓ 当年业绩最好的销售代表将获得来年到夏威夷度假奖励，
  - ✓ 位列第二者将获得赴拉斯维加斯度假的机会。
  - ✓ 其他销售代表则必须参加概率论与数理统计学的学习。
- 总共有多少种不同的可能结果?

- **解：** 这里需要考虑顺序，因为谁到夏威夷，谁去拉斯维加斯，将产生不同的结果。

  因此，采用**排列**计算，其中 $n = 6, x = 2$，得

$$P_n^x = P_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = 30$$

例 2.26 [生日问题]

某班级共有 k 名学生， $2 \leq k \leq 365$。问至少有两名学生的生日在同一天的概率为多大？(不必同一年)。此外，还做**如下假设**：

- 班里没有双胞胎；
- 对于该班任何一个学生而言，一年 365 天中每一天是其生日的可能性相同；
- 2 月 29 日出生者的生日将视为 3 月 1 日。

■ 解：

➢ **首先**，全班 k 名学生生日的各种可能性共计多少？共有

$$365^k = \underbrace{365 \times 365 \times \cdots \times 365}_{k}$$

其中每名学生的生日有 365 种可能的选择。

➢ **其次**，令事件 A 代表至少两名学生生日相同，则其补集 A^c 即为全部 k 名学生的生日都不相同。

CONTINUE

- k 名学生的生日都不同的各种可能性共有多少种呢？从 365 天中选出 k 天，排列计算的结果为：$365!/(365-k)!$
- 则

$$P(A)=1-P(A^c)$$

$$=1-\frac{365!/(365-k)!}{365!}$$

- 对于不同的班级规模，至少两人生日相同的概率如下表：

k	**20**	**30**	**40**	**50**
$P(A)$	0.411	0.706	0.891	**0.970**

组合 (Combinations)

例 2.27

- 假设从 4 个英文字母 $\{A, B, C, D\}$ 中选 2 个字母，但不排序，每个字母在每种选择中最多只出现一次。换言之，每次选择两个不同的字母，但不管其顺序。
- 如此有多少种不同的选择方式呢?

■ 解： 共有 6 个包含 2 个不同字母的集合：

$$\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{B,C\},\{B,D\},\{C,D\}$$

◆ 问题

考虑从 n 种物品中选择 x 件，但并不管 x 件物品的排列顺序。这里，一件物品在每次选取中不能重复出现。如此共有多少选择 x 种物品的方式?

■ 考虑下列**基本公式**:

从 n 件物品中取 x 件并排序而获得的排列总数

= 从 n 件物品中选取 x 件物品但不排序而获得的组合总数

× 对 x 件物品排序的排列总数

CONTINUE

- **首先**, n 件物品中选取 x 件并将其按顺序排列可获得 $n!/(n-x)!$ 种有序序列。
- **其次**, 对于 x 件物品, 有 $x!$ 种不同的排列顺序。
- **因此**, 从 n 个物品中选取 x 个物品但不考虑排序的组合总数为

$$C_n^x = \binom{n}{x} = \frac{P_n^x}{x!} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

这个数目称为**组合数目**。

例 2.28

某人事主管有 8 名候选人填补 4 个空缺职位。8 名候选人中有 5 名男性，3 名女性。若候选人的任意组合有均等概率被选中，那么所有女性候选者都没有被雇用的概率有多大?

- **解：** 我们不关心谁在哪个具体职位上，故**不考虑顺序**问题。

  (1) 从 8 名候选人中选取 4 名的可能组合数为

$$C_8^4 = \frac{8!}{4!\,4!} = 70$$

CONTINUE

(2) 若所有女性候选人都没有被雇用，那么应聘成功的 4 人必然都来自 5 名男性候选人。从 5 名男性候选人中选出 4 人的可能组合数为

$$C_5^4 C_3^0 = \frac{5!}{4!\,1!} = 5$$

因此，女性候选人都没有被雇用的概率为

$$P(A) = \frac{C_5^4 C_3^0}{C_8^4} = \frac{1}{14}$$

例 2.32

美国参议院的参议员来自全美 50 个州，每个州有 2 名参议员。

(1) 若随机选取 8 名参议员组成一个委员会，那么该委员会至少有一名参议员来自纽约州的概率是多少?

(2) 若随机选取 50 名参议员组成一个委员会，那么每个州都有一位参议员入选的概率是多少?

■ 解 (1)

a) 有多少种方式组成 8 人委员会？共计 C_{100}^{8} 种。

b) 令 A 表示纽约州的 2 名参议员中至少有 1 人被选中这一事件，那么 A^c 则表示纽约州的参议员无人被选中。8 人委员会不包括纽约州参议员的组合方式有多少？共计 C_{98}^{8} 种。故 8 人委员会至少包括一名纽约州参议员的概率为

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^c) \\ &= 1 - \frac{C_{98}^{8}}{C_{100}^{8}} \end{aligned}$$

CONTINUE

解 (2)

a) 选取一个由 50 名参议员组成的委员会有多少种不同方式?

共计 C_{100}^{50} 种。

b) 若该委员会包括来自每个州的一名参议员，那么每个州都有 2 种可能的选择。因此, 从每个州选取 1 名参议员的方法总数为

$$2^{50}=\underbrace{2\times 2\times\cdots\times 2}_{50}$$

则有 50 名议员构成的委员会包括每个州的一名参议员的概率为

$$P(A)=\frac{2^{50}}{C_{100}^{50}}$$

例 2.34

假设独立抛掷 10 次一枚质地均匀的硬币。

(1) 恰好 3 次正面朝上的概率是多少?

(2) 最多 3 次正面朝上的概率是多少?

■ 解（1）

- 抛掷 10 次硬币共有多少种可能的结果？共可获得 2^{10} 种可能的结果。
- 恰好 3 次正面朝上的可能方式有多少种？因任意两次抛掷若都出现正面，则两个正面无法区分而不能排序，故采用**组合的计数**方法。因此，共有 $C_{10}^{3}=120$种不同的方法。
- 由此可得

$$P(3\text{ 次正面朝上 })=\frac{120}{2^{10}}\approx 0.1172$$

CONTINUE

■ 解 (2)

$$P(\text{至多 3 次正面朝上}) = P(\text{0 次正面朝上}) + P(\text{1 次正面朝上})$$

$$+P(\text{2 次正面朝上}) + P(\text{3 次正面朝上})$$

$$= \frac{176}{2^{10}} \approx 0.1719$$

例 2.36

若从 n 个元素中随机选取 r 个。对于下述各种情况，分别有多少种抽取方式?

(1) 有排序，不放回的随机抽样;

(2) 无排序，不放回的随机抽样;

(3) 有排序，放回的随机抽样;

(4) 无排序，放回的随机抽样。

■ 解:

(1) $P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$

(2) $C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

(3) n^r

(4) C_{r+n-1}^r

目 录

- 经济事件都是**相互关联**的。比如，经济事件之间可能存在因果关系。例:收入增加会导致消费增加。这些关联的存在，使得事件 B 的发生可能包含了事件 A 发生的信息。

- 因此，如果获得事件 B 的相关信息，就可更好地了解事件 A 发生的可能性。

定义 2.13 [条件概率 (Conditional Probability)]

- 令 A 和 B 为概率空间 $(S, \mathbb{B}, P)$ 中的两个事件。则给定事件 B, 事件 A 发生的条件概率 $P(A \mid B)$ 定义为

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

其中假设 $P(B) > 0$。

- 类似地，给定事件 A ，事件 B 发生的条件概率定义为

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

其中假设 $P(A) > 0$。

- 在维恩图中，条件概率 $P(A \mid B)$ 是事件 A 在事件 B 范围内所占据的面积与事件 B 的面积之比。所有事件发生的概率都是参照其与 B 的相对大小来计算，如下图所示。
- $(S \cap B, \mathbb{B} \cap B, P(\cdot \mid B))$ 构成了一个与条件概率函数 $P(A \mid B)$ 相联系的概率空间。其中，$P(A \mid B)$ 满足所有定义在样本空间 B 上的概率法则。

✓ 例如，有 $P(A^c \mid B) = 1 - P(A \mid B)$

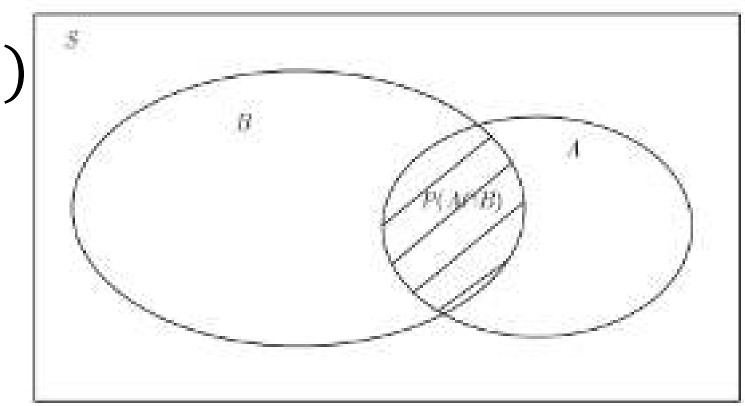


图 2.4：条件概率的维恩图

例 2.40

令 A 和 B 不相交且 $P(B) > 0$, 求 $P(A \mid B)$ 。

- 解: 已知 $P(A \cap B) = 0$, 有

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0$$

- 条件概率 $P(A \mid B)$ 描述了如何利用事件 B 的信息预测事件 A 的概率，即 A 和 B之间的**预测关系** (predictive relationship)。
- 然而，即使事件 B 的信息可用于预测事件 A，条件概率并不意味着存在从 B 到 A 的**因果关系** (causal relationship)。
- 为了刻画因果关系，需要用到概率论与统计学以外的经济理论。

引理 2.2 [乘法法则 (Multiplication Rules)]

(1) 若 $P(B) > 0$, 则 $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$;

(2) 若 $P(A) > 0$, 则 $P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A)$。

以上公式可用于计算事件 A 和 B 的联合概率 $P(A \cap B)$。

定理 2.9

假设 $\{A_i \in \mathbb{B}, i = 1, \cdots, n\}$ 是 n 个事件的序列。则这 n 个事件的联合概率为

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right)$$

按照惯例，常记 $P\left(A_1 \mid \bigcap_{j=1}^{0} A_j\right) = P(A_1)$。

例 2.42 [联合概率的计算]

对 $n=3$, 有

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3 \mid A_2 \cap A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_1)$$

- 事实上, 有 $n!$ 种不同的条件序列可表示联合概率 $P(\cap_{i=1}^{n} A_i)$, 上述定理只是其中一种。
- 但是，在**时间序列分析**中，若 i 表示时间，则事件 A_i 基于 $\cap_{j=1}^{i-1} A_j$ 的条件概率 $P\left(A_i \middle| \cap_{j=1}^{i-1} A_j\right)$ 有合乎逻辑的解释，即以 $i-1$ 期可获取的历史信息预测下一期事件 A_i 发生的概率。

定理 2.10 [全概率公式 (Rule of Total Probability)]

令 $\{A_i \in \mathbb{B}\}_{i=1}^{\infty}$ 为样本空间 S 的一个划分 (即互斥且完全穷尽), 满足 $P(A_i) > 0, i \geq 1$ 。则对 σ 域 $\mathbb{B}$ 中的任意事件 A, 有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \mid A_i) P(A_i)$$

- **证明:**

定理 2.6 已证

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap A_i)$$

根据乘法法则 $P(A \cap A_i) = P(A \mid A_i) P(A_i)$ 即可获得上述结果。

- 全概率公式表明，若事件 A 可被划分为一个互斥子事件的集合，则事件 A 的概率即等于 A 所包含的这些互斥子事件的**概率之和**。

目　录

定理 2.11 [贝叶斯定理 (Bayes' Theorem)]

假设两个事件 A 和 B 满足 $P(A) > 0, P(B) > 0$, 则

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c)}$$

当事件 B 发生后，事件 A 发生的先验概率也将随之修正。

- ✓ $P(A)$ 是在获得 B 的信息之前关于 A 的概率，称为 **“先验” 概率**。
- ✓ $P(A \mid B)$ 反映了获得事件 B 发生的相关信息后，对事件 A 发生概率的修正，称为 **“后验” 概率**。

定理 2.12 [贝叶斯定理的另一种表述]

假定 $A_1,\cdots,A_n$ 是样本空间 S 的 n 个互斥且完全穷尽事件，并且事件 B 满足 $P(B)>0$ 。则事件 A_i 基于 B 的条件概率是

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P\left(B \mid A_j\right)P\left(A_j\right)}, i=1,\cdots,n$$

- **证明：** 根据条件概率定义和乘法法则，有

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

由于 $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ 互斥且完全穷尽, 根据全概率公式, 有

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P\left(B \cap A_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P\left(B \mid A_j\right)P\left(A_j\right)$$

证毕。

例 2.45 [如何决定汽车保费？]

- 假设某汽车保险公司有三类客户——高、中和低风险客户。
  - ✓ 从该公司的客户历史数据来看，25%的客户属于高风险，25%属于中风险，50%属于低风险。
  - ✓ 同时，一年中客户至少一次因超速行驶被开罚单的比率分别是：高风险者 25%，中风险者 16%，低风险者 10%。
- 现假设某新客户想购买车险，并报告其今年已有一次超速行驶罚单。问该新客属于高风险客户的概率是多少？

- **解：** 由于客户的风险等级将影响到保费收取的额度，车险公司需要判断新客户是否属于高风险客户。定义事件

✓ H = {高风险客户},

✓ M = {中度风险客户},

✓ L = {低风险客户},

✓ B = {客户收到至少一次超速罚单}。

则

$$P(H) = 0.25,\ P(M) = 0.25,\ P(L) = 0.5$$

$$P(B \mid H) = 0.25,\ P(B \mid M) = 0.16,\ P(B \mid L) = 0.1$$

CONTINUE

根据贝叶斯定理，有

$$P(H \mid B) = \frac{P(B \mid H)P(H)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B \mid H)P(H)}{P(B \mid H)P(H) + P(B \mid M)P(M) + P(B \mid L)P(L)}$$

$$\approx 0.41$$

若新客户未曾报告超速罚单的信息，汽车保险公司基于其客户历史信息数据库只能获得对新客户的先验概率 $P(H) = 0.25$。

例 2.47 [股票分析师对投资者有帮助吗？]

- 数据显示，去年某股票交易所 25% 的股票表现良好，25% 表现较差，余下 50% 表现一般。
- 此外，表现良好的股票中有 40% 在去年年初被某分析师推荐购买，表现一般的股票中有 20% 被推荐购买，表现较差的股票中也有 10% 被推荐购买。
- 请问今年年初被该分析师推荐购买的某支股票在今年跑赢大市的概率有多大?

■ **解：** 定义事件:

- ✓ $B=\{$ 被分析师推荐购买的股票 $\}$
- ✓ $A_1=\{$ 某支股票收益好于市场平均水平 $\}$
- ✓ $A_2=\{$ 某支股票效益与市场平均水平一样 $\}$
- ✓ $A_3=\{$ 某支股票收益差于市场平均水平 $\}$

则

$$P(A_1)=0.25,\ P(A_2)=0.5,\ P(A_3)=0.25$$

$$P(B\mid A_1)=0.4,\ P(B\mid A_2)=0.2,\ P(B\mid A_3)=0.1$$

CONTINUE

根据贝叶斯定理, 有

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(B \mid A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

$$= \frac{0.4 \times 0.25}{0.4 \times 0.25 + 0.2 \times 0.50 + 0.1 \times 0.25}$$

$$\approx 0.444$$

- 若没有股票分析师的推荐，投资者基于股票市场历史数据仅能形成先验概率 $P(A_1) = 0.25$。
- 经分析师推荐 (即事件 B) 之后，投资者将概率修正为 $P(A_1 \mid B) \approx 0.444$。

目　录

定义 2.14 [独立性 (Independence)]

若事件 A 和 B 满足 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$，则称其为独立事件。

- 独立事件也常称为**统计**意义上的独立、**随机**意义上的独立或在**概率**意义上独立。在绝大多数不引起歧义的情形下，通常直接称之“独立”。
- 独立是一个概率概念，用于描述两事件之间**不存在任何关联**。

◆ 问题 2.4

独立性含义是什么?

- 假设 $P(B) > 0$。根据独立性的定义，有

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

由于事件 B 发生与否不会影响 A 发生的概率，所以 B 的信息无法帮助预测事件 A 发生的概率。

- 独立意味着 A 和 B **没有关联**, 即二者间不存在任何关系, 尤其不存在因果关系。

例 2.48

令 A = {厦门地区下雨}， B = {上证 180 价格指数上涨}。这两个事件应该是独立的。尽管厦门天气与上证 180 价格指数变动可能相互独立，但是一些实证证据表明，天气与股票收益相关，因为天气可能影响投资者的心情或情绪。

Good Day Sunshine: Stock Returns and the Weather

DAVID HIRSHLEIFER and TYLER SHUMWAY*

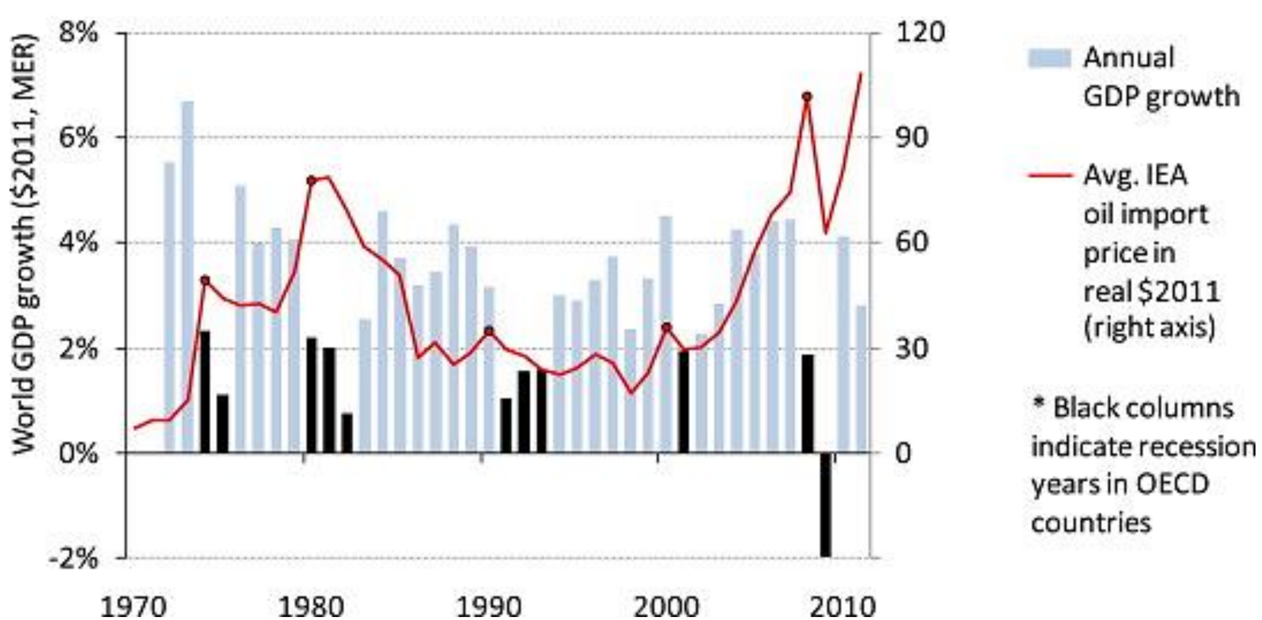
ABSTRACT

Psychological evidence and casual intuition predict that sunny weather is associated with upbeat mood. This paper examines the relationship between morning sunshine in the city of a country's leading stock exchange and daily market index returns across 26 countries from 1982 to 1997. Sunshine is strongly significantly correlated with stock returns. After controlling for sunshine, rain and snow are unrelated to returns. Substantial use of weather-based strategies was optimal for a trader with very low transactions costs. However, because these strategies involve frequent trades, fairly modest costs eliminate the gains. These findings are difficult to reconcile with fully rational price setting.

例 2.49

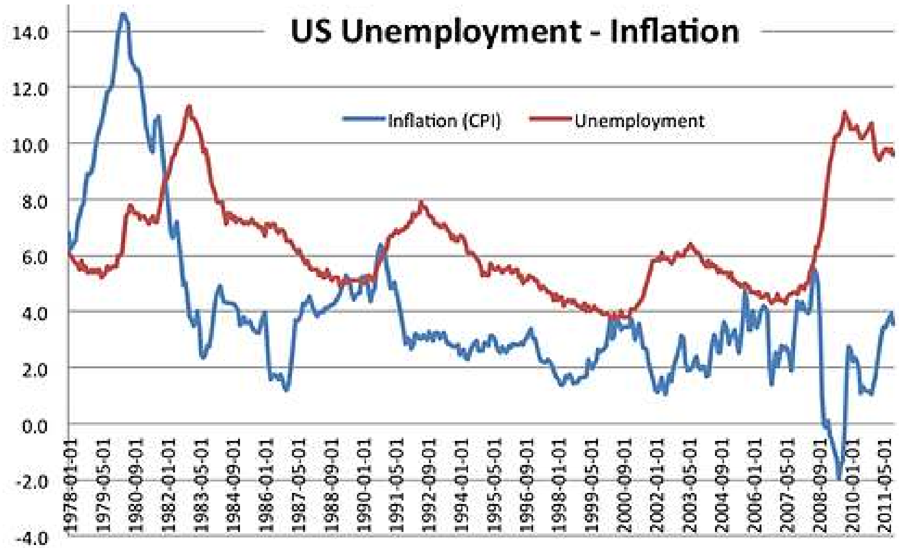
- 令 A = {油价上涨}， B = {产出的增速放缓}。
- 一般情况下，油价上涨导致生产成本增加，生产增速放缓。因此，这两个事件并不相互独立。

International crude oil prices and global GDP growth



例 2.50 [菲利普斯曲线 (Phillips Curve)]

- 令 A = {通胀率上升}， B = {失业率下降}。
- 一般情况下，经济扩张时，通胀率上升，失业率下降；经济不景气时，通胀率下降，失业率上升。
- 因此，这两个事件并不相互独立。



◆ 问题

为何独立性概念在经济学和金融学十分重要?

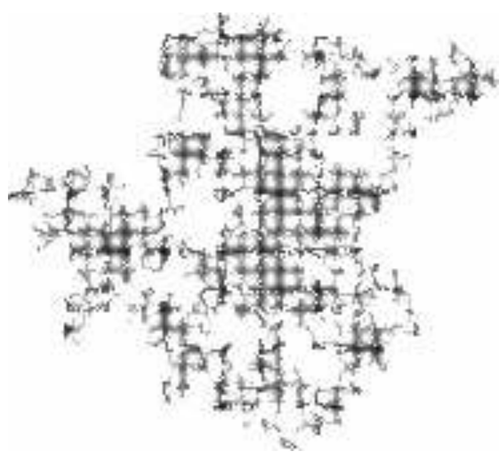
例 2.51 [随机游走假说 (Fama 1970)]

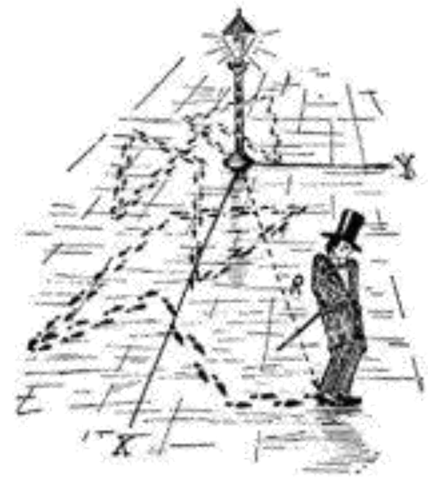
若第 t 期某股票价格 P_t 满足

$$P_t = P_{t-1} + X_t,$$

其中 $\{X_t\}$ 跨期独立，则称其服从随机游走。

此处 $X_t = P_t - P_{t-1}$ 是从第 $t-1$ 期到第 t 期的**股票价格变化**。





随机游走的醉汉

例 [几何随机游走假说]

- 若股票价格 $\{P_t\}$ 满足

$$\ln P_t = \ln P_{t-1} + X_t$$

其中 $\{X_t\}$ **跨期独立**, 则称其服从**几何随机游走**。此处股票对数收益率

$$\begin{aligned} X_t &= \ln(P_t/P_{t-1}) \\ &= \ln\left(1 + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}\right) \\ &\simeq \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \end{aligned}$$

- 因此，X_t 可解释为股票价格的**相对变化率**。

例 [几何随机游走假说]

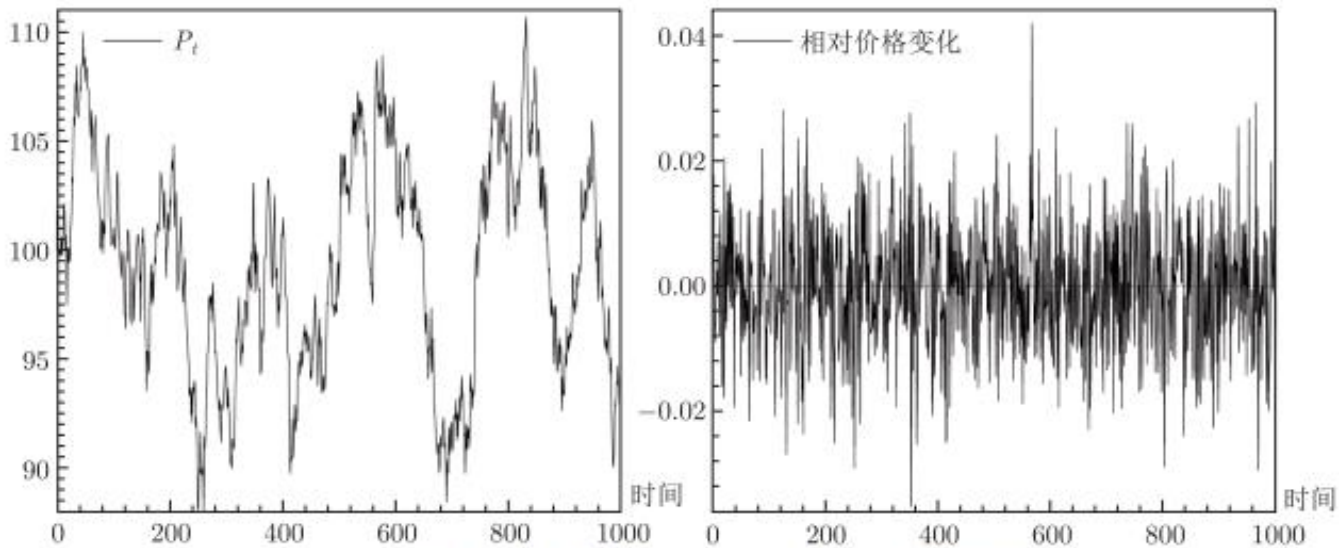


图 2.5：几何随机游走的价格观测值及其相对价格变化

- 随机游走假说**最重要的意义**在于：若 $\{X_t\}$ 在不同时期相互独立，则未来股票市场的价格变化 X_t 将与过去的股票价格变化无关，因而无法用股票价格的历史信息预测将来股票收益率。
- 这种情况下，股票市场被称为关于历史信息是**有效**的。

例 2.54

- 两个独立事件 A 和 B 可能互斥吗?
- 两个互斥事件 A 和 B 可能独立吗?

■ 解: 情形1

- 若 A 和 B 独立, 且 $P(A)>0, P(B)>0$, 则

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)>0$$

因此，若 A 和 B 独立，它们不可能互斥。

- 另一方面，若 A 和 B互斥（即 $P(A\cap B)=0$），则它们不可能独立。

CONTINUE

■ 解: 情形2

- 假设 $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$ 。
  - 若 A 和 B 是独立事件，则 $P(A\cap B)=\ P(A)P(B)=0$ 这意味着 A 和 B 互斥。
  - 另一方面，若 A 和 B 互斥，它们也是相互独立的。
- 当 $P(A)>0$ 和 $P(B)\ >0$ 时，独立事件不可能互斥。这意味着两个相互独立的事件包含有共同的基本结果，故可能同时发生。

定理 2.13

令 A 和 B 为两个独立事件。则

(1) A 和 B^c 相互独立;

(2) A^c 和 B 相互独立;

(3) A^c 和 B^c 相互独立。

■ 证明 (1)：

若 $P(A\cap B^c)=P(A)P(B^c)$, 则 A 和 B^c 相互独立。

因 $(A\cap B)\cup(A\cap B^c)=A$, 有

$$P(A\cap B)+P(A\cap B^c)=P(A)$$

根据乘法法则可知

$$\begin{aligned}P(A\cap B^c)&=P(A)-P(A\cap B)\\&=P(A)-P(A)P(B)\\&=P(A)[1-P(B)]\\&=P(A)P(B^c)\end{aligned}$$

CONTINUE

证明 (2):

由对称性和（1）的证明结果可得。

证明 (3):

根据 $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c) = B^c$, 有

$$P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B^c) = P(B^c)$$

从而有

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P(B^c) - P(A \cap B^c) \\ &= P(B^c) - P(A)P(B^c) \\ &= P(A^c)P(B^c) \end{aligned}$$

证毕。

定义 2.15 [多个事件的独立性 (Independence Among Several Events)]

对 k 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$, 若其中任意 j 个事件 $(j = 2,3,\cdots,k)$ 的每个可能子集 $A_{i1}, \cdots, A_{ij}$ 均满足

$$P\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}\right) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P\left(A_{i_j}\right)$$

则称 k 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是相互独立的。

- 若任何子集的联合概率等于子集内所有事件的概率的乘积，那么所有 k 个事件相互独立。共需要 2^k-1-k 个条件来描述 k 个事件之间的独立性
  - 因为 $\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}=2^k$, $\binom{k}{0}=1$, $\binom{k}{1}=k$。
  - 例如，当且仅当如下 $2^3-1-3=4$ 个如下条件满足时，三个事件 A,B 和 C 相互独立:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

$$P(A\cap C)=P(A)P(C)$$

$$P(B\cap C)=P(B)P(C)$$

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$$

例 2.56 [中秋博饼]

在福建闽南地区，有一种欢庆中秋佳节的传统活动称为博饼游戏。假设两个朋友玩这个游戏。平均而言，两人需要掷多少轮博饼才能产生一个“状元”呢?

所谓博饼，是一种掷 6 个骰子的游戏。若某参赛者所掷得的 6 个骰子中至少 4 个骰子同时出现数字 4，则此人将是获胜者，称为“状元”。若至少 2 个参赛者有 4 个骰子出现数字 4，则看剩下两个骰子的总数，谁的数字大谁就获胜。

例 2.59 [经济政策的互补性]

- **政策的互补性：**在经济增长和经济发展领域，许多研究发现一项经济政策往往需要另一项或多项经济政策配套才能共同促进经济增长。
- 对转型经济，单独一项改革可能不会达到预期效果，甚至适得其反。经济政策必须**配套实施**才能达到预想效果。
  - ✓ 比如，为了提高企业生产率（A_1），在更换经理（A_2）的同时必须给予企业自主权（A_3），否则可能会出现“巧妇难为无米之炊”的现象。

目　录

本章奠定了概率论的基础。

首先，用概率空间 $(S, \mathbb{B}, P)$ 刻画随机试验。在此基础上，分别用相对频率和主观概率对概率给予解释。对任意一个可测空间 $(S, \mathbb{B})$，可定义多个概率函数。

进一步地，讨论了概率函数的性质和若干重要计数方法，这些方法有助于计算经济学家所关心的重要经济事件的概率。

接着，引入了条件概率函数的概念描述两个或两个以上经济事件之间的预测关系，并且讨论了著名的贝叶斯定理。

最后，介绍了独立性的概念及其在经济学和金融学领域的一些应用。

中国科学院数学与系统科学研究院
Academy of Mathematics and Systems Science
Chinese Academy of Sciences

Thank You！