

42

旋量代数与 李群、李代数

XUANLIANG DAISHU YU LIQUN, LIDAISHU

■ 戴建生

献给我的祖父母、大姑母、父母亲和夫人丛建青、儿子戴明博

与本书同时发行

戴建生. (2014) 机构学与机器人学的几何基础与旋量代数, 高等教育出版社, 北京.

Dai, J. S. (2014) *Screw Algebra and Kinematic Approaches for Mechanisms and Robotics*, Springer, London.

对本书的引用可采取下面形式

Dai, J. S. (2014) *Screw Algebra and Lie Groups and Lie Algebras*, Higher Education Press, Beijing, also *Screw Algebra and Kinematic Approaches for Mechanisms and Robotics*, Springer, London.

序 言

众所周知, 三维刚体运动有三个平移自由度和三个旋转自由度, 组成六自由度的连续运动群 (六维李群). 它的李代数是所有无穷小刚体运动组成的六维向量空间, 为李群单位元处的切空间, 其中无穷小平移占有三个维数, 无穷小旋转占有另外三个维数. 这个空间的任意向量都被称为一个旋量, 通过指数映射生成一个三维刚体运动.

另一方面, 三维空间中的一条直线上的所有点都可以由其上的两点通过仿射组合得到. 相应地在三维射影空间中, 一条直线可由四维齐次坐标表示的四维线性空间上两个向量的线性扩张唯一表示; 所有这种线性扩张组成一个六维线性空间, 这就是直线的 Plücker 坐标所在的六维空间. 三维空间中的任意一条直线具有六个 Plücker 坐标, 三个表示直线的方向, 另外三个表示直线对坐标原点的矩; 它们完全确定了直线的位置和姿态.

一个经典的一一对应是在三维刚体运动的李代数空间与三维空间中直线的 Plücker 坐标空间之间的: 李代数中无穷小平移的三个维数正好对应于表示直线方向的三个坐标, 而无穷小旋转的三个维数正好对应于表示直线对坐标原点的矩的另外三个坐标. 由此, 表示空间运动的旋量与表示空间几何体的 Plücker 坐标天然地合为一体, 构成了旋量几何理论的基本框架.

瞬时旋量是射影李代数空间的元素, 通过指数映射可生成李群. 李群 $SE(3)$ 的伴随作用可用有限位移旋量矩阵 (也称为有限位移旋量算子) 表示,

可完成三维空间内刚体的 Chasles 运动以及旋量的坐标变换, 也可用于生成非瞬时的有限位移旋量. 本书作者建立的有限位移旋量理论实现了旋量理论由瞬时量向非瞬时量的飞跃, 也是本书贯通有限位移旋量与李群、旋量与李代数的关键所在.

在力学理论中, 旋量有时被称为螺旋量, 由爱尔兰数学家 Robert S. Ball 爵士在他相继于 1876 年和 1900 年发表的著作 *Theory of Screws* 和 *A Treatise on the Theory of Screws* 中建立. 如果将三维刚体运动的李代数空间作为一个六维线性空间, 其中的元素表示 (无穷小) 运动, 那么这个六维空间的对偶空间同样是两个三维空间张成的一个六维线性空间, 其中的元素表示动力 (力和力矩, 各占直线 Plücker 坐标的三个分量). 这两个六维空间的配对就是力相对于运动所做的功. 从数学上讲, 这些结构属于五维射影几何的范围.

事实上, 在六维线性空间中可以引入各种乘法. 一个典型的方式是由英国数学家 W. K. Clifford 在 1873 年给出的. 他引入唯一的所谓对偶元 (与任何元素的乘积具有交换性的幂零元), 在两个三维向量代数 (拥有向量的内积和叉积) 的基础上构造所谓的对偶向量代数, 它是一个六维线性空间, 具有六维对偶向量的内积和叉积结构. 一个六维对偶向量是一个普通三维向量与一个纯虚三维向量的和, 前者表示方向, 后者是由对偶元乘以另外一个三维空间的向量得到的, 表示位置 (矩). 两个直线所对应的对偶向量的乘积完全刻画了它们之间的所有几何关系, 包括夹角、公垂线、距离等. 其后 Clifford 将对偶向量代数推广到任意维数和任意内积结构, 这就是现代微分几何中的指标定理、多复变函数论中的 Clifford 分析以及计算机图形学中的几何代数的公共基础: Clifford 代数.

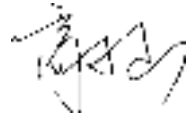
三维空间中直线的 Plücker 坐标组成的集合并不是线性的, 而是五维射影空间中满足一个二次代数方程的超曲面, 因此组成一个无论是从几何还是从代数角度来看都是最简单之一的所谓不可约代数簇. 关于这一代数簇的拓扑不变量的研究激发了一系列的重要工作, 例如吴文俊示性类的发现.

向量空间理论向旋量代数延伸, 可衍生出一系列力学含义明确的运算, 为旋量系理论. 本书作者发明了比 Gauss-Seidel 消元法运算效率更高但误差阶数更低的求解齐次线性方程组的算法, 进而建立了旋量系零空间构造理论. 这一理论与作者在本书中建立的旋量系关联关系理论、旋量系分解理论、旋量系对偶理论共同构成了本书的旋量系理论.

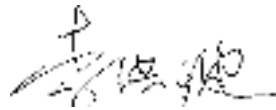
拥有如此众多现代数学交集的旋量理论 (screw theory), 其本身具有几何概念清晰、代数运算简便、物理意义明确等特点, 从而成为机构学和机器人学的数学基础之一, 被广泛应用于力学和计算几何等领域. 在 Google 上搜索 “screw theory”, 有四千多万条相关信息.

但是, 除了 1900 年 Ball 和 1978 年 Hunt 的旋量理论英文书外, 几乎没有一部完整的叙述旋量理论方法的著作. 旋量理论的大部分内容散见于研究论文以及与机构学相关的专著中. 这对旋量理论的发展与应用十分不利.

本书作者戴建生教授为世界著名理论运动学与机构学专家, 长期从事旋量理论与机构学的研究, 对旋量理论与机构学的发展作出了许多重要贡献. 这本旋量代数理论专著由作者基于自己二十五年的研究成果, 以及十余年在国内一些大学授课、讲座的教案和讲义整理、著述而成. 本专著详细而系统地阐述了旋量理论的几何基础与数学内涵及其与李群、李代数的关联, 结合作者自己的若干研究成果, 深入讲解了旋量代数在运动学和力学中的应用以及其几何内涵, 对于推动旋量代数在我国的发展与应用具有重要的意义.



中国科学院数学与系统科学研究院副院长



中国科学院数学机械化重点实验室主任

2013 年夏

前 言

代数、几何、分析是数学的三大支柱,三者有着密不可分的联系.从《周髀算经》中的“勾股各自乘,并而开方除之”到古希腊的“毕达哥拉斯定理”,从欧几里得的《几何原本》到东汉前期的《九章算术》,几何自古以来就同以算术形式呈现的代数有着共同的渊源和联系.这种关联在 19 世纪各个数学分支的快速发展中得到了有效的验证,在旋量代数中得到了完美的展现.

旋量 (screw) 也被著名数学家 William Kingdon Clifford (1883) 和 Louis Brand (1947) 称为矩量 (motor). 矩量是矩 (moment) 和向量 (vector) 的合称. Spinor 的中文译名也为旋量,与 screw 的译名相同,虽然两个量应用在不同领域,但有着共同的数学渊源.

Spinor 是由法国数学家 Élie Cartan 在 1913 年提出的,由德国数学家与物理学家 Theodor Kaluza 和瑞典理论物理学家 Oskar Klein 在 20 世纪 20 年代用于原子物理学和量子力学中电子和质子内在自动量的研究.电子旋转的三维向量以三个 2×2 的 Pauli 基本矩阵表示.以 Dirac 旋量形式表示的 spinor 是一个包括左旋态和右旋态二分量的 Weyl 的 spinor.其与群论关系可采用 n 阶特殊酉群 $SU(n)$ 表示,在粒子物理中有广泛的应用. Spinor 复数表述对应于 Clifford 代数,具有旋转与平移作用,它与 screw 存在着内在的联系,但目前仍局限于质点研究的应用.

与 spinor 目前用于质点研究相比, screw (旋量,以下所称旋量均为 screw) 用于直线在空间的旋转和平移的描述,进而用于刚体在空间的运动研究.有

限位移旋量属于六维特殊欧几里得群 $SE(3)$, 瞬时旋量属于五维射影李代数 $se(3)$. 旋量研究应该追溯到 1763 年意大利数学家 Giulio Mozzi 提出的刚体瞬时运动轴、1806 年法国数学家及物理学家 Louis Poinsot 提出的合力中心轴定理以及 1830 年法国数学家 Michel Floréal Chasles 提出的刚体位移理论. 旋量理论研究在 19 世纪进入了鼎盛时期. 1830 年, Chasles 首次将力与运动分离, 提出空间任意运动均可表示为绕一轴的旋转和沿该轴的平移. Chasles 的研究为有限位移旋量的研究以及今天旋量矩阵的发展奠定了基础. 旋量理论研究在 19 世纪 60 年代取得了许多重大突破, 初步形成了旋量理论体系. 在这一时期, 英国数学家、皇家科学院院士 Arthur Cayley 建立了空间直线的六维坐标, 德国数学家、波恩大学数学与物理学教授 Julius Plücker 建立了 Plücker 坐标. Cayley 和 Plücker 的研究系统地总结了过去两个世纪几何学的研究成果并建立了这些成果与当时代数研究的紧密联系. 此外, Plücker 的博士研究生 Christian Felix Klein(1868 年获得博士学位) 与剑桥大学天文学家、几何学教授 Robert Stawell Ball 爵士几乎同时发现了互易旋量. Klein 的后续研究将旋距为零的旋量即线矢量由三维空间中的直线映射为五维射影空间中超二次曲面上的点, 这种五维射影空间的超二次曲面也被称为 Klein 二次曲面.

19 世纪下半叶, 欧洲经历了第二次工业革命, 数学领域研究不断推进. 在这一大环境下, 几何与代数的研究出现了几次重大突破. 其中具有代表性的是剑桥大学天文学家和几何学家、英国皇家科学院院士、都柏林皇家科学院应用数学与机构学教授 Robert Stawell Ball 爵士针对旋量所作的系统研究. Ball 分别于 1873 年和 1876 年发表了系统研究旋量理论的文章和专著, 使旋量理论研究达到了巅峰.

与此同时, 伦敦大学数学家和力学家、英国皇家科学院院士 Clifford 在 1873 年提出对偶四元数后, 又于 1882 年系统地研究了旋量同向量、四元数与对偶四元数的关系, 总结出了著名的“旋量表格”, 揭示了旋量与对偶四元数代数(后来称为“Clifford 代数”)的关联. 关于这将近半个世纪的研究, Ball¹在世纪之交(1900 年)出版的旋量专著中作了系统的表述和总结, 奠定了旋量理论的数学基础.

¹Ball, R.S. (1900) *A treatise on the theory of screws*, Cambridge University Press, Cambridge, England.

此后不久, 由于德国数学家 Eduard Study 发明了对偶角, Felix Klein 提出了五维射影空间的超二次曲面, 旋量理论研究得以进一步发展. 综上所述, 旋量理论研究在 19 世纪下半叶和 20 世纪之初达到了高潮. 旋量理论的美妙体现在它的几何特性及其与许多数学分支的耦合和交叉, 体现在它的几何内涵以及与代数的有机融合.

旋量代数与李群、李代数的有机结合在 19 世纪中叶李代数未成形前就已经初露端倪. 19 世纪下半叶, 对旋量理论研究有突出贡献的德国数学家 Felix Klein 于 1872 年分类与挖掘了射影几何与群论的几何特性及其与许多几何分支的关联, 提出了著名的 Erlangen 纲领², 从而同挪威数学家 Marius Sophus Lie 一起奠定了李群和李代数的基础. Klein 在研究李群和李代数的同时对互易旋量以及超二次曲面做了大量研究³, 因此他具有通晓旋量代数与李群、李代数理论的优势, 进而将群论研究合理地扩展到了旋量的几何研究领域. 这些理论的关联也可从 Clifford 的研究中得到启示, 在 Clifford 的理论中, 瞬时旋量被视为李代数的一部分.

在经历了两次世界大战后, 旋量理论研究开始复苏. 1947 年, 美国 MD Anderson 杰出数学家 Brand⁴系统地研究了旋量的运算, 出版了向量和张量分析方面的专著. 该书第二章为矩量 (泛旋量) 代数, 提出了旋量的运算规则. 这些研究从 20 世纪 60 年代起得到了机构学研究者的重视. 首先苏联的机构学专家 Dimentberg⁵发表了相关的研究论文, 随后澳大利亚莫纳什大学机构学教授 Kenneth Hunt⁶于 1978 年出版了机构运动几何学方面的专著, 荷兰数学家 Oene Bottema 和斯坦福大学机构学教授 Bernard Roth⁷于 1979 年出

²Klein, F. (1872) Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, *Mathematische Annalen*, **43**(1893): 63-100, also: *Gesammelte Abh.* **1**, Springer (1921), 460-497; English translation by Haskell, M.: Comparative review of recent researches in geometry, *Bull. N. Y. Math. Soc* **2** (1892—1893), 215-249, <http://arxiv.org/abs/0807.3161>.

³Klein, F.(1908) *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis; Teil II, Geometrie*, B.G. Teubner, Leipzig; English translation: *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Part I: arithmetic, algebra, analysis; Part II: geometry*, Dover (2004), New York.

⁴Brand, L. (1947) *Vector and tensor analysis*, 7th printing (1958), John Wiley & Sons, Inc. New York.

⁵Dimentberg, F.M. (1965) *The screw calculus and its application to mechanics* (in Russian) Izdat. Nauka, Moscow, 1965, English Translation, Foreign Technology Division, U.S. Department of Commerce, (N.T.I.S), No. AD 680-993, WP-APB, Ohio.

⁶Hunt, K.H. (1978) *Kinematic geometry of mechanisms*. Clarendon Press, Oxford.

⁷Bottema, O. and Roth, B. (1979) *Theoretical kinematics*, North-Holland, Amsterdam.

版了理论运动学方面的专著,加利福尼亚大学欧文分校机构学教授 Michael McCarthy⁸于 1990 年出版了介绍理论运动学的著作,佛罗里达大学机构学教授 Joseph Duffy⁹于 1996 年出版了旋量平面机理与应用方面的专著. Hunt 的专著首次从机构学家的角度审视和分析了旋量,系统地提出了旋量系并阐述了其应用. Bottema 和 Roth 的专著展示了理论运动学的丰厚数学基础,独到地将理论运动学与现代数学关联起来. McCarthy 的专著用简洁的语言介绍了与理论运动学相关的数学知识,建立了四元数与机构学的紧密联系,并以此进行了机构综合. Duffy 的专著将旋量几何与具体的机构相关联,从而展现了 Jacobian 矩阵及其逆矩阵的几何含义. 在此之后,在国际上有关旋量理论或理论运动学的专著只有 2004 年的亚利桑那大学机构学教授 Joseph Davidson 与 Kenneth Hunt¹⁰合著的《旋量理论与机器人学》一书.

随着 20 世纪下半叶现代数学的爆炸式发展,国际数学界与机构学界对旋量的研究成果已经出现在许多李群、李代数、微分流形的专著中. 许多研究 Clifford 代数的文章也直接或间接地研究旋量代数. 同时,随着机器人学研究热潮的兴起,旋量受到许多机器人学专家的青睐. 国际上几乎三分之一以上研究机器人学与机构学的文章采用旋量方法,许多研究机器人的书籍也经常用到旋量,可以说,旋量已成为机器人研究的重要工具. 进入 21 世纪后,旋量理论的研究又出现了新的飞跃,并与李群、李代数的研究紧密融合.

我对旋量理论的青睐始于对数学的钟爱. 记得第一次感受到数学的美妙是在 1967 年至 1968 年年间. 那时,我无意间邂逅了父亲珍藏的 50 年代的旧皮发黄、晦涩难懂的因式分解书. 在大量变量交错的题目中,逐渐找出相同变量,提取公因式,再重新组合. 那些问题看似繁琐难解,但最终的答案总能显示出优美与对称,如同诗词的对仗,韵律的协畅. 在 1969 年的中学复课到 1972 年的高中期间,我爱上了三角函数和解析几何,几何的对称与美妙将我引进了数学的殿堂. 1978 年到 1984 年在上海交通大学进行本科和硕士研究生学习期间,我对定理推导的严谨性和解题过程的完美性感触颇深,对数学的理解和体会也提升到了一个新的境界. 线性代数的完整理论,矩阵推算的内在关联以及几何演变的空间机理使我如痴如醉.

⁸McCarthy, J.M. (1990) *An introduction to theoretical kinematics*, The MIT Press, London.

⁹Duffy, J. (1996) *Statics and kinematics with applications to robotics*, Cambridge University Press, New York.

¹⁰Davidson, J.K. and Hunt, K.H. (2004) *Robots and screw theory: Applications of kinematics and statics to robotics*, Oxford University Press, New York.

1989年,我来到英国 Salford 大学进行旋量理论研究,采用直线几何学和旋量理论解决抓持的无摩擦和有摩擦问题,并拜读了熊有伦院士推荐的 Rockafellar¹¹的关于凸集论方面的著作,深有感触.英国 Salford 大学在 20 世纪 90 年代初对旋量理论的研究十分活跃,是英国乃至欧洲研究旋量理论的中心.由 John Sanger 教授和 David Kerr 博士牵头的机构学中心经常组织学术研讨会,不断地有国际旋量理论专家访问.在这期间,我多次聆听了 Joseph Duffy 教授的旋量理论讲座,参与了开放大学 Joseph Rooney 博士的代数空间的研讨班,与 Joseph Davidson 教授谈及有限位移旋量,同澳大利亚机构学专家 Jack Phillips 教授讨论位移旋量流形,向俄勒冈大学机构学专家 Gene Fichter 教授讲述旋量系关联关系.这是一个学术思想极其活跃的时期.在这一时期,我经常接触到旋量研究的前沿理论.

这些前沿理论以及在抓持理论研究和机构设计中所遇到的问题,将我带入经典论著的海洋.我经常夜深人静时还在牛顿大楼里津津有味地翻读着一些数学和旋量理论领域的经典著作,内容涵盖 20 世纪 20 年代 Woods¹²的高等几何,40 年代 Brand⁴的张量分析,50 年代 Maxwell¹³的齐次空间,60 年代 Dimentberg⁵的旋量论,70 年代 Hunt⁶的机构运动几何、Bottema 与 Roth⁷的理论运动学以及 Strang¹⁴的关于向量空间与正交子空间理论的线性代数,80 年代 Duffy¹⁵的机构几何轨迹分析,90 年代 McCarthy⁸的理论运动学简介以及 Murray、Li 和 Sastry¹⁶的机器人操作数学基础.通过这些经典著作以及 20 世纪六七十年代 Yang 与 Freudenstein¹⁷、Woo 与 Freudenstein¹⁸发表的许多旋量文章,我深深感受到,旋量理论能够凭借其自身发展的严谨性、学科交融的跨越性以及机构学与机器人学方面的实用性在一个三维实体空间和抽

¹¹Rockafellar, R.T. (1970) *Convex analysis*, Princeton, New Jersey.

¹²Woods, F.S. (1922) *Higher geometry, an introduction to advanced methods in analytic geometry*, Ginn and Company, New York.

¹³Maxwell, E.A. (1951) *General homogeneous coordinates in space of three dimensions*, Cambridge University Press, Cambridge.

¹⁴Strang, G. (1976) *Linear algebra and its applications*, Harcourt Brace Jovanovich, Inc. Philadelphia.

¹⁵Duffy, J. (1980) *Analysis of mechanisms and robot manipulators*, John Wiley and Sons, New York.

¹⁶Murray, R.M., Li, Z. and Sastry, S.S. (1994) *A mathematical introduction to robotic manipulation*, CRC Press, New York.

¹⁷Yang, A.T. and Freudenstein, F. (1964) Application of dual-number quaternion algebra to the analysis of spatial mechanisms, *ASME J. Appl. Mech.*, **86**(2): 300-309.

¹⁸Woo, L. and Freudenstein, F. (1970) Application of line geometry to theoretical kinematics and the kinematic analysis of mechanical systems, *ASME J. Mechanisms*, **5**: 417-460.

象的六维空间及五维射影空间中迸发出无限的魅力,令人寻味无穷.许多经典的机器人学理论,诸如20世纪80年代Paul¹⁹的齐次变换与机械臂RPY旋转理论以及Craig²⁰的机械臂姿态多种描述与变换理论为旋量代数提供了应用的领域和驰骋的疆野.

本书作者在过去三十余年的研究及近十五年与国内诸多大学教师与学生的交流中发现,大家都在寻找一部完整、系统地研究旋量理论及其代数方法的教材或专著.本书基于作者二十五年在英国的研究成果,加之近十五年在国内一些大学的授课、讲座和交流的讲稿,系统而深入地阐述旋量理论的数学基础及其代数方法.全书从直线几何、射影几何与向量代数出发,循序渐进、由浅入深地对旋量代数、李群与李代数、四元数及其关联论的相关概念、理论和公式进行了仔细推敲、系统推导以及详尽论述,旨在将复杂而高深的旋量理论清晰地展现在读者眼前,并在此基础上将其升华为简洁、优美、实用的数学公式与推理,从而回归到数学的内涵本质上.本书同时巧妙地应用经典数学理论,展现这些经典理论与现代数学的内在联系,深入浅出地引领读者到旋量代数及其与李群、李代数的关联研究的深处.

本书是基于射影几何、仿射几何及向量代数与矩阵内在特性研究旋量代数、李群与李代数、四元数代数、代数关联论以及旋量系理论的专著.本书基于旋量的几何内涵首次深入系统地阐述旋量代数的推理运算,揭示旋量代数与李群、李代数的内在关联,提出并建立涵盖旋量代数、李群和李代数与四元数代数的关联论以及贯通旋量代数与机构学、机器人学应用的旋量系理论,旨在满足国内学者与学生长期以来对详细介绍旋量代数及其几何内涵的教材和论著的需求.

本书第一章为绪论,介绍旋量与李群、李代数的发展史及相互关系.第二章基于向量空间讲述旋量代数的几何基础,介绍直线几何的点、线、面特性与其对偶规律,揭示运动几何、射影几何与旋量代数的关联关系,以及射线坐标与轴线坐标及其对偶性.第三章阐述旋量代数及其在李代数中的理论基础以及几何内涵,展示旋量代数的各种运算规则和方法,全面介绍与引进旋量、速度旋量与力旋量,从几何本质和代数角度阐述旋量代数知识及其相关的李代数 $so(3)$ 和 $se(3)$.

¹⁹Paul, R.P. (1981) *Robot manipulators: Mathematics, programming and control*, MIT press, Cambridge, MA.

²⁰Craig, J.J. (1986) *Introduction to robotics: Mechanics and control*, Addison-Wesley, Reading, MA.

基于旋量代数及其几何含义, 在第四章和第五章中, 本书将旋量代数推广到矩阵理论及其与代数运算的关联关系与几何本质, 介绍刚体位移与 Rodrigues 参数以及与 Hamilton 四元数和 Clifford 对偶四元数的关联关系以及有限位移旋量的几何内涵与数学基础, 展现经典数学理论同旋量代数和刚体运动的内在联系与相互作用, 通过这些相关基础理论深入地剖析旋量矩阵与有限位移旋量的内在关联及其相关的李群 $SO(3)$ 和 $SE(3)$. 第五章阐述有限位移旋量与李群的内在关联, 讲解刚体位移中的 Chasles 运动, 从几何内涵揭示旋量矩阵的特性, 特别是其副部即对偶部特性, 并提出基于矩阵分解的旋量矩阵迹. 通过阐述对应于旋量特征值的有限位移旋量, 给出旋量矩阵的微分, 引出有限位移旋量与李代数的关联关系. 在第四、第五两章中, 本书首次展现出旋量理论与经典数学的关联关系, 并采用框图和年代表揭示出它们的内在联系和发展历史.

本书前五章起始于线性代数, 由几何基础自然过渡到旋量代数与旋量矩阵, 紧密联系李群和李代数, 并将这些数学理论与刚体运动关联, 提出旋量代数与李群、李代数的关联论, 演示数学理论的几何内涵. 在此基础上, 本书第六章、第七章和第八章系统地阐述旋量系理论, 尤其是旋量代数和旋量系理论在旋量矩阵以及向量空间中的应用和演变.

本书第六章通过互易特性和线性相关性的几何意义与物理含义进一步阐述旋量系相关知识, 探讨旋量特性、旋量组合以及旋量线性相关性, 讲解机构运动学和静力学中的旋量系及其组合. 第七章自然过渡到旋量系与其互易旋量系之间的关联关系, 建立旋量系互易特性的代数模型, 从而引入集合论以提出旋量系关联关系的一般理论. 在此基础上, 本章讲解一阶旋量系、二阶旋量系和三阶旋量系以及高阶旋量系, 并阐述它们的几何本质与物理含义. 本章最后介绍一种通过求解旋量系互易基构造其互易旋量系的新方法.

本书第八章应用旋量矩阵探索旋量空间的算法和零空间, 讲解旋量代数的子空间、子空间分析及其在一维零空间和多维零空间的构造. 在引入移位分块法与逐级扩展法后, 给出求解互易旋量系的步骤和公式. 本章采用递归分块与逐级扩展的方法总结出一套求取旋量系零空间的算法. 本章进一步将理论与公式应用到齐次线性方程求解, 提出新的齐次线性方程组的求解法则, 并给出相对于 Gauss-Seidel 消元法的精度比较与效率比较. 这种求解法则比 Gauss-Seidel 消元法在精度上高一阶, 在算法上减少许多运算, 节省运算时间.

本书第九章将旋量系理论发展到旋量系分解, 尤其是约束旋量系的分解, 阐述公共约束、冗余约束以及不同类型约束之间的相互作用, 揭示约束旋量系的关联与其对机构自由运动的制约, 研究空间机构的连接度、活动度与自由度, 演示活动度扩展准则的理论基础. 本章同时介绍并讨论旋量系的对偶性及其在串联机构、并联机构与抓持机理中的耦合关系, 并以此研究 Sarrus 机构与 Hoberman 机构.

本书九章自成体系. 它全面、系统、深入地研究旋量代数、李群与李代数、四元数代数、代数关联论以及相关的向量代数与矩阵特性、射影几何与仿射几何等数学理论, 揭示相关代数理论的几何内涵, 为空间机构与机器人分析和设计提供雄厚的几何基础与充分的数学依据.

本书内容涉及仿射几何与射影几何、线性代数与向量空间理论、矩阵论以及集合论, 可用于线性空间理论、机构学、机器人学、计算机科学、图形学、控制学及自动化科学等多个学科领域. 本书适合供上述相关领域的研究生、教师、科学研究人员及工程研究人员使用. 本书在数学基础方面仅涉及向量代数、线性代数、射影几何基础与有限群论基础, 可供理工科本科二年级以上对机构学与机器人学的几何基础与数学理论感兴趣的学生阅读和参考.

本书与作者的英文专著 *Screw Algebra and Kinematic Approaches for Mechanisms and Robotics*²¹ 以及中文专著《机构学与机器人学的几何基础与旋量代数》²² 同时著作而成. 作者感谢约翰·霍普金斯大学数学科学、计算机科学与机构学教授 Gregory Chirikjian, 杜伊斯堡-埃森大学机构学博士 Andreas Müller 对英文专著的逐章阅读与具体建议; 感谢加拿大拉瓦尔大学教授 Clément Gosselin、意大利博洛尼亚大学教授 Vincenzo Parenti Castelli、斯坦福大学教授 Bernard Roth 以及加利福尼亚大学欧文分校教授 Michael McCarthy 的热情支持与极力推荐.

在全书逾三年的写作过程中, 作者感谢天津大学先进机构学与机器人学中心博士生张新生对第二章至第五章的研读与校对、对第六章至第九章

²¹Dai, J.S. (2014) *Screw algebra and kinematic approaches for mechanisms and robotics*, Springer, London.

²²戴建生 (2014) 机构学与机器人学的几何基础与旋量代数, 高等教育出版社, 北京. 英文引用为 Dai, J.S. (2014) *Geometrical foundations and screw algebra for mechanisms and robotics*, Higher Education Press, Beijing, also *Screw algebra and kinematic approaches for mechanisms and robotics*, Springer, London.

的检查与建议以及协助作者对全书文字的修饰, 博士生康熙和高志广对全书的建议与检查核对, 博士生马学思对本书的中期检查与核对, 天津理工大学讲师王晓菲博士对第六章至第八章的研读与初期校对; 感谢伦敦大学国王学院魏国武博士对插图的修订, 张克涛博士、秦云博士和博士生邱晨、冯慧娟对参考文献、索引、符号表、后记等的整理与检查, 博士生孙杰对部分公式的验证; 感谢中北大学李瑞琴教授对本书初稿的研读、建议及文字修改, 北京邮电大学廖启征教授对四元数、Clifford 代数概念的检查与讨论, 以及清华大学赵景山教授对本书的阅读与检查; 感谢参与本书讨论的许多已经毕业的和在读的博士生们, 这些有益的讨论与建议对于作者对本书的反复修改与论证有着很大的帮助.

作者尤其感谢中国科学院院士、华中科技大学熊有伦教授, 中国科学院数学与系统科学研究院高小山教授, 中国科学院数学机械化重点实验室李洪波教授, 南开大学数学科学学院邓少强教授, 大连理工大学数学科学学院侯中华教授, 福州大学数学与计算机科学学院/离散数学研究中心常安教授和曾有栋教授以及东北大学李树军教授对本书的审阅和推荐. 感谢上海交通大学邹慧君教授、燕山大学黄真教授、金陵石化公司与常州大学杨廷力教授、香港科技大学李泽湘教授对本书出版的支持与推荐.

最后, 作者感谢天津大学机构理论与装备设计教育部重点实验室对本书写作的支持, 感谢国家自然科学基金委项目 (51175366、51135008) 与天津自然科学基金重点项目 (12JCZDJC27700) 对本书出版的支持, 感谢高等教育出版社王丽萍编辑、刘占伟编辑在本书审读方面所付出的辛勤劳动.

戴建生

2013 年冬于北洋园

符号表

旋量与旋量系

D	微小位移旋量
\dim	旋量系的阶数
h	旋量的旋距
l_0	线矢量矩
M	矩量/泛旋量
S	旋量
s	旋量主部/旋量轴线向量
s_0	旋量副部
S^r	互易旋量
S_f	输出杆件/运动平台运动旋量系
S^r	输出杆件/运动平台约束旋量系
S_m	机构运动旋量系
S^c	机构约束旋量系/公共约束旋量系
S_c^r	互补约束旋量系
S_v^r	冗余约束旋量系
$\langle S_c^r \rangle$	互补约束旋量多重集
$\langle S_v^r \rangle$	冗余约束旋量多重集

T	速度旋量
W	力旋量

李群和李代数

A_s	李代数 $so(3)$ 的伴随表示
$Ad(g)$	李群伴随算子
$ad(\mathbf{X})$	李代数伴随算子
$Aff(n)$	仿射群
E	李代数 $se(3)$ 的标准 4×4 表示
ε	对偶单元
G	群
g	群的元素
$GL(n)$	一般线性群
$gl(n)$	一般线性群的李代数
H	李群 $SE(3)$ 的标准 4×4 表示
H_s	Hamilton 算子
N	李群 $SE(3)$ 的 6×6 伴随表示
$O(n)$	正交群
Q	李群 $SO(3)$ 的单位四元数表示
\hat{Q}	李群 $SE(3)$ 的单位对偶四元数表示
R	李群 $SO(3)$ 的伴随表示
S	李代数 $se(3)$ 元素的向量形式
s	李代数 $so(3)$ 元素的向量形式
$SA(n)$	特殊仿射群
$SE(3)$	特殊欧氏群 (刚体位移群)
$se(3)$	特殊欧氏群的李代数
$se^*(3)$	对偶李代数
$SL(n)$	特殊线性群
$SO(3)$	特殊正交群/旋转位移群
$so(3)$	特殊正交群的李代数
$SU(n)$	特殊酉群

$T(3)$	三维平移群
$t(3)$	三维平移群的李代数
U	李代数 $se(3)$ 的 6×6 伴随表示
V	李代数 $so(3)$ 的纯四元数表示

矩阵、集合与空间

0	零矩阵/零向量
A_s	3×3 反对称矩阵
$\text{adj } J$	矩阵 J 的伴随矩阵
C	柔度矩阵
c	条件数
$\text{card}(\)$	集合的基数
$\det J$	矩阵 J 的行列式
\mathbb{E}^n	欧氏空间
H	齐次变换矩阵/点位移算子
I	单位矩阵
J	旋量矩阵/Jacobian 矩阵
K	刚度矩阵
N	有限位移旋量矩阵/李群 $SE(3)$ 伴随算子
$N(J)$	矩阵 J 的零空间
$N(J^T)$	矩阵 J 的左零空间
\mathbb{P}^n	n 维射影空间
R	行列式为“1”的正交矩阵/旋转矩阵/旋转位移算子
\mathbb{R}^n	n 维实向量空间
$\mathbb{R}(J)$	矩阵 J 的列空间
$\mathbb{R}(J^T)$	矩阵 J 的行空间
$\text{rank } J$	矩阵 J 的秩
$\text{tr } J$	矩阵 J 的迹

运算符号

\cup	并
\uplus	多重集并
\cap	交
\subset	子集从属
\in	元素从属
\rightarrow	空间映射
\mapsto	元素映射
Δ	对偶算子
\oplus	直和
\otimes	张量积/直积
\propto	半直积
$\langle \cdot \rangle$	多重集
\circ	有限位移旋量的有序组合/李群的二元运算算子
$\ \cdot\ $	范数
$\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2$	旋量叉积
$\mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2$	旋量互易积
$[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]$	李括号

注: 小写的黑斜体通常表示三维向量 (矢量), 大写的黑斜体一般表示矩阵, 但六维向量如旋量也采用大写黑斜体, 只是采用特殊指定的符号, 如 \mathbf{S} 、 \mathbf{T} 与 \mathbf{W} .

目 录

第一章 绪论	1
1.1 旋量代数与李代数	2
1.2 有限位移旋量与李群	4
1.3 螺旋位移理论与有限位移旋量的近代发展史	6
1.4 有限位移旋量与李群的关联	8
1.5 旋量系及其关联关系理论	9
1.6 运动几何学与机构学	10
1.7 本书概述	12
参考文献	13
第二章 直线几何	23
2.1 点、向量和直线的坐标	23
2.1.1 位置向量和姿态向量	23
2.1.2 线矢量	24
2.1.3 Klein 型与 Klein 二次曲面	25
2.2 直线的向量方程	26
2.3 射影几何与齐次坐标	28

2.4	平面方程与平面坐标	30
2.4.1	平面向量方程与平面坐标表示	30
2.4.2	三点确定的平面坐标	31
2.5	两点确定的直线方程及其射线形式的 Plücker 坐标	32
2.6	两平面交线确定的直线方程及其轴线形式的 Plücker 坐标	35
2.7	射线坐标与轴线坐标的固有属性与对偶性	36
2.7.1	直线坐标的参数关系	36
2.7.2	直线表示形式的对偶性	37
2.7.3	射线坐标与轴线坐标对偶定理	38
2.7.4	射线坐标与轴线坐标对偶关系	39
2.8	互矩不变性及两直线的交点	41
2.9	射影平面与四维空间的对偶性	43
2.10	直线系	45
2.10.1	线丛	45
2.10.2	线汇和线列	45
	参考文献	46
第三章 旋量代数		47
3.1	旋量	47
3.1.1	旋量的概念	47
3.1.2	旋量的参数	49
3.1.3	坐标变换法则与不变量	50
3.2	旋量运算	51
3.2.1	互易积与 Klein 型	51
3.2.2	旋量叉积	52
3.2.3	旋量微分	54
3.2.4	Killing 型	54
3.3	旋量与旋量运算的对偶表示	55
3.3.1	对偶数、对偶向量与矩量	55
3.3.2	旋量运算的对偶表示	57
3.4	速度旋量与 Mozzi 瞬轴	59
3.4.1	螺旋运动速度场	59
3.4.2	速度旋量及其李代数表示	60
3.4.3	刚体运动	62
3.4.4	串联刚体	64

3.4.5 机械臂	65
3.5 力旋量与 Poincot 中心轴定理	66
3.5.1 对偶李代数 $se^*(3)$ 元素的力旋量	66
3.5.2 Poincot 中心轴定理	67
3.5.3 力旋量参数	68
3.5.4 合成力旋量	70
3.6 几何量的向量表示	72
3.6.1 静力学与瞬时运动学的对应性	72
3.6.2 向量空间几何量的关联特性	73
3.7 互易性	73
3.8 正则旋量	74
3.9 李代数及其表示	75
3.9.1 李代数的概念	75
3.9.2 李代数伴随算子 $ad(\mathbf{X})$ 与伴随作用	76
3.9.3 李代数的向量形式	77
3.9.4 李代数的表示	77
3.10 李运算与李括号及其等价原理	79
3.10.1 标准 4×4 矩阵表示的李括号	80
3.10.2 交换子与 Jacobi 恒等式	80
3.10.3 6×6 伴随表示的李括号及其等价定理	81
参考文献	82
第四章 位移算子与指数映射	85
4.1 坐标变换	86
4.1.1 旋转变换	86
4.1.2 齐次变换	87
4.2 位移算子与坐标变换	89
4.2.1 位移算子	89
4.2.2 坐标变换与位移算子的关系	90
4.3 一般运动的仿射变换及其空间结构与群表示	92
4.4 旋转算子、旋转群 $SO(3)$ 与指数映射	94
4.4.1 群公理与李群	94
4.4.2 旋转群	95
4.4.3 Rodrigues 方程与 $so(3)$ 到 $SO(3)$ 的指数映射	96

4.5	Rodrigues 参数、Rodrigues 方程与 Cayley 方程	98
4.5.1	平面运动的 Rodrigues 参数与 Rodrigues 方程	98
4.5.2	一般运动的 Rodrigues 方程	100
4.5.3	旋转运动的 Rodrigues 方程	101
4.5.4	旋转运动的 Cayley 方程	102
4.6	研究旋转运动的四元数法及其与李群、李代数的关联	103
4.6.1	Hamilton 四元数与共轭四元数	103
4.6.2	Euler-Rodrigues 参数与 Rodrigues 四元数	104
4.6.3	四元数与李群、李代数的关联	104
4.6.4	四元数形式的旋转操作与 Rodrigues 方程	105
4.7	研究一般运动的对偶四元数法	106
4.7.1	对偶四元数与 Hamilton 算子	106
4.7.2	Clifford 代数	110
4.8	经典位移算子的内在关联	111
	参考文献	113
第五章	$SE(3)$ 伴随作用的有限位移旋量	117
5.1	有限位移旋量算子与 $SE(3)$ 的伴随表示	119
5.1.1	Chasles 运动、李群 $SE(3)$ 与有限位移旋量矩阵	119
5.1.2	李群伴随算子 $\text{Ad}(g)$ 与伴随作用	120
5.1.3	李群 $SE(3)$ 的标准表示与伴随表示以及 Rodrigues 一般运动公式	121
5.1.4	李群 $SE(3)$ 元素的 6×6 有限位移旋量矩阵	122
5.1.5	有限位移旋量矩阵的传统分解与商群	123
5.2	有限位移旋量矩阵的 Chasles 分解及其几何意义	124
5.2.1	绕任意旋量轴具有等效平移的纯旋转	124
5.2.2	沿轴线平移的矩阵形式以及有限位移旋量矩阵的 Chasles 分解	126
5.2.3	旋量特性算子	128
5.3	有限位移旋量矩阵的迹与参数	129
5.3.1	旋转角的相关迹	129
5.3.2	轴向平移的迹	130
5.4	有限位移旋量表示论	131
5.4.1	有限位移旋量矩阵的特征旋量	131
5.4.2	有限位移旋量表示法	132

5.4.3 有限位移旋量姿态平移表示法	133
5.5 有限位移旋量的组合运算	134
5.6 李群表示论与有限位移螺旋运动	136
5.6.1 李群表示	137
5.6.2 有限螺旋运动	137
5.7 李群运算及其对李代数 $se(3)$ 的伴随作用	138
5.7.1 李群运算与对自身的伴随作用	138
5.7.2 基于有限位移旋量的李群对李代数伴随作用的共轭运算	138
5.7.3 对李代数 $se(3)$ 向量形式的左作用	141
5.8 有限位移旋量矩阵的微分与李代数 $se(3)$ 的瞬时旋量	141
5.8.1 有限位移旋量矩阵的微分	141
5.8.2 $se(3)$ 到 $SE(3)$ 的指数映射	144
5.9 有限位移旋量表示的 Chasles 运动分解	145
5.9.1 实现刚体位移的伴随作用	145
5.9.2 有限位移旋量算子的几何量	147
5.9.3 有限位移旋量表示的 Chasles 运动执行过程	148
5.10 旋量代数、李群与李代数的关联论	149
5.10.1 旋量代数、李群与李代数、有限位移旋量、四元数代数的 关联	150
5.10.2 李群、李代数与有限位移旋量、瞬时旋量关联图	151
5.10.3 有限位移旋量、瞬时旋量、李群及李代数发展史	152
参考文献	153
第六章 互易性与旋量系	157
6.1 旋量的互易性	158
6.1.1 几何特性与物理含义	158
6.1.2 运动与约束中的互易关联	160
6.2 旋量的相关性	161
6.2.1 旋量相关的充分必要条件	161
6.2.2 两个旋量的相关性	163
6.2.3 具有相同旋距的三个旋量的相关性	164
6.2.4 具有相同旋距的四个、五个与六个旋量的相关性	165
6.2.5 旋量算子的不变性	169

6.3	旋量系、基本集与张成多重集	169
6.3.1	旋量系	169
6.3.2	旋量系的集合运算	170
6.3.3	旋量系转换定理与阶数定律	172
6.3.4	基本集	172
6.3.5	张成多重集	172
6.4	旋量系的组合	173
6.4.1	合成旋量为线矢量的条件	174
6.4.2	二阶旋量系的组合	175
6.4.3	零旋距的三阶旋量系的组合	176
6.4.4	零旋距的四阶旋量系的组合	177
6.4.5	广义方程与合成线矢量的构造	178
	参考文献	180
第七章 旋量系关联关系理论		183
7.1	旋量系关联关系定理	183
7.1.1	旋量系与互易旋量系	183
7.1.2	旋量系交集定理	184
7.1.3	旋量系关联关系定理	186
7.2	一阶旋量系与其互易旋量系	189
7.2.1	一阶旋量系关联关系	189
7.2.2	关联关系的识别	190
7.3	二阶旋量系与其互易旋量系	192
7.3.1	空交集	192
7.3.2	部分交集	193
7.3.3	全交集	194
7.3.4	协互易旋量系	195
7.4	三阶旋量系与其互易旋量系	196
7.4.1	空交集	196
7.4.2	一维交集	196
7.4.3	多维交集	197
7.4.4	全交集	198
7.5	具有协互易基的旋量系	198
	参考文献	200

第八章 旋量系零空间构造理论	201
8.1 旋量系零空间数学表示	202
8.2 构造一维零空间的矩阵增广法	204
8.3 一维零空间的代数余子式法	205
8.4 五阶旋量系零空间的代数余子式法	207
8.4.1 旋量系的增广	207
8.4.2 互易旋量系的构造	208
8.5 多维零空间构造理论	210
8.5.1 矩阵分块	210
8.5.2 子矩阵增广	211
8.5.3 求解法则	212
8.5.4 移位分块与逐级增广	213
8.6 齐次线性方程组求解理论	214
8.6.1 齐次线性方程组求解法则与步骤	214
8.6.2 基于多维零空间构造理论的求解法则与 Gauss-Seidel 消元法	217
8.6.3 递归分块与增广	218
8.7 互易旋量系构造理论	220
8.7.1 $6-n$ 阶互易旋量系构造方法	220
8.7.2 移位分块以构造三阶、四阶互易旋量系	221
8.7.3 $6-n$ 阶互易旋量系构造步骤	225
8.7.4 逐级增广与递归分块	225
8.8 误差分析与算法效率	232
参考文献	233
第九章 旋量系对偶原理与分解定理	235
9.1 对偶原理	236
9.1.1 互易与对偶	236
9.1.2 并联机构运动旋量空间与力旋量空间的交并集对偶原理	237
9.1.3 串联机构与并联机构旋量空间的对偶原理	238
9.1.4 物体抓持、并联机构和串联机构对偶原理一览表	239
9.2 运动支链旋量系与基本旋量系	240
9.2.1 运动支链旋量系	240
9.2.2 四个基本旋量系	241

9.3	基本旋量系的对偶定理	242
9.3.1	基本旋量系的互易关系定理	243
9.3.2	基本旋量系的从属关系定理	243
9.3.3	基本旋量子空间的从属与互易关联结构	243
9.4	公共约束旋量系与其多重集	244
9.5	互补约束旋量系与其多重集	245
9.6	约束旋量系分解定理	246
9.6.1	输出杆件约束旋量多重集与互补约束旋量多重集	246
9.6.2	冗余约束旋量多重集	247
9.6.3	分解定理与分解过程	248
9.7	约束、运动旋量系间以及与多重集的关联关系	249
9.7.1	互补约束旋量系与冗余约束旋量多重集的关联关系	249
9.7.2	约束与运动旋量系以及冗余约束旋量多重集的关联关系	249
9.7.3	约束冗余因子	250
9.7.4	有限位移旋量系、多重集及整周运动	251
9.8	公共约束旋量系与互补约束旋量系的关联关系	252
9.8.1	公共约束、互补约束与输出杆件约束旋量系的关联关系	252
9.8.2	约束旋量系与冗余约束旋量多重集的关联关系	253
9.9	活动度扩展准则	254
9.9.1	约束与活动度	254
9.9.2	基于公共约束与冗余约束的活动度扩展准则	256
9.9.3	基于机构环路的活动度扩展准则	257
9.9.4	活动度扩展准则与旋量系数及旋量多重集基数的关联关系	258
9.10	Sarrus 连杆机构中机构运动与平台约束的对偶特性	259
9.10.1	支链运动旋量系与机构运动旋量系	259
9.10.2	支链约束旋量系与运动平台约束旋量系	260
9.10.3	运动平台旋量系与机构旋量系的交集	261
9.11	可展球体机构的对偶特性	263
9.11.1	扩展 Sarrus 机构	263
9.11.2	n -支链平台单元	265
9.12	Schatz 连杆机构的运动与约束旋量系	269
9.12.1	可逆转的立方体和 Schatz 连杆机构	269
9.12.2	运动旋量系与约束旋量系	271
9.12.3	中心连杆的运动循环	273
	参考文献	275

附录	279
索引	283
后记	303

第一章 绪 论

几何体的运动激起了 19 世纪许多数学家的兴趣, 这种运动由机构的铰链与连杆演示. 时至今日, 数学家们所关心的运动几何学已逐渐与机构学以及机器人学结合起来, 演变为机器人系列铰链连续运动引起的机器人运动, 而这些铰链轴线的运动可视为直线在三维空间中的连续运动. 简单地说, 研究机器人运动以及所抓持物体的位移, 归根结底是研究空间直线的运动以及直线运动生成的包络面及其引起的末端位姿变化等几何学与相关的代数学描述. 所以, 雄厚的几何基础与数学理论是研究机构学与机器人学必不可少的条件. 反过来, 机器人学的研究进一步揭示了几何学与代数学之间的内在关联, 为开发高效的控制算法与人工智能提供理论依据. 因此, 旋量代数和李群、李代数以其对空间直线运动及相关代数运算描述的几何直观性与代数抽象性而成为 21 世纪机构学与机器人学研究中最受欢迎的数学工具.

旋量理论¹可以追溯到 18 世纪的 Mozzi 瞬时运动轴及 19 世纪初叶的 Poinsot 合力中心轴与 Chasles 位移轴. 这些研究引出了 19 世纪中叶 Plücker、Klein 和 Ball 的研究. 至 1876 年, Ball 完成了对这一理论的系统研究, 并进一步体现在他 1900 年的著作当中, 对旋量理论的发展具有划时代的意义.

¹国内也有采用螺旋理论的称法. 旋量也被著名数学家 William Kingdon Clifford (1882) 和 Louis Brand (1947) 称为矩量 (motor), 作为矩 (moment) 和向量 (vector) 的合称. 但在 Brand 的定义中, 矩量是泛旋量, 包含零矩量、纯矩量、线矢量与旋量, 其中后两个量为正当矩量.

旋量理论具有深奥的代数内涵, 体现为旋量代数. 旋量代数可以追溯到 1882 年 Clifford 的工作、1924 年 von Misses 的旋量运算以及 1947 年 Brand 的矩量分析. 19 世纪下半叶, 在恰逢第二次工业革命的欧洲大陆上, 数学的新学术地位开始确立, 各类学科蓬勃发展. 代数学演化为几何代数等各种代数学分支, 发展出微分算子、四元数、特征值、逻辑代数并与方程组理论相融合, 数学开始向物理世界发展. 在这一时期, **李群和李代数**开始面世, 并与旋量理论并行发展. 这一时期旋量理论与李理论的并行发展, 加上 Klein 同时对旋量理论与李理论研究的贡献, 开始彰显出旋量代数与李群、李代数的内在关联. 鉴于其直观的几何描述与集成的代数形式, 作为李代数 $se(3)$ 子代数的旋量代数已经被许多理论运动学家与机器人学家所应用.

本书首先介绍旋量代数的几何基础, 即直线几何、Plücker 坐标、射影几何及仿射几何等基本知识, 讲述旋量代数及其与李代数的关联, 揭示位移旋量与李群的内在联系, 研究旋量矩阵及其李群 $SE(3)$ 的伴随表示. 在揭示旋量系的特性以及它们的关联关系之后, 阐述旋量系零空间及其构造. 这些对旋量代数及其数学基础的阐述自然地引出本书对旋量的几何本质及物理内涵的阐述, 即旋量对偶特性、力旋量与速度旋量的几何对应性及其同串联机构与并联机构的对偶关联. 本书用代数形式阐述旋量理论及其几何基础, 揭示旋量代数与李群、李代数的关联关系, 提供研究机构与机器人的几何方法与代数方法的理论基础.

1.1 旋量代数与李代数

旋量是一个几何体, 一个具有旋距的线矢量. 而**旋距**是旋量的一个系数, 与线矢量主部相乘后加在线矢量的副部, 表示旋量副部在主部上的投影. **瞬时旋量**是射影李代数元素, 并以六维向量表示. 因此, **旋量代数**是描述上述几何体的**向量代数**, 也是李代数 $se(3)$ 的子代数.

直线几何是旋量和旋量代数的基础. 作为**射影几何**的基础与核心部分之一, 以及研究射影变换下几何元素不变性的几何学分支, 直线研究可以追溯到公元 3 世纪希腊数学家 Pappus Alexandria 提出的连接两组点产生 **Pappus 六边形的 Pappus 理论**. 这一理论构造了 Pappus 九点九线图形, 即其中任何一条线穿越三点, 任何一点是三条线的交点. Pappus 理论是射影几何的第一个定理. 这一定理给出了无穷远处点即为两平行直线交点的概念, 由此

引出了 16 与 17 世纪德国数学家和天文学家 Kepler 与法国数学家和工程师 Desargues 提出的无穷远处直线概念, 即无穷远处直线为连接无穷远处点构成的线.

直线几何促进了旋量代数的诞生. 犹如爱尔兰数学家、剑桥大学天文与几何学教授、英国皇家科学院院士 Robert Stawell Ball (1876) 爵士所指出的, 旋量理论的两大基石是 Poincot 的合力理论 (1806) 和 Chasles 的刚体位移理论 (1830). 刚体位移理论可以追溯到意大利数学家 Giulio Mozzi (1763) 确立的用于描述瞬时运动的瞬时旋量轴, 以及法国数学家 Michel Floréal Chasles (1830) 建立的描述空间位移的 Chasles 运动理论. 这一理论指出, 任何空间位移均可表示为绕空间轴线的旋转与沿该轴线的平移. 对于刚体力分析, 法国数学家和物理学家 Louis Poincot (1806) 建立了力中心轴理论. 由此 Poincot 和 Chasles 揭示了力学和运动学的几何本质, 奠定了旋量理论的两大理论基础. 随着 19 世纪德国数学家、理论天文学家 August Ferdinand Möbius 创建齐次坐标以及剑桥大学数学家、英国皇家科学院院士 Arthur Cayley 与德国数学家、物理学家 Julius Plücker 创建直线坐标, 旋量理论的研究得以提升, 并由此进入了一个繁荣昌盛的时期.

这一时期, Plücker 在建立直线坐标的同时, 研究了线丛理论, 提出了 “Dyname” 一词, 这就是被 Ball (1871) 称为 “旋量” 的几何量. 在同一时期, 德国数学家 Christian Felix Klein (1869a, b) 在研究旋量理论的同时, 提出了两个线丛的共同不变量, 并与 Ball (1871) 分别同时提出了 **互易旋量** 的概念, 其积成为 Ball 在后来提出的两旋量互易的 **虚系数**. 在这一时期, Ball 发展了旋量理论, 并于 1876 年发表旋量理论初始论著. 第一部旋量理论的完整论著是 Ball 的划时代著作 ——《旋量理论论著》(Ball, 1900).

这一划时代的论著奠定了旋量理论的基础. 旋量代数初始称为矩量代数, 也称泛旋量代数, 由英格兰数学家和哲学家与英国皇家科学院院士 Clifford (1882) 在他的四元数运算中涉及, 而后由德国数学家 Richard von Mises (1924) 在他的矩量运算中揭示, 并由美国 MD Anderson 杰出数学家 Brand (1947) 在他的矩量代数中进一步挖掘. 俄罗斯教授 Dimentberg (1965) 对其进行深入研究, 并将旋量代数总结为具有各种运算的代数学, 成为以对偶向量表示的旋量的复数向量代数学.

正如我们现在所称,旋量代数是更为推广的代数,是李代数的子代数.旋量代数与德国数学家 Klein 和挪威数学家 Marius Sophus Lie 在 19 世纪 70 年代的工作、Sophus Lie 在 80 年代的进一步研究以及德国数学家 Wilhelm Karl Joseph Killing 当时的工作是在同一时期发展的.在这之后,法国数学家Élie Cartan 发展了李代数的表示论,俄罗斯数学家 Igor Dmitrievich Ado 在 1935 年的博士论文以及其后至 1947 年的研究中提出了 $n \times n$ 矩阵的李代数表示的 Ado 定理.von Mises 和 Brand 分别于 20 世纪 20 年代和 40 年代对旋量代数进行了大量研究.在之后李代数的蓬勃发展中,旋量代数与李代数的关系逐渐被学者所认识,尤其是认识到旋量是射影李代数元素,速度旋量是李代数 $se(3)$ 的元素,而力旋量是对偶李代数 $se^*(3)$ 的元素.

随着机构学和机器人学的发展,旋量代数逐渐被许多运动几何学及机构学研究者所应用. Baker (1978) 采用旋量代数研究过约束机构, Rico 和 Duffy (1996, 1998) 应用旋量代数研究串联机构,其表述法与特殊欧几里得群 $SE(3)$ 的李代数 $se(3)$ 同构. Bergamasco (1997) 应用旋量代数进行机构综合, Ciblak 和 Lipkin (1998) 用旋量代数进行刚度分析.在 21 世纪初, Pennock 和 Meehan (2000) 回顾了旋量代数的发展, Frisoli 等 (2000)、Kong 和 Gosselin (2002) 展示了旋量代数在并联机构综合中的应用.在这一时期, Dai 和 Rees Jones (2001) 提出了旋量系关联关系理论,揭示了旋量代数的零空间结构 (Dai 和 Rees Jones, 2002), Soltani (2005) 直接以旋量代数为数学工具研究空间机构学, Lee、Wang 和 Chirikjian (2007) 运用旋量代数研究串联机构与多肽链, Müller (2011) 运用旋量代数的运算消除非独立的约束,可见旋量代数及与其相关的李群和李代数正逐渐成为机构学与机器人学的主要工具.这引出了本书的第二章和第三章.

1.2 有限位移旋量²与李群

有限位移旋量也称位移旋量,是李群 $SE(3)$ 的元素,也是位移子群的向量表示.有限位移旋量的研究最早可以追溯到 Chasles 运动 (Chasles, 1830).

²早期有采用微小位移旋量的称法,但更强调微小至无穷小位移.由于 Clifford 建立位移旋量与单位四元数的关系中,以及 Dimentberg 和其后学者对有限位移旋量的研究中都没有对微小进行限定,而且所有研究均称之为“finite displacement screw”或者“finite twist”,出于用词严谨性的考虑,本书采用“有限位移旋量”一词.

在 Chasles 运动的描述中,有限位移可以描述为绕轴的旋转与沿该轴的平移.这就给出了可微分的连续群,称为李群.李群是数学三大基本领域——代数学、几何学与分析学中前两者的交集.空间位移的旋量轴可以用矩阵描述,进而构建刚体绕旋量轴线旋转与沿轴线平移的算子.该位移旋量轴也可以用四元数与对偶四元数描述,以取代矩阵来表示刚体位移.

有限位移旋量起源于 Chasles (1830) 的研究,经历了 19 世纪爱尔兰天文物理学家和数学家、美国科学院首位外籍院士 William Rowan Hamilton (1844a) 研究的黄金时代,发展至采用 Euler-Rodrigues 四个参量来表述刚体位移方向的阶段.

这一参量表示法起始于法国数学家 Benjamin Olinde Rodrigues (1840) 发现的三个参数.这三个 Rodrigues 参数用来构建 Rodrigues 向量并建立 Rodrigues 平面与空间位移的 Rodrigues 公式.这一空间位移由有限螺旋运动 (Dai, 2006) 引起,从而可通过两向量的张量积构建 Rodrigues 旋转公式.这就建立了李代数 $so(3)$ 向特殊正交群 $SO(3)$ 的指数映射,这一映射可以通过对偶数延伸到 $se(3)$ 向 $SE(3)$ 的指数映射. Rodrigues 的研究 (Gray, 1980) 将运动与力分开考虑, Rodrigues 参数被 Cayley 用来建立反对称矩阵,并导出了 Cayley 旋转矩阵公式 (Cayley, 1875; Altmann, 1986).

Rodrigues 的研究发表在他的重要文章中 (Rodrigues, 1840). 除上述的三个参数外, Rodrigues 采用赋予半角正弦值的旋转轴线姿态三维向量加之半角余弦值的方法提出了另外四个参数.虽然这四参数通常称为 Euler 参数,但是应当全部归功于 Rodrigues (Altmann, 1989; Davidson 和 Hunt, 2004). 这就是这四个参数有时称为 Euler-Rodrigues 参数 (Cheng 和 Gupta, 1989) 的原因. Klein (1884) 指出, Euler-Rodrigues 参数是四元数的 Rodrigues 参数化 (Dai, 2006), 同 Hamilton 四元数等效.基于这四个参数, Rodrigues 推导出涵盖两个有限旋转的合成公式 (Rodrigues, 1840), 并建立了旋转矩阵.这一向量形式的合成公式建立了四元数的乘积理论,揭示了所有正交旋转的群特征以及李代数 $so(3)$ 向李群 $SO(3)$ 的指数映射的性质.这些正交群正是现在常用的特殊正交群 $SO(3)$.

尽管 Hamilton (1844b) 在他的四元数运算基础中应用了同样的公式,但正如 Cayley (1843, 1845) 在构建连续旋转公式时指出, Rodrigues 公式体现了四元数在旋转群中的巨大作用.多年后, Klein (1884) 强调了 Hamilton 和 Ro-

drigues 同时独立发现四元数这一历史事实.

在 1873 年, 为了运算的简洁, Clifford 发明了双四元数即现在所指的对偶四元数. 这已被成功地运用到运动学中 (McCarthy, 1990). Clifford 采用算子 ε 将绕轴旋转变换为沿轴平移, 成功地创建了对偶四元数理论 (Clifford, 1873, 1882; Shoham, 1999), 并将其与线性代数关联以表示刚体的任意位移, 从而构造出刚体位移群. 这阐明了有限位移旋量与 Clifford 代数对偶子代数的关系.

Clifford (1882) 系统地将旋量与四元数、对偶四元数以及刚体位移关联起来. 在研究中, Clifford 建立了一个完整的表格, 将以线矢量表示的旋转轴和旋量表示的矩量几何特性与速度旋量、力旋量作了关联, 并进一步与四元数和对偶四元数联系. 由此, 旋量理论可以用来描述刚体的有限螺旋运动. 可见, 有限位移旋量与李群早在它们各自早期研究中就存在紧密的内在关联. 这可以进一步由 Klein 的研究生涯论证, 在其开创划时代的李群和李代数的 Erlangen 纲领研究的同时, 他发现了旋量的互易性; 在研究旋量超二次曲面时, 与 Sophus Lie 共同发现了射影变换 (1870, 1871) 中的连续交换群轨迹. 这时期的研究发展了 Sophus Lie 的有限与连续群理论, 并由 Sophus Lie 和德国数学家 Friedrich Engel (1888, 1890, 1893) 合作写出了三卷划时代巨著. 在这些研究中, 作为李群的一种表示, 有限位移旋量给出了全周期运动及连续流形. 这引出了本书的第四章和第五章.

有限位移旋量的正式提出得益于 Dimentberg (1950, 1965, 1971) 及后来学者的研究. 这一理论的提出是旋量理论由瞬时到非瞬时的飞跃, 进而与对偶四元数、李群相关联. 没有这一步, 就没有旋量与对偶四元数以及李群的关联. 这也是旋量理论发展的必然结果.

1.3 螺旋位移理论与有限位移旋量的近代发展史

在第二次世界大战后, 尤其是 20 世纪 40 年代后期至 60 年代初期, 瞬时旋量和有限位移旋量的研究得到了复苏. 在这一时期, Dimentberg (1947, 1948, 1950) 采用带有对偶角半角正切的旋量轴表示有限螺旋位移. Dimentberg (1950, 1965, 1971) 是首位采用“有限位移旋量”名称的学者. 由此, 任意螺旋位移均可以由有限位移旋量表示. 刚体的螺旋运动可用旋转运动半角的对偶数形式表示为绕一个合成旋量轴的螺旋运动. 该合成螺旋运动的旋

量轴相当于相继绕两个旋量轴线的半角螺旋运动. 这两旋量与合成旋量轴正交并组成了旋转半角的对偶角.

在获取螺旋位移的过程中, Yang 和 Freudenstein (1964) 发展了有限位移旋量理论, 将对偶数的线矢量主部乘以四元数以组成对偶四元数的副部, 使该对偶四元数成为旋量算子, 其轴线用以完成螺旋位移. 根据 Blaschke (1958) 的研究, 旋量算子为时间的函数, 连续的空间运动可以由此获得. Yuan 和 Freuderstein (1971) 给出了这一有限螺旋运动对应的坐标变换. Bottema (1973) 在其后又做了一系列点和一系列线的位移研究. 一系列点的位移由位移旋量轴线簇完成, 其轴线簇生成线束, 即抛物柱形面或双曲抛物面. 一系列线的位移也由位移旋转轴线簇完成, 但其轴线簇形成三阶的线汇.

两组有限位移组合的几何关系由法国数学家 George Henri Halphen (1882) 首次提出, 并由 Roth (1967) 做了进一步的充实和完善. 据此, 有限螺旋运动的合成可采用 Roth 给出的旋量三角形定理并由有序的两个有限位移构建. 旋量三角形顶点位于三个旋量轴上, 三个旋量轴的相互公垂线为边长. 这一方法相当于将螺旋位移分解为两条反射直线 (Bottema 与 Roth, 1979). 随后 Tsai 和 Roth (1973) 基于旋量的五个几何要素与有限位移旋量柱形面的特性, 研究了有限分离位置的旋量轴的几何特性, 并对上述理论作了进一步发展. 该研究首次提出了有限位移旋量柱形面, 对应于 Ball (1900) 提出瞬时拟圆柱面.

为了表示有限位移旋量, Hunt (1987) 运用点 - 线 - 面的几何特性及刚体两任意位置的描述来定义有限位移旋量的轴线与旋距. Hunt 继而运用刚体在两位置上的有向平面与有向线段的两组比率, 得出五个必要条件来组建六个方程以确认有限位移旋量的 Plücker 齐次坐标.

除了直线坐标, 对偶矩阵也被用来研究螺旋位移. Pennock 和 Yang (1985) 采用对偶矩阵描述直线的坐标变换, 以此解决机器人的运动学逆解问题. McCarthy (1986) 揭示了对偶正交矩阵的特性, 以此建立串联机器人的封闭方程, 得出 Denavit-Hartenberg 的对偶数形式以及机器人 Jacobian 矩阵的对偶数形式. 四元数与对偶四元数也被进一步运用到球面运动链以及空间开环与闭环运动链 (McCarthy, 1990). 有限位移旋量被应用到机构分析中, Young 与 Duffy (1986) 运用有限螺旋位移确定机器人的极端位置. Angeles (1986) 基于刚体有限分离位置三个非线性点的二阶张量主值与方向, 提出算法以计算有限螺

旋位移. Pohl 和 Lipkin (1990) 采用空间映射方法将机器人对偶角转换为实数, 使机器人完成所需构态以达到所需工作空间范围内的位置. 并引以证实, 旋量主部的映射可以用来使机械臂的操作末端的位置误差达到最小.

1.4 有限位移旋量与李群的关联

在有限位移旋量的发展过程中, 有限位移旋量与李群的基本要素紧密相关. 它们明确的关联可见于 Hervé 采用李群描述运动副与刚体位移的研究, 且有限位移旋量的对偶正交矩阵形式可以表述为李群 $SE(3)$ 的六维表示. Selig 和 Rooney (1989) 表述了李群对五维映射空间中直线的作用. 这一研究显示出这一李群作用限于 Klein 二次曲面, 并将 Klein 二次曲面分为无穷远直线区域与有限位置直线区域. 任意有限位置直线的同构组由绕该直线的旋转, 加之沿该直线的平移组成. 这就导出了有限螺旋位移的李群表达式.

Samuel、McAree 和 Hunt (1991) 运用正交矩阵的不变量特性, 将以对偶正交矩阵形式表述的位移与旋量的几何特征进行关联. 该研究表明了旋量的几何特性与欧几里得群的矩阵表述对应, 并给出了依据对偶正交矩阵表述的有限螺旋运动. Dai、Holland 和 Kerr (1995) 研究了串联机器人的有限位移旋量表述与其有序合成与分解运算组合, 揭示了有限位移旋量的李群特性. 由此机器人末端的运动可以由有序的有限位移旋量运算构成的合成有限位移旋量表示, 这就给出了有限位移旋量的李群运算. Parkin (1990, 1992) 研究了有限位移旋量的表示以及与点-线表示的刚体有限螺旋位移轴线间的相似构象. Huang (1995, 1997) 揭示了三阶运动链的有限位移旋量系及其有限位移旋量的柱形面.

关于李群与刚体位移以及李代数与瞬时旋量的关联, Murray、Li 和 Sastry (1994) 给出了代数形式, Selig (2005) 明晰了这种关联, Dai (2012, 2014) 将李理论与 Clifford 代数带入到旋量代数和理论运动学中.

本书旨在从本质上揭示这种关联, 明晰地展示以伴随矩阵表示的有限位移旋量. 该部分给出的用来表示有限螺旋运动的有限位移旋量矩阵, 可用于路径与轨迹规划. 图 1.1 揭示了有限位移旋量与李群以及瞬时位移旋量与李代数的内在关联关系.

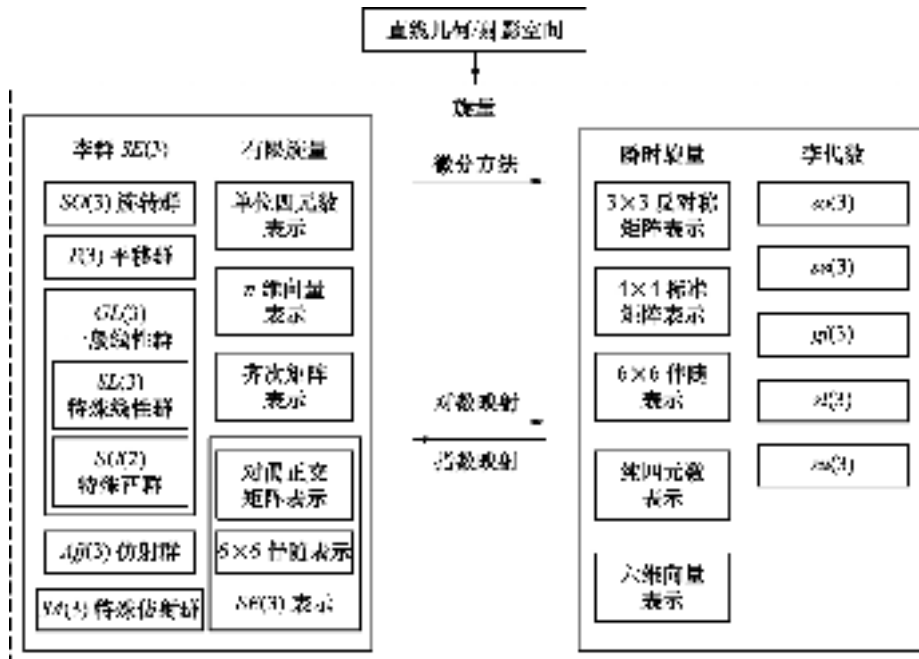


图 1.1 有限位移旋量与李群以及瞬时位移旋量与李代数之间的内在关联关系

1.5 旋量系及其关联关系理论

所有旋量的集合可构成一个由一组线性独立旋量生成的旋量系 S , 其阶数 n 可由旋量系的最大线性无关组确定。

对旋量系以及将其应用到理论运动学和动力学的研究可以追溯到 Ball (1876, 1900) 对瞬时拟圆柱面的研究, 这一研究奠定了二阶旋量系分类的基础. Dimentberg (1950, 1965) 研究了互易旋量系结构. Hunt (1967) 运用线丛将旋量系与空间机构以及活动度关联起来. Waldron (1966, 1967) 在机构的约束研究中, 从约束的接触几何特性出发研究两旋量系的特殊关系. 基于这些研究, Gibson 和 Hunt (1990) 采用射影几何方法提出了旋量系分类, Rico Martinez 和 Duffy (1992a, b, c) 采用正交空间与子空间理论研究了旋量系互易特性并给出了旋量系的分类. 这些研究系统地给出了旋量系的表述。

旋量系的研究不可避免地引出了旋量系与其互易旋量系的关联关系. 在研究机构旋量系的过程中, 旋量系与其互易旋量系的关联关系即为串联与并联机构中运动与力分析的关系. Dai 与 Rees Jones (2001) 首次采用集合论

研究这一关联关系,提出了判断旋量系与其互易旋量系关联关系的引理、定理与推论.这一关联关系理论由一阶、二阶、三阶及高阶旋量系与其互易旋量系的关系中推导而来,并在互易旋量系导出之前就根据旋量系的几何特征预测出旋量系间的关联关系,由此提出了从 n 阶旋量系导出其 $6-n$ 阶互易旋量系的新方法.

这一方法采用旋量系与其互易旋量系的关联关系理论,给出互易旋量系的零空间,从而判断给定旋量系的互易旋量系. Dai 与 Rees Jones (2002, 2003) 的研究指出,该零空间涵盖了机构与机械臂的运动与约束以及串并联的对偶性.他们进一步提出了移位分块和逐级增广方法,从而建立了旋量系的多维零空间³构造理论.这些将在第六、第七与第八章中阐述,其在运动几何学与机构学中的应用将在第九章论述机构旋量系对偶性、机构与机器人的运动与约束的过程中体现.

1.6 运动几何学与机构学

刚体位移及其相关理论的研究建立了机构与机器人系统研究的基础,有助于发明能够完成对称与连续运动的新机构.机构是具有固定杆件的连杆系.连杆系是用于传递运动和力的运动刚体系.当 19 世纪数学家们的注意力开始转向物理世界时,机构以其可动的几何特征吸引了不少数学家,触发了他们的灵感.数学家的参与又推动了运动几何学与机构学的发展,产生了发掘连杆系丰富多彩特性的新方法.典型的例子是法国数学家 Pierre Frédéric Sarrus (1853) 发明的 Sarrus 连杆机构. Sarrus 连杆机构是世界上第一个将旋转运动转换为准确的直线运动的连杆机构.该连杆机构由两组运动副构成,每组运动副包括三个相互平行的旋转副,是世界上最早的过约束空间连杆机构.

对机构的研究,实质上是对运动的几何体的研究.在研究向量微积分以及画法几何学的过程中,法国数学家 Raoul Bricard (1897) 对球体路径位移运动的特殊兴趣促使其发现了灵活多面体,由此发明了六个可动的六杆过约束连杆机构,包括三个可动的八面体连杆机构和三个分别具有对称于直线、

³零空间是矩阵的内核 (kernel), 指一个 $n \times k$ 线性方程组 $\mathbf{AX} = 0$ 的解向量构成的空间,也就是该方程组的解空间 (solution space). 这 n 个实数列向量 \mathbf{X} 作为矩阵的内核构成了欧几里得 n 维空间的线性空间,称零空间.

对称于平面与具有三面体形状的连杆机构 (Bricard, 1927). 对机构及其相应的几何体对称性的研究使得连杆机构的研究更加引人入胜. 剑桥大学数学讲师、英国皇家科学院院士 Geoffrey Bennett (1903) 在研究中提出了空间四连杆机构, 命名为**斜等值线**连杆机构, Bennett 连杆机构的任一旋转轴均与相邻两连杆垂直. 该机构可动需满足三个条件, 即相互对面的连杆长短一致, 相互对面的连杆两端的旋转轴夹角 (连杆扭曲角) 互为相反数, 且连杆扭曲角的正弦值与轴线相邻两连杆的长度成比例关系.

机器可抽象为由能够通过特定运动生成几何曲面的基本元素即运动副与连杆构成的运动链. 柏林技术大学教授 Franz Reuleaux 借助这些运动副的运动约束成功地描述了机器的约束. 他注意到了机构拓扑的重要性, 首次提出了一套严谨的机构拓扑描述符号. 基于此, 他进行了机构综合, 发表了机器运动学专著 (Reuleaux, 1875). Reuleaux 在运动副与运动链研究领域中做出的贡献使得他被后人誉为“运动学之父”. 同一时期, 德国数学家与工程师 Siegfried Heinrich Aronold (1872) 和英国皇家科学院院士、伦敦大学学院工程学讲席教授 Alexander BW Kennedy (1876) 提出了三刚体相对运动的三瞬心共线定理, 适用于直接或间接连接的三刚体. 该定理反映出了刚体相对运动的瞬心的内在固有特性, 是瞬时螺旋位移的纯转动特例.

瑞士雕塑家和几何学家 Paul Schatz (Heinz, 2008) 被柏拉图正多面体的美妙和对称性所吸引, 于 1929 年发现了具有丰富几何内涵的**可逆转立方体**. Schatz 进一步巧妙地将上述可逆转特性应用到工业搅拌机上, 并于 1942 年将此 Schatz 连杆机构的应用申请了专利, 取名为 Turbula (Schatz, 1942). 这一连杆机构是迄今为止唯一广泛应用于工业界的过约束连杆机构.

由于对机构存在浓厚的兴趣, Myard (1931) 创造性地将一对 Bennett 连杆机构连接起来, 并通过去除连接两 Bennett 连杆机构的公共连杆, 又将因此产生的一对邻接连杆固结, 发明了对称于平面的过约束五连杆机构. Goldberg (1943) 也采用同样的方法发明了一个过约束五连杆机构. 在后续研究中, Altmann (1954) 提出了一个作为 Bricard 对称于直线连杆机构特例的六连杆机构, Waldron (1968) 用两个 Bennett 连杆机构构建出一个六杆过约束连杆机构, 使得任意两个具有单活动度的单环连杆机构可以在空间享用公共轴.

在有关连杆机构的研究中, 旋量代数作为理论与数学工具显示出了优越性. 机构是机器人的骨架, 也是任意控制系统、视觉系统与机器人智能系

统的载体,这一理解已经被广泛接受.同时,由于机器人主体结构形式不一,展示出串联或并联形式机构、平面或空间形式机构,或由这些机构组合而成的其他形式机构.

以机构学为基础与核心的机器人学研究是复杂的系统研究,涉及运动学的位置与姿态分析及运动控制,也包括可用作控制的约束分析以及用作精度调整的刚度和柔度分析.这就自然引出了本书第九章,着重于机构与机器人的约束与活动度,以及机构旋量系与互易旋量系的关联关系.

1.7 本书概述

本书共由九章组成,全面深入地阐述旋量代数及其几何基础与旋量系理论及其关联关系,并将这些理论应用到运动几何学以及多种典型的机构与机器人中.这九章应用直线几何、射影几何与仿射几何、旋量代数、四元数、李群、李代数等数学理论阐述旋量理论的基本体系与核心内涵,并揭示刚体位移的固有特性以及其与有限位移旋量和李群的内在统一性.本书探讨旋量的互易性,揭示旋量系与其互易旋量系的内在联系以及有限位移旋量与李群的内在关联,进而演示有限位移旋量矩阵的一维及多维零空间特性.该特性可进一步用于求解互易旋量系,揭示有限位移旋量矩阵与李群的关联.本书最后阐述了旋量系的对偶性,并采用旋量代数与旋量系理论揭示经典机构的运动几何学特性及其固有属性.

本书第一章讲述并回顾直线几何、射影几何、旋量代数、有限位移旋量、李群的内涵及其内在关联与历史发展,初步阐述这些理论与运动几何学的联系.着重讲述旋量与有限位移旋量的各种表示方法以及与李群、李代数的各种表示方法的关系.之后,本书第二章自然地由旋量代数与射影几何的基础——直线几何开始,阐述点、线、面等基本几何元素的描述方法及其不变性特征,奠定旋量代数与旋量系理论的基础.第三章从旋量的原始定义出发,将旋量作为代数形式的几何体,以此阐述旋量代数的内涵与运算.旋量本质上是几何量,是速度旋量与力旋量的几何载体,该章以此阐述瞬时运动学及静力学与李代数及李括号之间的对应关系,从而引出旋量理论.基于旋量代数,第四章运用 Chasles 运动与 Rodrigues 参数描述刚体运动,进而揭示 Hamilton 四元数及 Clifford 对偶四元数与刚体运动的关联,从而给出有限位移旋量与李群的关系.这就自然地引出第五章,给出基于李群 $SE(3)$ 的有

限位移旋量矩阵, 阐述有限位移旋量与李群作用的关系; 该章揭示了有限位移旋量矩阵的特性及其分块后非对角线子矩阵特性, 非对角线子矩阵作为有限位移旋量矩阵的副部, 可以产生出新的矩阵迹; 该章进一步求取位移矩阵的特征旋量, 从而得到有限位移旋量, 并给出矩阵求导过程, 得到瞬时旋量, 由此揭示了李群运算的实质内涵。

本书第六章引出旋量系的概念, 阐述旋量互易性与独立性的几何与物理含义, 揭示机构运动学与静力学中的旋量组合及其线性相关性. 这就自然过渡到第七章的旋量与互易旋量理论, 给出旋量互易性的代数模型, 引入集合论建立旋量系与互易旋量系关联关系的通用定理, 由此分析旋量系的一阶、二阶、三阶及高阶系; 该章同时给出常见机构及抓举模型的旋量系. 第八章阐述旋量系的一维与多维零空间结构, 介绍求取互易旋量系的移位分块与逐级扩展方法; 该章进一步提出一种新的齐次线性方程组的求解法则, 并利用该法则求解常见的齐次线性方程组. 这一求解法则与传统的 Gauss-Seidel 消元法相比, 拥有更高的精度和计算效率。

第九章阐述旋量理论在运动几何学中的演绎以及旋量系的对偶性, 即速度旋量与力旋量的偶合关系以及串联、并联机构与抓持系统的偶合关系. 这一对偶关系可由机构输出杆件的运动与机构支链的关系体现出来, 尤其在经典的 Sarrus 连杆机构以及在可展机构中的扩展 Sarrus 连杆机构中体现出来. 该章阐述了 Schatz 连杆机构运动旋量系, 研究其零空间构成的约束旋量系与求解方法, 给出了约束旋量系变化对约束力旋量分布的影响, 并分析其运动机理。

本书拥有雄厚的数学基础、宽广的背景知识、严谨的分析推导和紧密的实际运用, 可作为活跃在数学科学、理论运动学、机构学、机器人学、计算机科学、控制理论以及自动化等领域的学者和学生的参考书或教材。

参 考 文 献

- Altmann, P.G. (1954) Communications to Grodzinski, P. and M'ewen, E, Link mechanisms in modern kinematics, *P. I. Mech. Eng.*, **168**(37): 889-896.
- Altmann, S.L. (1986) *Rotations, Quaternions and Double Groups*, Clarendon Press, Oxford, England.
- Altmann, S.L. (1989) Hamilton, Rodrigues, and the quaternion scandal, *Mathematics Magazine*, **62**(5): 291-308.

- Angeles, J. (1986) Automatic computation of the screw parameters of rigid body motions, Part I: Finitely-separated positions, *ASME J. Dyn. Syst.*, **108**(1): 32-38.
- Aronhold, S.H. (1872) Outline of kinematic geometry, *Verein zur Befoerderung des Gewerbeleisses in Preussen*, **51**: 129-155.
- Baker, J.E. (1978) An overconstrained 5-bar with a plane of quasi-symmetry, *Mech. Mach. Theory*, **13**(4): 467-473.
- Ball, R.S. (1871) The theory of screws: A geometrical study of the kinematics, equilibrium, and small oscillations of a rigid body, *Transactions of the Royal Irish Academy*, **25**: 137-217.
- Ball, R.S. (1876) *Theory of Screws: A Study in the Dynamics of a Rigid Body*, Hodges, Foster, and Co., Grafton-Street, Dublin.
- Ball, R.S. (1900) *A Treatise on the Theory of Screws*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Bennett, G.T. (1903) A new mechanism, *Engineering*, **76**: 777-778.
- Bergamasco, M. (1997) Force replication to the human operator: The development of arm and hand exoskeletons as haptic interfaces, *The 7th international symposium of robotics research*, Springer, London.
- Bicchi, A. (1993) Force distribution in multiple whole-limb manipulation, *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*.
- Bicchi, A. (1995) On the closure properties of robotic grasping. *Int. J. Robot. Res.*, **14**(4): 319-334.
- Blaschke, W. (1958) Anwendung dualer quaterernionen anf die kinematik, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae*, 1-13.
- Bottema, O. (1973) On a set of displacements in space, *J. Eeg. Ind.*, **95**: 451-454.
- Bottema, O. and Roth, B. (1979) *Theoretical Kinematics*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, North-Holland, Amsterdam.
- Brand, L. (1947) *Vector and Tensor Analysis*, Seventh printing (1958), John Wiley & Sons, New York.
- Bricard, R. (1897) Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé, *Journal de mathématiques pures et appliquées, Liouville*, **3**: 113-148.
- Bricard, R. (1927) *Leçons De Cinématique*, Gauthier-Villars, Paris.
- Cartan, É. (1894) *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, (Killing form) Thesis, Nony.
- Cayley, A. (1843) On the motion of rotation of a solid body, *Cambridge Mathematics Journal*, **3**: 224-232.
- Cayley, A. (1845) On certain results relating to quaternions, *Phil. Mag.*, **26**(171): 141-145.
- Cayley, A. (1860) On a new analytical representation of curves in space, *Quarterly J. of Pure and Appl. Math*, **III**: 225-236.

- Cayley, A. (1875) On three-bar motion, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **s1-7**(1): 136-166.
- Chasles, M. (1830) Note sur le propriétés générales du système de deux corps semblables entr'eux et places d'une manière quelconque dans l'espace; et sur le déplacement fini ou infiniment petis d'un corps solide libre. *Bull. Sci. Mach*, par Ferussac., **14**: 321-326.
- Cheng, H. and Gupta, K.C. (1989) An historical note on finite rotations, *J. Appl. Mech.*, **56**(1): 139-145.
- Ciblak, N. and Lipkin, H. (1998) Synthesis of stiffness by springs, *ASME Design Technical Conference*, Sept. 13-16, Atlanta, GA, USA.
- Chirikjian, G.S. (2011) *Stochastic Models, Information Theory, and Lie Groups, Volume 2: Analytic Methods and Modern Applications*, Birkhäuser, Boston.
- Clifford, W.K. (1873) Preliminary sketch of bi-quaternions, *Proc. London Math Society*, **4**(64/65): 381-395.
- Clifford, W.K. (1882) *Mathematical Papers*, (ed R. Tuckker), Macmillan & Co., London.
- Dai, J.S. (1993) *Screw Image Space and Its Application to Robotic Grasping*, PhD Dissertation, University of Salford, Manchester.
- Dai, J.S. (2006) A historical review of the theoretical development of rigid body displacements from Rodrigues parameters to the finite twist, *Mech. Mach. Theory*, **41**(1): 41-52.
- Dai, J.S. (2010) Surgical robotics and its development and progress. *Robotica*, **28**(2): 161.
- Dai, J.S. (2012) Finite displacement screw operators with embedded Chasles' motion, *ASME J. Mech. Rob.*, **4**(4): 041002.
- Dai, J.S. (2014) *Screw Algebra and Kinematic Approaches for Mechanisms and Robotics*, Springer, London.
- Dai, J.S. and Ding, X. (2006) Compliance analysis of a three-legged rigidly-connected platform device, *J. Mech. Des.*, **128**(4): 755-764.
- Dai, J.S. and Rees Jones, J. (2001) Interrelationship between screw systems and corresponding reciprocal systems and applications, *Mech. Mach. Theory*, **36**(5): 633-651.
- Dai, J.S. and Rees Jones, J. (2002) Null space construction using cofactors from a screw algebra context, *Proc Royal Society London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **458**(2024): 1845-1866.
- Dai, J.S. and Rees Jones, J. (2003) A linear algebraic procedure in obtaining reciprocal screw systems, *J. Robotic Syst.*, **20**(7): 401-412.
- Dai, J.S., Holland, N. and Kerr, D.R. (1995) Finite twist mapping and its application to planar serial manipulators with revolute Joints, *J. Mech. Eng. Sci.*, **209**(C3): 263-272.
- Dai, J.S., Huang, Z. and Lipkin, H. (2004) Screw system analysis of parallel mechanisms

- and applications to constraint and mobility study, *Proc. of the 28th Biennial Mechanisms and Robotics Conference*, Sept. 28-Oct. 2, Salt Lake City, USA.
- Dai, J.S., Huang, Z. and Lipkin, H. (2006) Mobility of overconstrained parallel mechanisms, *ASME J. Mech. Des.*, **128**(1): 220-229.
- Davidson, J. and Hunt, K.H. (2004) *Robots and Screw Theory, Applications of Kinematics and Statics to Robotics*, Oxford University Press, New York.
- Davies, T.H. (1983) Mechanical networks-I, II, and III, *Mech. Mach. Theory*, **18**(2): 95-101, 103-106, 107-112.
- Dedron, J. and Itard, J. (1959) *Mathématiques et Mathématiciens*, Magnard, Paris.
- Denavit, J. and Hartenberg, R.S. (1955) A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices, *ASME, J. Appl. Mech.*, **22**: 215-221.
- Dimentberg, F.M. (1947) Konechnyye pe remeshcheniya prostranstvennogo chetyrekhzvennika stailindricheskimi parami isluchal pass3vnykh svyazey (Finite displacements of a three-dimensional four-element chain with cylindrical pairs, and cases of passive couplings), *PMM*, **XI**(6): 10-19.
- Dimentberg, F.M. (1948) A general method of investigation of finite displacements of three-dimensional mechanisms, and certain cases of passive couplings, *Trudi Semin. po. Teor. Mash. Mekh*, Akad. Nauk USSR, **5**(17): 5-39.
- Dimentberg, F.M. (1950) *The determination of the positions of spatial mechanisms*, Izdat, Akad, Moscow, USSR.
- Dimentberg, F.M. (1965) *The screw calculus and its application to mechanics* (in Russian) Izdat. Nauka, Moscow; English translation by Foreign Technology Division, U.S. Department of Commerce, (N.T.I.S), No. AD 680993, WP-APB, Ohio, 1969.
- Dimentberg, F.M. (1971) Method of screws in the applied mechanics, *Moscow I*, **971**: 264.
- Dimentberg, F.M. and Kislitsyn, S.G. (1960) Application of screw calculus to the analysis of three-dimensional mechanisms, *Trudy II Vsesoyuznogo soveshchaniya po problemam dinamiki mashin*.
- Ding, H. and Wu, J. H. (2007) Point-to-point motion control for a high-acceleration positioning table via cascaded learning schemes, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **54**(5): 2735-2744.
- Ding, H. and Xiong C.H. (2006) Motion stages for electronic packaging: Design and control, *IEEE Robotics & Automation Magazine*, **13**(4): 51-61.
- Ding, X. and Dai J.S. (2008) Characteristic equation-based dynamics analysis of vibratory bowl feeders with three spatial compliant legs, *IEEE T. Autom. Sci. Eng.*, **5**(1): 164-175.
- Duffy, J. (1989) 机构和机械手分析, 廖启征, 刘新昇, 仇长浩, 等, 译, 北京邮电学院出版社, 北京.

- Eves, H. (1972) *A Survey of Geometry*, Allyn and Bacon, Inc.
- Frisoli, A., Checcacci, D., Salsedo, F. et al. (2000) Synthesis by screw algebra of translating in-parallel actuated mechanisms, *Advances in Robot Kinematics*, Springer Netherland.
- Gibson, C.G. and Hunt, K.H. (1990) Geometry of Screw Systems, *Mech. Mach. Theory*, **25**(1): 1-27.
- Gogu, G. (2006) Fully-isotropic hexapods, *Advances in Robot Kinematics*, **5**: 323-330.
- Goldberg, M. (1943) New five-bar and six-bar linkages in three dimensions, *ASME*, **65**(1): 649-663.
- Gray, J.J. (1980) Olinde Rodrigues' paper of 1840 on transformation groups, *Archive for History of Exact Sciences*, **21**(4): 375-385.
- Grübler, M. (1917) *Getriebelehre: Eine Theorie des Zwanglaufes und der ebenen Mechanismen*, Springer.
- Halphen, M. (1882) Sur la théorie du déplacement, *Nouvelles Annales de Math.*, **3**(1): 296-299.
- Hamilton, W.R. (1844a) On quaternions or on a new system of imaginaries in algebra (incl. Letter to Graves J.T., dated 17 October, 1843), *Philosophical Magazine*, 3rd series, **25**(163): 10-13.
- Hamilton, W.R. (1844b) On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions, *Proceeding of the Royal Irish Academy*, **2**: 424-434.
- Heinz, A. (2008) Development of mathematical imagination of 3-dimensional polyhedra through history and inversions phenomena, *Jupiter*, **3**, Verlag am Goetheanum, Dornach/Switzerland.
- Hervé, J.M. (1978) Analyse structurelle des mécanismes par groupe des déplacements, *Mech. Mach. Theory*, **13**(4): 437-450.
- Huang, C. (1995) On the finite screw system of the third order associated with a revolute-revolute chain, *ASME, J. Mech. Design*, **116**(3): 875-883.
- Huang, C. (1997) The cylindroid associated with finite motion of the Bennett mechanism, *ASME, J. Mech. Des.*, **119**(4): 521-524.
- Huang, S. and Schimmels, J.M. (2000) The bounds and realization of spatial compliances achieved with simple serial elastic mechanisms, *IEEE Trans. Robot. Automat.*, **16**(1): 99-103.
- Huang, S. and Schimmels, J.M. (2002) The duality in spatial stiffness and compliance as realized in parallel and serial elastic mechanisms, *ASME J. Dyn. Syst.*, **124**(1): 76-84.
- Huang, Z. and Li, Q.C. (2003) Type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel mechanisms using constraint-synthesis method, *Int. J. Robot. Res.*, **22**(1): 59-79.
- Hunt, K. (1978) *Kinematic Geometry of Mechanisms*, Clarendon Press, Oxford, England.

- Hunt, K.H. (1967) Screw axes and mobility in spatial mechanisms via the linear complex, *J. Mechanisms*, **2**(3): 307-327.
- Hunt, K.H., (1987) Manipulating a body through a finite screw displacement, *Proc 7th IFToMM World Congress*, Sevilla, Spain.
- Kennedy, A.B.W. (1876) *Kinematics of Machinery*, Macmillan, Dover.
- Klein, F. (1869a) Die allgemeine lineare transformation der linien-co-ordinaten, *Math. Ann.*, **II**: 366-371.
- Klein, F. (1869b) Zur theorie der linien-cómplexe des ersten und zweiten Grades, *Math. Ann.*, **II**: 198-226.
- Klein, F. (1871) Notiz betreffend den Zusammenhang der Linien-geometrie mit der Mechanik starrer Körper, *Math. Ann.*, **IV**: 403-415.
- Klein, F. (1872) Vergleichende betrachtungen über neuere geometrische forschungen (A comparative review of recent researches in geometry), *Mathematische Annalen*, **43** (1893) 63-100 (Also: Gesammelte Abh. **1**, Springer, 1921, 460-497).
- Klein, F. (1884) *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Tubner, Leipzig. Translated as: *Lectures on the icosahedron and the solutions of equations of the fifth*, 2nd ed., (Translated by Morrice, G.G.), Ballantyne, Hanson Co., 1914; Dover Publications, New York, 1956.
- Klein, F. and Lie, S. (1870) *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces*.
- Klein, F. and Lie, S. (1871) Ueber diejenigen ebenen curven, welche durch ein geschlossenes system von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen transformationen in sich übergehen, *Mathematische Annalen*, **4**(1): 50-84.
- Kong, X. and Gosselin, C.M. (2002) Type synthesis of linear translational parallel manipulators, *Advances in Robot Kinematics*: 453-462.
- Kutzbach, K. (1929) Mechanische Leitungsverzweigung Maschinenbau, *Der Betrieb*, **8**: 710-716.
- Lakshminarayana, K. (1978) Mechanics of form closure, *ASME Paper 78-DET-32*, New York.
- Lee, K., Wang, Y. and Chirikjian, G.S. (2007) O(n) mass matrix inversion for serial manipulators and polypeptide chains using Lie derivatives, *Robotica*, **25**(6): 739-750.
- Lie, S. (1888) *Theorie der Transformation sgruppen I* (in German), Leipzig: B. G. Teubner. Written with the help of Engel, F.
- Lie, S. (1890) *Theorie der Transformation sgruppen II* (in German), Leipzig: B. G. Teubner. Written with the help of Engel, F.
- Lie, S. (1893) *Theorie der Transformationsgruppen III* (in German), Leipzig: B. G. Teubner. Written with the help of Engel, F.

- Loncaric, J. (1985) *Geometrical Analysis of Compliant Mechanisms in Robotics*, PhD Dissertation, Harvard University.
- McCarthy, J.M. (1986) Dual orthogonal matrices in manipulator kinematics, *Int. J. Robot. Res.*, **5**(2): 45-51.
- McCarthy, J.M. (1990) *An Introduction to Theoretical Kinematics*, The MIT Press, London.
- Mises, R.V. (1924) Motorrechnung: Ein neues hilfsmittel in der mechanik, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **4**(2): 155-181. Trans: Baker, E.J., and Wolhart, K., *Motor Calculus: A New Theoretical Device for Mechanics*, (Graz, Austria: Institute for Mechanics, University of Technology, 1996).
- Mohamed, M.G. and Duffy, J. (1985) A direct determination of the instantaneous kinematics of fully parallel robot manipulators, *ASME J. Mech. Transm.*, **107**(2): 226-229.
- Mozzi, G. (1763) Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi, *Stamperia di Donato Campo*, Napoli.
- Müller A. (2011) Semialgebraic regularization of kinematic loop constraints in multibody system models, *ASME Trans. J. Comp. and Nonlinear Dyn.*, **6**(4): 041010.
- Murray, R.M., Li, Z. and Sastry, S.S. (1994) *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press, New York.
- Myard, F.E. (1931) Contribution La Géométrie, *Societe mathématiques de France*, **59**(1): 183-210.
- Owens, F.W. (1909) Review: The axioms of descriptive geometry by A. N. Whitehead, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **15**(9): 465-466.
- Parkin, I.A. (1990) Coordinate transformations of screws with applications to screw systems and finite twists, *Mech. Mach. Theory*, **25**(6): 689-699.
- Parkin, I.A. (1992) A third conformation with the screw systems: Finite twist displacements of a directed line and point, *Mech. Mach. Theory*, **27**(2): 177-188.
- Patterson, T. and Lipkin, H. (1993) A classification of robot compliance, *ASME J. Mech. Des.*, **115**(3): 581-584.
- Pennock G.R. and Meehan P.J. (2000) Geometric insight into the dynamics of a rigid body using the theory of screws, *Proceedings of A Symposium Commemorating the Legacy, Works, and Life of Sir Robert Stawell Ball Upon the 100th Anniversary of A Treatise on the Theory of Screws*.
- Pennock, G.R. and Yang, A.T. (1985) Application of dual-number matrices to the inverse kinematics problem of robot manipulators, *ASME, J. Mech. Transm.*, **107**(2): 201-208.
- Plücker, J. (1868—1869) *Neue Geometrie des Raumes: Gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*, Leipzig (Trübner, B.G. ed.), 1-374.

- Pohl, E.D. and Lipkin, H. (1990) Kinematics of complex joint angles in robotics, *Proc 1990 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, **1**: 86-91, Los Alamitos, CA.
- Poinsot, L. (1806) Sur la composition des moments et la composition des aires, *Paris Journal de l'Ecole Polytechnique*, **6**(13): 182-205.
- Reuleaux, F. (1875) *Theoetische Kinematik, Gundzüge einer Theorie des Maschinenwesens*, Title given in a collected works in *Berliner Verhandlungen*.
- Rico Martínez, J.M. and Duffy, J. (1992a) Orthogonal spaces and screw systems, *Mech. Mach. Theory*, **27**(4): 451-458.
- Rico Martínez, J.M. and Duffy, J. (1992b) Classification of screw systems I: One- and two-systems, *Mech. Mach. Theory*, **27**(4): 459-470.
- Rico Martínez, J.M. and Duffy, J. (1992c) Classification of screw systems II: Three-systems, *Mech. Mach. Theory*, **27**(4): 471-490.
- Rico Martínez, J.M. and Duffy, J. (1996) An application of screw algebra to the acceleration analysis of serial chains, *Mech. Mach. Theory*, **31**(4): 445-457.
- Rico Martínez, J.M., Gallegos, V. and Duffy, J. (1998) Screw polygons, finite screws, and biquaternions, *Proceedings of the 1998 ASME Design Engineering Technical Conference*, paper DETC98/MECH-5892, Sept., Atlanta, USA.
- Rodrigues, O. (1840) Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire, *Journal de Mathématiques*, **5**: 380-440.
- Roth, B. (1967) On the screw axes and other special lines associated with spatial displacements of a rigid body, *Journal of Engineering for Industry*, **89**(1): 102-110.
- Samuel, A.E., McAree, R.R. and Hunt, K.H. (1991) Unifying screw geometry and matrix transformations, *Int J Robot. Res.*, **10**(5): 454-472.
- Sarrus, P.T. (1853) Note sur la transformation des mouvements rectilignes alternatifs, *en mouvements circulaires, et reciproquement*, *Académie des Sciences*, **36**: 1036-1038.
- Schatz, P. (1942) Mechanism producing wavering and rotating movements op receptacles, *U.S. Patent No. 2, 302, 804*.
- Selig, J.M. (2005) *Geometric Fundamentals of Robotics*, Springer, New York.
- Selig, J.M. and Dai, J.S. (2005) Dynamics of vibratory bowl feeders, *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Barcelona, Spain, April, 3288-3293.
- Selig, J.M. and Ding, X. (2002a) Structure of the spatial stiffness matrix, *Int. J. Robot. Autom.*, **17**(1): 1-16.
- Selig, J.M. and Ding, X. (2002b) Diagonal spatial stiffness matrices, *Int. J. Robot. Autom.*, **17**(2): 100-106.

- Selig, J.M. and Rooney, J. (1989) Reuleaux pairs and surfaces that cannot be gripped, *Int. J. Robot. Res.*, **8**(5): 79-87.
- Shoham, M. (1999) A note on Clifford's derivation of bi-quaternions, *10th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, IFToMM, Finland.
- Soltani, F. (2005) Kinematic synthesis of spatial mechanisms using algebra of exponential rotation matrices, PhD Dissertation, Middle East Technical University.
- Somov, P. (1900) Über Ge biete von Schraubenge schwindigkeiten eines starren Körpers bievverschiedener Zahl von Stützflächen, *Zeischrift für Mathematic and Physik*, **45**: 245-306.
- Su, H., Dietmaier, P. and McCarthy, J. M. (2003) Trajectory planning for constrained parallel manipulators, *ASME J. Mech. Des.*, **125**(4): 709-716.
- Su, H., Dorozhkin, D. V. and Vance, J. M. (2009) A screw theory approach for the conceptual design of flexible joints for compliant mechanisms, *ASME J. Mech. Rob.*, **1**(4): 041009.
- Tsai, L.W. and Roth, B. (1973) Incompletely specified displacements: Geometry and spatial linkage synthesis, *ASME, J. Eng. Ind.*, **95**(B): 603-611.
- Waldron, K.J. (1966) The constraint analysis of mechanisms, *J. Mechanisms*, **1**(2): 101-114.
- Waldron, K.J. (1967) A family of overconstrained linkages, *J. Mechanisms*, **2**(2): 201-211.
- Waldron, K.J. (1968) Hybrid overconstrained linkages, *J. Mechanisms*, **3**(2): 73-78.
- Weyl, H. (1944) David Hilbert. 1862—1943, *Obituary Notices of Fellows of the Royal Society*, **4**(13): 547-553.
- Whitehead, A.N. (1907) *The Axioms of Descriptive Geometry*, Cambridge University Press.
- Whitney, D.E. (1982) Quasistatic assembly of compliantly supported rigid parts, *ASME J. Dyn. Syst.*, **104**(1): 65-77.
- Yang, A.T. and Freudenstein, F. (1964) Application of dual-number quaternion algebra to the analysis of spatial mechanisms, *ASME, J. Appl. Mech.*, **86**(2): 300-309.
- Young L. and Duffy J. (1986) A theory for the articulation of planar robots, *ASME J. Mech. Transm.*, **109**(1): 29-36.
- Yuan, M.S.C. and Freudenstein, F. (1971) Kinematics analysis of spatial mechanisms by means of screw coordinates, Part I: Screw coordinates, *J. Eng. Ind.*, **93**(1): 61-66.
- Zhao, T.S., Dai, J.S. and Huang, Z. (2002) Geometric analysis of overconstrained parallel manipulators with three and four degrees of freedom, *JSME International Journal, Series C, Mechanical Systems, Machines Elements and Manufacturing*, **45**(3): 730-740.
- Zhao, T.S., Dai, J.S. and Huang, Z. (2002) Geometric synthesis of spatial parallel manipulators with fewer than six degrees of freedom, *J. Mech. Eng. Sci.*, **216**(12):

1175-1185.

- Zhu, X. Y. and Ding, H. (2006) Computation of force closure grasp: An iterative algorithm, *IEEE Transactions on Robotics*, **22**(1): 172-179.
- Zhu, X. Y. and Ding, H. (2007) An efficient algorithm for grasp synthesis and fixture layout design in discrete domain, *IEEE Transactions on Robotics*, **23**(1): 157-163.
- 曹惟庆 (2002) 连杆机构的分析与综合, 2 版, 科学出版社, 北京.
- 陈维桓 (2001) 微分流形初步, 高等教育出版社, 北京.
- 戴建生 (2014) 机构学与机器人学的几何基础与旋量代数, 高等教育出版社, 北京.
- 高峰, 杨加伦, 葛巧德 (2011) 并联机器人型综合的 GF 集理论, 科学出版社, 北京.
- 黄真, 孔令富, 方跃法, (1997) 并联机器人机构学理论及控制, 机械工业出版社, 北京.
- 克来格 (2006) 机器人学导论, 负超, 译, 机械工业出版社, 北京.
- 梁崇高, 陈海宗 (1993) 平面连杆机构的计算设计, 广东教育出版社, 广州.
- 宋伟刚 (2007) 机器人学: 运动学、动力学与控制, 科学出版社, 北京.
- 熊有伦 (1992) 机器人学, 机械工业出版社, 北京.
- 熊有伦 (1989) 精密测量的数学方法, 中国计量出版社, 北京.
- 许以超 (2008) 线性代数与矩阵论, 高等教育出版社, 北京.
- 杨廷力 (2004) 机器人机构拓扑结构学, 机械工业出版社, 北京.
- 于靖军, 刘辛军, 丁希仑 (2014) 机器人机构学的数学基础, 2 版, 机械工业出版社, 北京.
- 张启先 (1984) 空间机构的分析与综合, 机械工业出版社, 北京.
- 赵景山, 冯之敬, 褚福磊 (2009) 机器人机构自由度分析理论, 科学出版社, 北京.
- 邹慧君, 高峰 (2011) 现代机构学进展: 第 2 卷, 高等教育出版社, 北京.

第二章 直线几何

旋转的轴线、平移的方向线以及力的作用线均可表示为三维空间中的直线, 即线矢量. 在三维空间中运动的机器人末端杆件可以等同于一条直线, 机器人的运动使这一条直线成为母线并绘出直纹面. 因此, 线矢量所代表的直线是描述运动和力的基本几何元素. 由于旋量是具有旋距的线矢量, 所以直线几何是旋量代数的基础, 是李代数 $se(3)$ 的几何解释.

本章介绍直线几何的基本原理, 通过其表达式及数学公式, 研究直线几何的特性以及不变性, 为后续章节的旋量代数和李代数奠定基础.

2.1 点、向量和直线的坐标

2.1.1 位置向量和姿态向量

如图 2.1 所示, 从坐标系原点 O 到点 P 的位置向量 \boldsymbol{r} , 通常以向量形式并采用列向量方式表示, 为

$$\boldsymbol{r} = (r_x, r_y, r_z)^T \quad (2.1)$$

同理, 自由向量可表示为

$$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$$

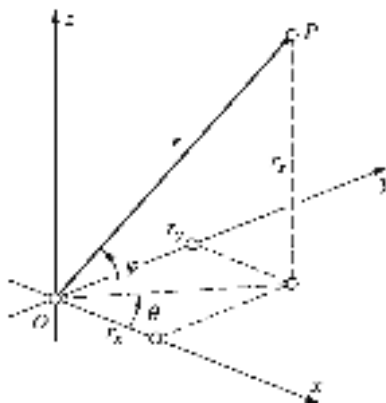


图 2.1 点的位置向量

单位向量可写为

$$l = (l, m, n)^T \quad (2.2)$$

该向量称为姿态向量¹或直线的轴线. 图 2.2 中的向量 l 的方向可表示为

$$\varphi = \arcsin n \text{ 和 } \theta = \arcsin \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2}} = \arcsin \frac{m}{\sqrt{1 - n^2}} \quad (2.3)$$

2.1.2 线矢量

向量 l 的方向可以由式 (2.3) 确定, 但其位置不确定, 即 l 为自由向量. 如用位置向量 r 来确定向量 l 的位置, 则得到图 2.2 的线矢量.

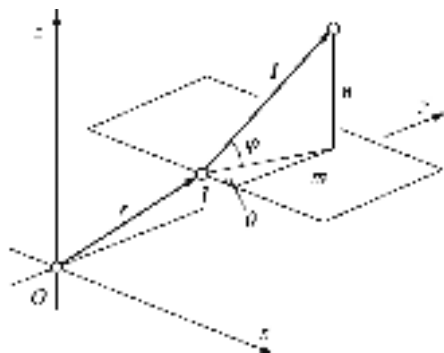


图 2.2 直线的位置向量和姿态向量

¹直线的姿态向量也称方向向量. 但在用直线表述刚体运动时, 常用姿态向量, 为了与后面刚体运动描述一致, 与位置向量相对应, 此处采用姿态向量的说法.

定义 2.1 向量所在的直线对原点 O 取矩可得线矢量的矢矩, 记为 l_0 , 即

$$l_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{l} \quad (2.4)$$

根据式 (2.1) 和式 (2.2) 给出的向量表示展开上式可得

$$l_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ l & m & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_y & r_z \\ m & n \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} r_x & r_z \\ l & n \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ l & m \end{vmatrix} \mathbf{k} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k} \quad (2.5)$$

式中, 向量 \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 、 \mathbf{k} 为沿 x 、 y 、 z 轴线的单位向量.

定义 2.2 线矢量 \mathbf{L} 为六维向量, 含主部与副部两部分, 也可称原部与对偶部. 主部为线矢量的轴线 \mathbf{l} , 副部为该轴线相对原点的矢矩 l_0 . 可写为

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ l_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{l} \end{pmatrix} = (l, m, n, p, q, r)^T \quad (2.6)$$

注释 2.1 线矢量为依附在空间某一直线上的向量.

在线矢量中, 以下两个等式成立, 即

$$\|\mathbf{l}\| = 1 \quad (2.7)$$

和

$$\mathbf{l} \cdot l_0 = \mathbf{l} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{l}) = 0 \quad (2.8)$$

式 (2.8) 给出标量三重积², 并给出了直线的二阶约束. 在射影几何中, 该二次约束定义了五维射影空间的超二次曲面, 也称为 **Klein 二次曲面**. 三维空间中的所有直线以及五维射影空间中的超二次曲面上的所有点均满足该二阶约束, 因此, 可通过该二阶约束将三维空间中的直线映射为 Klein 二次曲面上的点. 同时式 (2.7) 表明姿态向量 \mathbf{l} 为单位向量. 由式 (2.7) 与式 (2.8) 可见, 虽然线矢量为六维向量, 但独立变量只有四个, 这将在 2.7.1 节继续讨论.

2.1.3 Klein 型与 Klein 二次曲面

定义 2.3 设线矢量 \mathbf{L}_1 、 \mathbf{L}_2 为六维向量空间 \mathbb{R}^6 中的元素, \mathbf{l}_1 、 \mathbf{l}_2 与 l_{10} 、 l_{20} 分别表示两个线矢量的姿态向量和对坐标原点的矢矩, 则对于三维空间中

²标量三重积也称混合积.

的任意线矢量 L_1 、 L_2 , Klein 型可表示为

$$Kl(L_1, L_2) = l_1 \cdot l_{20} + l_2 \cdot l_{10} \quad (2.9)$$

注释 2.2 在本章后面 2.8 节的论述中, 通过 Klein 型可定义两条直线的互矩. 在第三章讲述的旋量代数中, 通过 Klein 型可定义两个旋量的互易积. 可以证明, Klein 型和第三章给出的 Killing 型均为定义在六维向量空间 \mathbb{R}^6 上的双线性型.

定义 2.4 对于三维空间中的任意线矢量 L , 由式 (2.9) 可知, Klein 型对应的二次型为

$$Kl(L, L) = 2l \cdot l_0$$

由式 (2.8) 可以得出

$$Kl(L, L) = 0$$

该式即为由 Klein 型的二次型定义的线矢量的自互易特性. 同时, 可将上式视为五维射影空间中的二阶约束, 因此该式同时定义了五维射影空间中的超二次曲面, 又称为 Klein 二次曲面 (Klein, 1878).

定义 2.5 超二次曲面是 d 维空间的 $d-1$ 维超曲面, 可用来描述二次多项式零点的轨迹.

Klein 二次曲面对于一一般的旋转和平移具有不变性. 三维空间中的直线与五维射影空间中 Klein 二次曲面上的点均满足式 (2.8) 所示的二阶约束, 因此可将直线看作 Klein 二次曲面上的点 (Klein, 1878), 进而构成五维射影空间中的四维向量空间, 本章后续将对此进行更深入的阐述. 对于线矢量的六个坐标, 式 (2.7) 和式 (2.8) 提供了两个约束, 因此只有四个坐标相互独立. 换言之, 确定线矢量的方向需要两个参量, 确定其位置则需要另外两个参量. 例如, 给出直线与通过原点的平面之间的夹角及直线与该平面的交点与原点之间的距离, 即可确定线矢量的位置.

关于射影几何及齐次坐标更为详细的阐述将在 2.3 节给出.

2.2 直线的向量方程

直线在空间的位置可由轴线 $l = (l, m, n)^T$ 上任意点的位置向量 r_1 给定, 由此直线上任一点 P 都可表示为

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda \boldsymbol{l} \quad (2.10)$$

其中, λ 是任意实数. 如图 2.3 所示, 姿态向量 \boldsymbol{l} 也可采用以下形式表示为通过点 \boldsymbol{r} 和 \boldsymbol{r}_1 的直线, 即

$$\boldsymbol{l} = \lambda(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \quad (2.11)$$

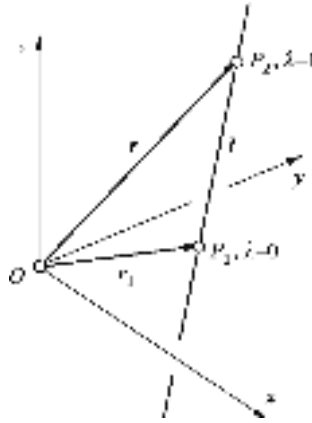


图 2.3 用两个位置向量描述的直线

如图 2.3 所示, 因为 $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$ 与 \boldsymbol{l} 平行, 所以

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{l} = 0$$

变换上式得

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}_0 \quad (2.12)$$

式中, \boldsymbol{l}_0 为直线相对原点 O 的矢矩. 该式表明式 (2.4) 给出的线矢量矢矩的定义具有明确的几何意义, 同时向量 \boldsymbol{l} 与 \boldsymbol{l}_0 满足式 (2.8) 所示的二阶约束.

用垂直于直线的位置向量 \boldsymbol{r}_0 替换位置向量 \boldsymbol{r} 代入式 (2.12), 并在该式两边同时叉乘姿态向量 \boldsymbol{l} , 可得

$$\boldsymbol{l} \times (\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{l}) = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}_0$$

展开上式左边, 由向量三重积³得 $(\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{l})\boldsymbol{r}_0 - (\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{l}$, 并注意到 \boldsymbol{l} 与 \boldsymbol{r}_0 正交, 有 $\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{r}_0 = 0$, 所以

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}_0}{\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{l}} \quad (2.13)$$

³向量三重积也称为三重积.

至此,便得到垂直于直线的位置向量的坐标.

2.3 射影几何与齐次坐标

射影几何学研究在射影变换作用下保持不变的几何性质,是几何学的一个重要学科分支,也称投影几何学.射影几何是非度规形式的几何,不基于尺度的概念.

公理 2.1 在射影几何中 (Whitehead, 1907; Owens, 1909),存在以下公理:

- (1) 任意一条直线上至少有三个不同点;
- (2) 任意两个点 A 与 B 位于唯一一条直线 AB 上;
- (3) 假定点 A 、 B 与点 C 、 D 不同,若线 AB 与 CD 相交,则线 AC 与 BD 相交.

在二维空间,射影几何研究点与线的构形.在多维空间,射影几何研究超平面和其他线性子空间的性质及其对偶特性.

射影几何学起始于公元 3 世纪希腊数学家 Pappus Alexandria 提出的连接两组点产生 Pappus 六边形的 Pappus 理论.这一理论构造了 Pappus 九点九线图形,指出任意一条线穿越三点,任何一点是三条线的交点. Pappus 理论是射影几何的第一个定理.这一定理给出了无穷远处点即为两平行直线交点的概念,由此引出了 16 世纪与 17 世纪德国数学家和天文学家 Kepler 与法国数学家和工程师 Desargues 创建的概念.其概念引出了无穷远处直线为连接这些无穷远处点构成的线的命题.这一发展使射影几何真正成为一个独立的学科.19 世纪初期经过法国数学家与工程师 Jean-Victor Poncelet 及其他人的努力,使其完善为数学的一个分支.

射影几何里最基本的概念之一就是交比.在平面射影几何里,把点和直线叫做互对偶元素,把“过一点作一直线”和“在一直线上取一点”叫做对偶运算.在两个图形中,如果它们都是由点和直线组成,把其中一图形里的各元素改为它的互对偶元素,各运算改为它的对偶运算,就可获得另一个图形.这两个图形叫做互对偶图形.在空间射影几何中,点和平面是互对偶元素,直线是自对偶元素.由此,在平面或空间射影几何中,一个命题叙述关于点、直线和平面的位置,若把各元素改为它的互对偶元素,各运算改为它的对偶运算,就可得到另一个命题,这两个命题称为对偶命题.本章 2.9 节将详细讲

述射影平面和四维空间的对偶性.

“齐次”性是指坐标系数独立于空间位置. 1827 年德国数学家和理论天文学家 August Ferdinand Möbius 创建了“齐次坐标”, 从此射影几何学进入了现代数学之列. 如图 2.4 所示, 一般可用欧氏空间⁴ $z = 1$ 处的投影面⁵阐明射影几何的基本思想.

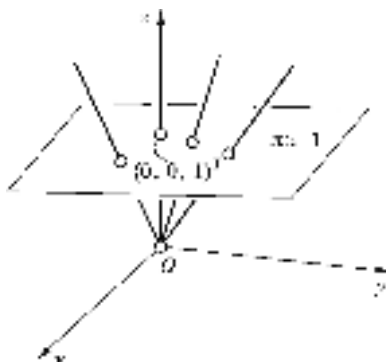


图 2.4 射影平面

定义 2.6 齐次坐标也称射影坐标, 是一组类似于欧氏空间的笛卡儿坐标的射影空间坐标, 可用有限值表示包括无穷远点在内的所有点.

齐次坐标公式通常比笛卡儿坐标简单, 并具对称性. 在欧几里得三维空间中取方程为 $z = 1$ 的平面 π , 所有起始于原点且不在 $x - y$ 平面内的直线都与平面 π 相交. 对于任意一个 $z \neq 0$ 的向量 $(x, y, z)^T$, 在平面 π 上都有唯一的点 $(x_p, y_p)^T$ 与之对应. 由此, 该向量的第三个坐标 z 只是模长比例因子, 且每一条以原点为起点的直线在射影平面 π 上都对应着点 $(x/z, y/z, 1)^T$. 欧氏空间向量 $(x, y, z)^T$ 在这标准嵌入射影平面 π 即 $z = 1$ 上, 成为点 $(x, y, 1)^T$. 任意过原点且平行于 $z = 1$ 处平面 π 的直线都可被射影为无穷远处的点, 表示为 $(x, y, 0)^T$, 这就构建了与三维空间中过原点的所有直线对应的二维射影表示.

⁴欧氏几何学是研究平面或空间几何图形的一些不变性质的几何学. 欧氏空间是满足可依据距离和角表达的具有特定联系的点、线、面所组成的集合, 并可通过一系列有序的平移和旋转把一个图形变换成另一个图形. 欧氏空间是一个特别的度量空间, 当一个线性空间定义了内积运算之后它就成为了欧氏空间.

⁵该平面也称标准嵌入平面.

空间中的点可以由齐次坐标的形式在三维射影空间 \mathbb{P}^3 表示为 $(x, y, z, d)^T$, 此处 d 为比例因子, 并可将其简化为单位 1, 表示射影空间中的一个缩放比值. 如果直线不经过原点, 但过任意两点 $(x_1, y_1, z_1, d_1)^T$ 和 $(x_2, y_2, z_2, d_2)^T$, 则可表示为 $(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2, d_1 - d_2)^T$, 这就形成了向量空间的四维子空间, 也是线矢量空间.

定义 2.7 n 维射影空间 \mathbb{P}^n 是空间 \mathbb{R}^{n+1} 中所有过原点 $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)^T$ 的直线的集合, 是基于等价关系的 \mathbb{R}^{n+1} 空间的商空间, 即 $\mathbb{P}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}) / (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, 其等价关系为 $(x_0, \dots, x_n)^T = (\lambda y_0, \dots, \lambda y_n)^T$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 是任意非零常数.

2.4 平面方程与平面坐标

2.4.1 平面向量方程与平面坐标表示

如图 2.5 所示, 空间经点 $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$ 、具有法向量 $\mathbf{n} = (A, B, C)^T$ 的平面可表示为如下的向量形式:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.14)$$

式中, 点 $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ 为该平面上的任意一点. 上述方程可进一步表示为

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + D = Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2.15)$$

式中

$$D = -\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n} = -Ax_1 - By_1 - Cz_1 \quad (2.16)$$

在满足 A, B 及 C 不全为零的条件下, 阵列 (A, B, C, D) 即为上述平面的齐次坐标. 该平面到原点的距离可由过原点且与平面正交的向量 \mathbf{r}_0 确定. 鉴于 \mathbf{r}_0 与 \mathbf{n} 平行, 有

$$\mathbf{r}_0 \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

用正交向量 \mathbf{r}_0 代替式 (2.14) 中的 \mathbf{r} , 类似式 (2.15), 可以得到

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n} = -D \quad (2.18)$$

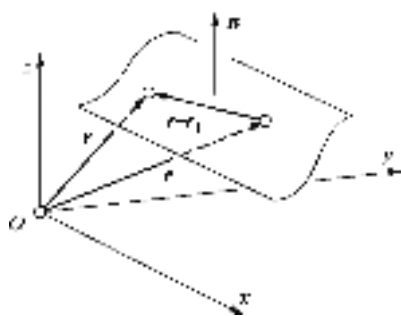


图 2.5 由空间中一点及法向量确定的平面

由此可见, D 表示该平面到参考系原点 O 的垂直距离. 当 $D = 0$ 时, 由式 (2.15), 得

$$Ax + By + Cz = 0$$

此时, 该平面通过原点 O . 由上式不难发现, 当 $A = B = 0$ 时, 原平面表示平面 $x - y$, 齐次坐标为 $(0, 0, C, 0)^T$. 同理, 平面 $x - z$ 的齐次坐标为 $(0, B, 0, 0)^T$, 平面 $y - z$ 的齐次坐标为 $(A, 0, 0, 0)^T$.

空间任意平面可用以齐次坐标 $(x_1, y_1, z_1, w_1)^T$ 表示的空间点和具有四个参量的法向量 $(A, B, C, D)^T$ 表示.

2.4.2 三点确定的平面坐标

向量方程式 (2.14) 可变换为通过平面上不共线三点 \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 及 \mathbf{r}_3 的形式. 其中任意两个向量的差, 如 $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$, 都在上述平面 π 上或与平面平行. 所以, 可以得到平面法向量为 $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)$, 进而式 (2.14) 可写为

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot ((\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)) = 0 \quad (2.19)$$

由此得到类似于式 (2.10) 的含有两个参数的平面方程为

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}_1 + \lambda_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \lambda_2(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \quad (2.20)$$

这三点 \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 和 \mathbf{r}_3 可以构造下列矩阵:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix}$$

上述矩阵给出下列平面的四个标量坐标, 为

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, & B &= \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \\
 C &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, & D &= - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

不难得出结论, 经过三点 \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 、 \mathbf{r}_3 的平面可由上述四个行列式确定. 这就给出了平面方程的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix}$$

该矩阵对应于

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

比例 $A : B : C : D$ 确定了无限延伸的平面的空间位姿, 其中, 参数 A 、 B 、 C 是平面方程矩阵形式的符号行列式, 其绝对值分别是以向量 \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 、 \mathbf{r}_3 的端点形成的三角形在相应的坐标平面内的投影面积的 2 倍, 标量 D 的绝对值则是由向量 \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 、 \mathbf{r}_3 的端点及原点构成的四面体体积的 6 倍.

2.5 两点确定的直线方程及其射线形式的 Plücker 坐标

三维空间中任意直线可以看做由两点连接而成. 假设空间两点为 $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$ 和 $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)^T$, 该两点的坐标确定一条直线, 可用直线的射线形式的 Plücker 坐标表示.

定理 2.1 直线的 Plücker 坐标可由 Grassmann 行列式 (Klein, 1939) 的六个 2×2 行列式即子行列式给定, 依次为 p_{01} 、 p_{02} 、 p_{03} 、 p_{23} 、 p_{31} 、 p_{12} , 这些坐标可由下列矩阵求得:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

上述矩阵可给出六个 Grassmann 子行列式以表示直线的 Plücker 坐标 (Plücker, 1865) l 、 m 、 n 及 p 、 q 、 r 。

证明 已知空间两点 $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1, w_1)^T$ 和 $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2, w_2)^T$, 则直线的姿态向量可写为

$$\mathbf{l} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (2.23)$$

由此, 可得到姿态向量 $(l, m, n)^T$ 的三个标量坐标, 其中

$$l = \begin{vmatrix} w_1 & x_1 \\ w_2 & x_2 \end{vmatrix} = w_1 x_2 - w_2 x_1 = p_{01}$$

令比例因子 w_1 和 w_2 为 1, 上式变换为

$$l = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \|\mathbf{l}\| \cos \varphi \cos \theta = p_{01} \quad (2.24)$$

式中, φ 与 θ 的含义如图 2.6 所示. 同理

$$m = \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} = y_2 - y_1 = \|\mathbf{l}\| \cos \varphi \sin \theta = p_{02} \quad (2.25)$$

$$n = \begin{vmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \end{vmatrix} = z_2 - z_1 = \|\mathbf{l}\| \sin \varphi = p_{03} \quad (2.26)$$

坐标分量 l 、 m 、 n 是连接 \mathbf{r}_1 到 \mathbf{r}_2 的线段在坐标轴上的投影, 如图 2.6 所示. 由此得到直线的姿态向量 $(l, m, n)^T$. 该姿态向量对原点取矩得

$$\begin{aligned} p &= \|\mathbf{l}\| \sin \varphi y_2 - \|\mathbf{l}\| \cos \varphi \sin \theta z_2 = (z_2 - z_1)y_2 - (y_2 - y_1)z_2 \\ &= y_1 z_2 - y_2 z_1 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = p_{23} \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} q &= \|\mathbf{l}\| \cos \varphi \cos \theta z_2 - \|\mathbf{l}\| \sin \varphi x_2 = (x_2 - x_1)z_2 - (z_2 - z_1)x_2 \\ &= x_2 z_1 - x_1 z_2 = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = p_{31} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} r &= \|\mathbf{l}\| \cos \varphi \sin \theta x_2 - \|\mathbf{l}\| \cos \varphi \cos \theta y_2 = (y_2 - y_1)x_2 - (x_2 - x_1)y_2 \\ &= x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = p_{12} \end{aligned} \quad (2.29)$$

由此, 六个子行列式给出了空间直线的 Plücker 坐标. 定理得证.

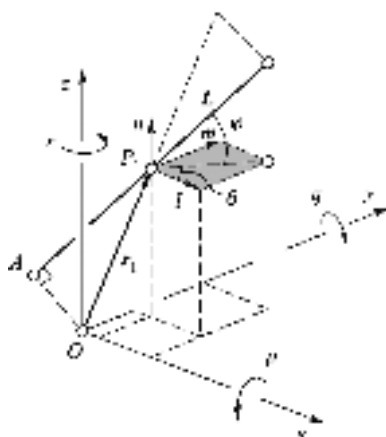


图 2.6 直线的 Plücker 坐标

直线的 Plücker 坐标是一组六维齐次坐标, 可由式 (2.22) 从一条直线上的两个不同点的齐次坐标得出. 这给出了五维射影空间 \mathbb{P}^5 的六个齐次坐标分量. 由定义 2.7, 用任意非零标量与全部齐次坐标分量相乘, 都得到相同的点. 因此, 三维空间的任意一条直线都确定了射影空间 \mathbb{P}^5 中的唯一点, 这些点的集合即构成了式 (2.8) 定义的 Klein 二次曲面, 即五维射影空间的超二次曲面. 该曲面给出了直线的四维向量空间. 无穷远处的直线可视为由 $l = m = n = 0$ 所定义的二维射影平面上的点.

用六个坐标分量表示空间直线的概念由 Cayley 第一次提出 (Cayley, 1860). 在该六维坐标中, p, q, r 是图 2.6 中三角形 OAP_1 在相应的坐标平面的投影面积的 2 倍. 同时, 比例式 $l : m : n : p : q : r$ 中的五个比值对线段长度的任意变化和方向的改变具有不变性. 图 2.6 说明了六个坐标分量的几何意义.

因此, 直线方程可通过该直线上两点 $(x_1, y_1, z_1, d_1)^T$ 和 $(x_2, y_2, z_2, d_2)^T$ 的坐标给定, 用 $\pi = (A, B, C, D)^T$ 表示平面的法向量即未知数, 可得到直线方程, 为

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & d_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

定义 2.8 当直线的 Grassmann 行列式由两点确定时, 直线的 Plücker 坐标为射线坐标. 当直线的 Grassmann 行列式由两平面确定时, 直线的 Plücker 坐标为轴线坐标.

轴线坐标的详细阐述由下一节引出.

2.6 两平面交线确定的直线方程及其轴线形式的 Plücker 坐标

三维空间中任意直线也可以看作由两平面相交而成, 可用两个线性方程构成的方程组表示. 两个线性方程分别描述两个平面, 而直线由两个平面确定. 由此, 确定一条直线, 需要给出两个描述平面的阵列, 即 $\pi_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1)^T$ 和 $\pi_2 = (A_2, B_2, C_2, D_2)^T$. 将直线上任意一点记为 $\mathbf{r} = (x, y, z, w)^T$, 则两平面相交形成的直线可写为

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

鉴于平面 π_1 与 π_2 线性无关, 上式中 2×4 系数矩阵的秩为 2. 以矩阵每两列为基本单元, 可构造出六个各不相同的 2×2 子式, 其对应行列式的值恰为线矢量 L 的 Plücker 直线坐标. 如前所述, Plücker 坐标为齐次坐标.

这类 Plücker 坐标为轴线坐标, 标注为 L 、 M 、 N 、 P 、 Q 和 R , 由式 (2.31) 给出的 Grassmann 行列式顺序表示, 即

$$P = P_{01} = \begin{vmatrix} D_1 & A_1 \\ D_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad Q = P_{02} = \begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad R = P_{03} = \begin{vmatrix} D_1 & C_1 \\ D_2 & C_2 \end{vmatrix} \quad (2.32)$$

以及

$$L = P_{23} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad M = P_{31} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad N = P_{12} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \quad (2.33)$$

对应于 2.5 节, 这给出了直线的轴线坐标, 其中 L 、 M 、 N 为主部, P 、 Q 、 R 为副部. 可以证明, 上述六个坐标满足式 (2.8) 所示的二阶约束. 综上所述, 一条直线的六个齐次坐标可以很好地用两个简化平面的交线表示, 这在下节具体叙述.

2.7 射线坐标与轴线坐标的固有属性与对偶性

以上两节分别讨论了采用两类 Plücker 坐标定义直线的原理. 第一类将直线视为两空间点的连线, 这类 Plücker 坐标称为**射线坐标**; 第二类则将直线视为两平面的交线, 这类 Plücker 坐标称为**轴线坐标**. 任意给定的直线均可由射线坐标或轴线坐标两种形式定义, 且这两种坐标具有相关性. 下面将具体推导二者的关系.

2.7.1 直线坐标的参数关系

以 z 为中间参量, 一条直线的参数方程可以表示为下面两平面的交线

$$\pi_1 : x = rz + \rho \quad (2.34)$$

$$\pi_2 : y = sz + \lambda \quad (2.35)$$

式中, r 为平面 π_1 在 $x-z$ 平面上交线的斜率, ρ 为其交线在 x 轴上的截距; s 为平面 π_2 在 $y-z$ 平面上交线的斜率, λ 为其交线在 y 轴上的截距. 两平面的空间位置关系如图 2.7 所示.

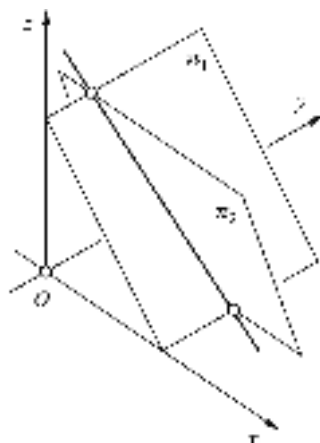


图 2.7 两平面相交形成的直线

四个数值 (r, s, ρ, λ) 能够唯一确定式 (2.34) 与式 (2.35) 所示平面 π_1 与 π_2 相交得到的直线, 也给出了直线轴线坐标的参数. 合并两式得

$$ry - sx = r\lambda - \rho s = \varsigma \quad (2.36)$$

上式为四个参量的二阶关系表达式, 其中 ς 为直线的综合参数.

同时, 直线的射线坐标可以由直线上任意两不重合点的坐标 $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$ 与 $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)^T$ 给出, 由式 (2.34) 和式 (2.35) 可推导出下面的直线 Plücker 坐标参数关系式:

$$\begin{aligned} \lambda : \rho : \varsigma : r : s : 1 &= (y_1 z_2 - y_2 z_1) : (x_1 z_2 - x_2 z_1) : (x_2 y_1 - x_1 y_2) \\ &: (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1) \\ &= p : q : r : l : m : n \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.7.2 直线表示形式的对偶性

对于一条连接两点 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 且位于平面 π_1 与 π_2 交线上的直线, 有下述四个关系式成立. 当直线作为平面 $\pi_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1)^T$ 和 $\pi_2 = (A_2, B_2, C_2, D_2)^T$ 的交线且通过任意点 $\mathbf{r} = (x, y, z, w)^T$ 时, 直线方程可表示为两平面交线, 即式 (2.31). 在此交线上, 取点 $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1, w_1)^T$ 时, 该点与两平面的关系式为

$$A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1 + D_1 w_1 = 0 \quad (2.38)$$

$$A_2 x_1 + B_2 y_1 + C_2 z_1 + D_2 w_1 = 0 \quad (2.39)$$

在直线方程式 (2.31) 中, 取不同于 \mathbf{r}_1 的点 $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2, w_2)^T$, 可得到点 \mathbf{r}_2 与两平面 π_1 和 π_2 的关系式

$$A_1 x_2 + B_1 y_2 + C_1 z_2 + D_1 w_2 = 0 \quad (2.40)$$

$$A_2 x_2 + B_2 y_2 + C_2 z_2 + D_2 w_2 = 0 \quad (2.41)$$

借助这四个关系式, 可以产生直线的两种描述形式. 将式 (2.38) 和式 (2.39) 中的 \mathbf{r}_1 点由任意点 \mathbf{r} 取代, 则产生直线的第一种描述方式, 为平面 π_1 与平面 π_2 的交线, 得出式 (2.31) 基于轴线坐标描述方式的矩阵形式. 此时, 点坐标为直线上的任意点.

第二种描述形式是将直线视为通过两空间点的射线. 将式 (2.38) 和式 (2.40) 中平面 π_1 用任意平面 π 取代, 由此这两个方程描述平面 π 内通过点 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 的连线. 也可以将式 (2.39) 和式 (2.41) 中的平面 π_2 用任意平面 π 取代, 由此这两个方程描述平面 π 内通过点 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 的连线. 由此得出

式 (2.30) 基于射线坐标描述方式的矩阵形式. 此时, 平面坐标为通过直线上的任意平面.

由此, 对于同一直线, 上述四个方程给出了两种不同的数学表示形式, 下文将推导其关联关系及对偶性.

2.7.3 射线坐标与轴线坐标对偶定理

定理 2.2 线矢量的轴线坐标与射线坐标的主部与副部分别呈线性比例关系, 为

$$\frac{P_{01}}{p_{23}} = \frac{P_{02}}{p_{31}} = \frac{P_{03}}{p_{12}} \quad (2.42)$$

$$\frac{P_{23}}{p_{01}} = \frac{P_{31}}{p_{02}} = \frac{P_{12}}{p_{03}} \quad (2.43)$$

式中, P_{23} 、 P_{31} 和 P_{12} 为直线的轴线坐标主部, P_{01} 、 P_{02} 和 P_{03} 为直线的轴线坐标副部; p_{01} 、 p_{02} 和 p_{03} 为直线的射线坐标主部, p_{23} 、 p_{31} 和 p_{12} 为直线的射线坐标副部.

证明 对于式 (2.38) 与式 (2.39), 消去比例因子 w_1 , 得

$$(A_1D_2 - A_2D_1)x_1 + (B_1D_2 - B_2D_1)y_1 + (C_1D_2 - C_2D_1)z_1 = 0 \quad (2.44)$$

不难发现, 当等式两边同时乘以 -1 , 上式的系数正是式 (2.32) 所示的轴线坐标 P_{01} 、 P_{02} 和 P_{03} , 因此上式可变换为

$$P_{01}x_1 + P_{02}y_1 + P_{03}z_1 = 0 \quad (2.45)$$

式中, 坐标分量 P_{01} 、 P_{02} 和 P_{03} 构成轴线坐标的副部. 因此, 上式描述了直线的轴线坐标的副部与点 $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1, w_1)^T$ 的线性关系. 同理, 联立式 (2.40) 和式 (2.41), 并消去比例因子 w_2 , 即得到

$$P_{01}x_2 + P_{02}y_2 + P_{03}z_2 = 0 \quad (2.46)$$

上式描述了直线的轴线坐标的副部与点 $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2, w_2)^T$ 的线性关系. 联立式 (2.45) 和式 (2.46) 并消去 P_{02} , 则有

$$P_{01}(x_1y_2 - x_2y_1) + P_{03}(y_2z_1 - y_1z_2) = 0 \quad (2.47)$$

上式包含了空间直线上任意两点 \mathbf{r}_1 与 \mathbf{r}_2 间的代数关系. 实际上, 式 (2.47) 中由 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 的坐标构成的 P_{01} 与 P_{03} 的系数, 恰好为式 (2.27) 和式 (2.29) 所示的射线坐标 p_{23} 和 p_{12} , 因此得到

$$\frac{P_{01}}{P_{03}} = \frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} = \frac{p_{23}}{p_{12}} \quad (2.48)$$

其中, p_{23} 与 p_{12} 是射线坐标副部的两个分量.

同理, 式 (2.45) 乘以 x_2 减去式 (2.46) 乘以 x_1 , 得

$$P_{02}(x_2 y_1 - x_1 y_2) + P_{03}(x_2 z_1 - x_1 z_2) = 0 \quad (2.49)$$

类似式 (2.47), 上式也包含了空间直线上任意两点 \mathbf{r}_1 与 \mathbf{r}_2 间的代数关系, 根据式 (2.28) 和式 (2.29), 可在式 (2.49) 中引入直线的射线坐标 p_{31} 和 p_{12} , 即

$$\frac{P_{02}}{P_{03}} = \frac{x_2 z_1 - x_1 z_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1} = \frac{p_{31}}{p_{12}} \quad (2.50)$$

综上, 由式 (2.48) 和式 (2.50), 即得式 (2.42). 至此, 直线的轴线坐标与射线坐标的副部之间的关系得以导出. 定理第一部分得证.

通过类似的推导过程, 可以得到直线的轴线坐标与射线坐标的主部之间的关系. 首先, 消去式 (2.38) 和式 (2.40) 中的比例因子 D_1 , 得到平面 π_1 内通过已知两点的方程. 将式 (2.33) 所示的轴线坐标主部代入, 可推导出射线坐标的主部与平面 π_1 间的线性关系. 用同样的方法即可得到射线坐标的主部与平面 π_2 间的线性关系. 接着, 将式 (2.33) 所示的轴线坐标代入, 即得式 (2.43). 定理第二部分得证.

2.7.4 射线坐标与轴线坐标对偶关系

同一直线的射线坐标与轴线坐标有下列关系:

$$\begin{pmatrix} p_{01} \\ p_{02} \\ p_{03} \\ p_{23} \\ p_{31} \\ p_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_{01} \\ P_{02} \\ P_{03} \\ P_{23} \\ P_{31} \\ P_{12} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

写为下列简略形式:

$$\mathbf{p} = \Delta \mathbf{P} \quad (2.52)$$

式中

$$\boldsymbol{p} = (p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12})^T \quad (2.53)$$

$$\boldsymbol{P} = (P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{23}, P_{31}, P_{12})^T \quad (2.54)$$

同时

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

是对偶算子. 由此, 对偶算子完成了射线坐标与轴线坐标的互换. 根据矩阵 Δ 的运算性质, 式 (2.52) 又可写成

$$\boldsymbol{P} = \Delta \boldsymbol{p}$$

由上述分析及定理 2.2 可知, 射线坐标与轴线坐标具有对偶关系.

推论 2.1 直线的射线与轴线坐标可统一于下列代数关系式:

$$p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{23} : p_{31} : p_{12} = P_{23} : P_{31} : P_{12} : P_{01} : P_{02} : P_{03} \quad (2.56)$$

证明 由式 (2.43) 或式 (2.51), 得

$$p_{01} : p_{02} : p_{03} = P_{23} : P_{31} : P_{12} \quad (2.57)$$

又由式 (2.42) 或式 (2.51), 得

$$p_{23} : p_{31} : p_{12} = P_{01} : P_{02} : P_{03} \quad (2.58)$$

式 (2.57) 除以式 (2.58), 有

$$\frac{p_{01} : p_{02} : p_{03}}{p_{23} : p_{31} : p_{12}} = \frac{P_{23} : P_{31} : P_{12}}{P_{01} : P_{02} : P_{03}}$$

由此可得

$$p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{23} : p_{31} : p_{12} = P_{23} : P_{31} : P_{12} : P_{01} : P_{02} : P_{03}$$

在以上推理证明中考虑直线为单位线矢量. 推论得证.

2.8 互矩不变性及两直线的交点

在旋量代数中, 线矢量 L_1 可表示为 $(l_1^T, l_{10}^T)^T = (l_1^T, (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{l}_1)^T)^T$; 同理, 对于线矢量 L_2 , 有 $(l_2^T, l_{20}^T)^T = (l_2^T, (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{l}_2)^T)^T$, 二者的空间位置关系如图 2.8 所示.

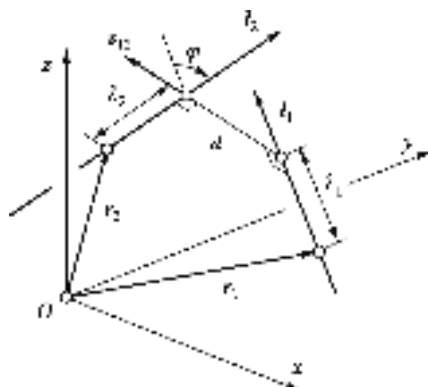


图 2.8 空间交错的两直线

定义 2.9 互矩为两线矢量的互易积, 也称相互不变量, 被 Ball 定义为虚参数. 线矢量 L_1 与 L_2 的互矩可写为

$$L_1 \circ L_2 = l_1 \cdot l_{20} + l_2 \cdot l_{10} = l_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{l}_2) + l_2 \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{l}_1) = ((\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{l}_1 \quad (2.59)$$

定理 2.3 线矢量互矩为不变量.

证明 两线矢量不相交时, 用标量 d 及相应的单位向量 \mathbf{s}_{12} 表示两线矢量公法线的距离和方向, φ 表示两线矢量的夹角. 如图 2.8 所示, \mathbf{r}_1 与 \mathbf{r}_2 两点间的距离可表示为

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \lambda_1 \mathbf{l}_1 + d \mathbf{s}_{12} - \lambda_2 \mathbf{l}_2$$

由此, 式 (2.59) 所示的互矩可改写为

$$\begin{aligned} ((\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{l}_1 &= ((\lambda_1 \mathbf{l}_1 + d \mathbf{s}_{12} - \lambda_2 \mathbf{l}_2) \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{l}_1 \\ &= d(\mathbf{s}_{12} \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{l}_1 = -d \mathbf{s}_{12} \cdot (\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) \\ &= -d \mathbf{s}_{12} \cdot \mathbf{s}_{12} \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.60)$$

注意到 s_{12} 为单位向量, 上式为

$$((\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{l}_2) \cdot \mathbf{l}_1 = -d \sin \varphi \quad (2.61)$$

因此, 式 (2.59) 中的互矩可表示为

$$\mathbf{l}_1 \cdot \mathbf{l}_{20} + \mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{l}_{10} = -d \sin \varphi \quad (2.62)$$

由此不难得出, 线矢量的互矩与向量 \mathbf{l}_1 和 \mathbf{l}_2 的具体坐标无关, 只取决于二者的相互位姿, 是相互不变量. 定理得证.

推论 2.2 当 $d = 0$ 时, 两线矢量交于一点; 当 $\sin \varphi = 0$ 时, 二者相交于无穷远处, 即平行.

以上两种情况下, 互矩即虚系数均为零. 综上所述, 空间两直线间的最短距离与其夹角的正弦值之积的相反数, 即为两直线的互矩.

为研究两直线相交, 设直线 L_1 过点 $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1, z_1, w_1)^T$ 和 $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2, z_2, w_2)^T$, L_2 过点 $\mathbf{q}_1 = (x'_1, y'_1, z'_1, w'_1)^T$ 和 $\mathbf{q}_2 = (x'_2, y'_2, z'_2, w'_2)^T$. 当 L_1 与 L_2 相交时, 该四点共面. 将该平面记作 π , 上述四点与平面 $\pi = (A, B, C, D)^T$ 的关系可表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \mathbf{q}_1^T \\ \mathbf{q}_2^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.63)$$

由于该四点共面, 其坐标构成的系数矩阵是奇异的, 即行列式为零, 可写为

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \\ x'_1 & y'_1 & z'_1 & w'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 & w'_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.64)$$

对上式中的行列式按第一行作拉普拉斯展开, 并对得到的三阶余子式作进一步展开; 将比例因子 w_1, w_2, w'_1, w'_2 取为单位 1, 用式 (2.24) 至式 (2.29) 所示的直线 L_1 与 L_2 的射线坐标形式的 Plücker 坐标取代展开得到的 2×2 余子式, 可推导出下列两直线互矩的式子, 即

$$p_{01}q_{23} + p_{02}q_{31} + p_{03}q_{12} + p_{12}q_{03} + p_{31}q_{02} + p_{23}q_{01} = 0 \quad (2.65)$$

式中, p_{ij} 表示直线 L_1 的射线形式的 Plücker 坐标; q_{ij} 表示直线 L_2 的射线形式的 Plücker 坐标. 式 (2.65) 可简化为向量形式

$$l_1 \cdot l_{20} + l_2 \cdot l_{10} = 0 \quad (2.66)$$

此时, 有

$$L_1 = (l_1^T, l_{10}^T)^T = (p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{23}, p_{31}, p_{12})^T \quad (2.67)$$

$$L_2 = (l_2^T, l_{20}^T)^T = (q_{01}, q_{02}, q_{03}, q_{23}, q_{31}, q_{12})^T \quad (2.68)$$

若两直线重合, 即 $L_1 \equiv L_2$, 则式 (2.65) 可简化为

$$p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0$$

此即式 (2.9) 所示的直线的约束方程, 可给出二阶约束.

定理 2.4 两直线相交的充分必要条件是互矩为零, 有

$$L_1^T \Delta L_2 = 0 \quad (2.69)$$

根据式 (2.62) 可以证明该定理.

2.9 射影平面与四维空间的对偶性

平面射影几何学中, 对偶性 (Bennett, 1925) 是点与直线在射影变换中保持的关联特性. 这可用点与直线的相似性说明, 即两直线的交点与连接两点的直线具有相同的描述形式与方程.

如图 2.9 所示, 给定射影平面内的一条直线 L 和过原点并正交于 L 的直线 L' , 则原点另一侧位于直线 L' 上的点 P 为与 L 具有对偶关系的点, 该点到原点的距离与 L 相对原点的距离呈倒数关系.

在空间射影几何学中, 一般用齐次坐标 $(x, y, z, w)^T$ 和 $(A, B, C, D)^T$ 分别描述点与平面, 二者具有如下关系:

$$Ax + By + Cz + Dw = 0 \quad (2.70)$$

有趣的是, 从点坐标与面坐标两个角度看, 此方程在形式上是对称的, 同时还具有点在平面上与平面通过该点双重含义. 这也进一步描述了点与平面

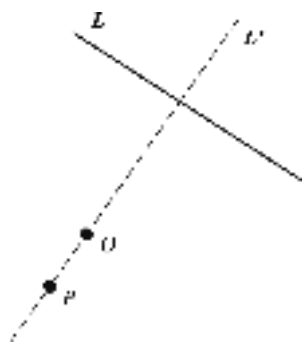


图 2.9 射影平面内直线与点的对偶性

间的关联特性. 由此, 三点决定一个平面的命题就与三个平面决定一点的命题是对偶的. 更进一步, 直线是自对偶结构, 其意义在于: 一条直线上的点系和通过直线的平面系是对偶的. 例如, 两点决定一条直线的命题与两平面决定一条直线的命题是对偶的. 又如, 平面内两直线交于一点的命题与两直线通过一点即是位于一个平面上的命题也是对偶的. 因此, 如果给定平面的齐次坐标 $(A, B, C, D)^T$ 为定值, 平面上点 $(x, y, z, w)^T$ 的运动轨迹将始终限制在该平面内. 反之, 如果给定一点的齐次坐标 $(x, y, z, w)^T$ 为定值, 则 $(A, B, C, D)^T$ 取不同的数值可以表示过该定点的全部平面. 这样, 以直线为媒介, 平面与点也是三维空间中的互对偶元素.

定义 2.10 以 P 代表点簇, L 代表线簇, 则射影平面 $C = (P, L, I)$ 通过关联结构 I 可以映射到其对偶平面 $C^* = (P, L, I^*)$; 由此点簇映射到线簇, 而线簇映射到点簇; 点组成的平面与线组成的平面是一致的. 此即平面对偶性. 将之推广, 表征射影空间中几何元素间关联关系的特征, 即为射影几何学对偶性.

因此, 式 (2.70) 建立了点与平面间的基本关联关系, 并且点的坐标与平面的坐标的形式是对称的. 借助于这种对偶性, 如果基于点的概念给出某几何学问题的解, 则可以方便地给出基于平面概念的等效解.

2.10 直线系

2.10.1 线丛

直线线丛为与一中心轴线相交的空间直线簇. 当中心轴线的六维坐标不满足式 (2.8) 所示的二阶约束, 即下一章介绍的旋距为非零时, 中心轴线同时给出了具有旋距并绕轴线的螺旋线. 坐落在与螺旋线垂直的所有平面且与螺旋线相交的所有直线构成线丛. 由此, 在一个与螺旋线垂直的平面上, 所有从属于该线丛的直线构成线束.

定义 2.11 坐标为 $(l, m, n, p, q, r)^T$ 且与旋距为非零的轴线 $\mathbf{L} = (a, b, c, d, e, f)^T$ 满足式 (2.66) 所示互矩为零条件的一系列直线构成以 \mathbf{L} 为轴线的直线系, 称为**线丛**, 标注为 Γ , 即

$$\Gamma \equiv dl + em + fn + ap + bq + cr \quad (2.71)$$

通过某一般点的直线簇均位于一个平面内, 反之, 在某一般平面内的直线簇均通过一定点. 需要注意的是, 这里提到的直线簇仅是线丛中的一部分.

当线丛的轴线 \mathbf{L} 为直线时, 可得到一种**特殊线丛**. 所有与轴线 \mathbf{L} 相交的直线均属于该线丛. 与式 (2.66) 类似, 此时式 (2.71) 成为该线丛轴线与所有直线的互矩公式.

线丛实质上为直线构成的三维子空间. 在笛卡儿几何学中, 特殊线丛包括了所有与线丛轴相交的直线, 或者所有与线丛轴平行的直线.

2.10.2 线汇和线列

当特殊线丛 Γ_1 和 Γ_2 各自定义的轴线相交时, 所有与两条轴线相交的直线构成了直纹曲面, 即构成了直线线汇的二维空间.

定义 2.12 同时满足两个式 (2.71) 所示的方程的直线簇称为**线汇**, 可表示为

$$\Gamma_i \equiv d_i l + e_i m + f_i n + a_i p + b_i q + c_i r, \quad i = 1, 2 \quad (2.72)$$

式 (2.72) 定义了线汇的概念, 也可称作射线簇. 根据式 (2.72) 不难发现, 线汇由两个线丛所共有.

定义 2.13 同时满足三个式 (2.71) 所示的方程的直线簇称为**线列**. 线列表示的一系列直线可生成规则的二次直纹曲面.

参考文献

- Bennett, A.A. (1925) Incidence and parallelism in biaffine geometry, *The Annals of Mathematics*, **27**(2): 84-86.
- Bruyninckx, H., De Schutter, J. and Dutre, S. (1993) The ‘reciprocity’ and ‘consistency’ based approaches to uncertainty identification for compliant motions, *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, **1**: 349-354.
- Cayley, A. (1860) On a new analytical representation of curves in space, *Quarterly J. of Pure and Appl. Math.*, **3**: 225-236.
- Dai, J.S. (1993) *Screw Image Space and Its Application to Robotic Grasping*, PhD Dissertation, University of Salford, Manchester.
- Dai, J.S. (2006) A historical review of the theoretical development of rigid body displacements from rodrigues parameters to the finite twist, *Mech. Mach. Theory*, **41**(1): 41-52.
- Dai, J.S. (2012) Finite displacement screw operators with embedded Chasles’ motion, *ASME J. Mech. Rob.* **4**(4): 041002.
- Dai, J.S. (2014) *Screw Algebra and Kinematic Approaches for Mechanisms and Robotics*, Springer, London.
- Klein, F. (1878) *Ueber die transformation siebenter ordnung der elliptischen functionen*, *Mathematische Annalen*, **14**(3): 428-471.
- Klein, F. (1939) *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Geometry* (ER Hedrick and CA Noble, trans.), Macmillan, New York.
- Owens, F.W. (1909) Review: The axioms of descriptive geometry by A. N. Whitehead, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **15**(9): 465-466.
- Plücker, J. (1865) On a new geometry of space, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **155**: 725-791.
- Whitehead, A.N. (1907) *The Axioms of Descriptive Geometry*, Cambridge University Press.

第三章 旋量代数

旋量是含旋距的线矢量, 为几何量, 也是李代数中通过原点的射线, 是射影李代数 $se(3)$ 的元素. 旋量集合构成五维射影空间. 速度旋量是附有速度幅值的旋量, 用以描述刚体关于旋量轴线的运动, 是李代数 $se(3)$ 的元素. 速度旋量可表示为六维的李代数 $se(3)$ 的伴随表示, 与 \mathbb{R}^6 同构. 力旋量是附有力幅值的旋量, 是对偶李代数 $se^*(3)$ 的元素. 与速度旋量构成互易关系的力旋量常表示为 \mathbb{R}^6 中向量空间 $se^*(3)$ 的向量. 旋量代数实质上是一门以向量代数理论为研究工具, 以上述几何体及特殊欧氏群 $SE(3)$ 的李代数的子代数为研究对象的数学分支.

在第二章的基础上, 本章将首先介绍旋量的概念以及旋量以六维向量和对偶向量形式的一系列运算规则; 之后, 介绍基于 Mozzi 瞬轴的速度旋量和基于 Poincaré 中心轴的力旋量; 接着, 进一步讨论旋量理论中瞬时运动学与静力学在数学形式上的对应性, 并介绍旋量的互易性; 最后, 介绍李代数及其表示和李括号.

3.1 旋量

3.1.1 旋量的概念

带有旋距要素的线矢量即为旋量. 如式 (2.9) 所示, 线矢量的自互矩为

零, 但旋量考虑旋距后其自互矩不再为零. 因此线矢量 \mathbf{L} 和旋距 h 相结合后即可得到旋量. 旋量的六维向量形式为

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{l} + h\mathbf{l} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

式中, 旋距 h 为副部在主部的投影; \mathbf{l} 为线矢量 \mathbf{L} 的姿态向量, 如式 (2.2) 所示, 其方向可由式 (2.3) 确定; 向量 \mathbf{r} 则为如式 (2.1) 的姿态向量 \mathbf{l} 的位置向量, 如图 3.1. 姿态向量 \mathbf{l} 也为旋量的轴线.

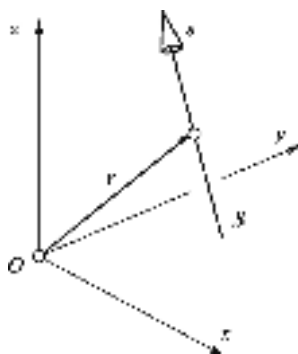


图 3.1 旋量轴线及其位置向量

定义 3.1 旋量是一个几何体, 可用由一对三维向量构成的六维向量表示, 写为

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{s}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{s} + h\mathbf{s} \end{pmatrix} = (s_x, s_y, s_z, s_{x0}, s_{y0}, s_{z0})^T \\ &= (l, m, n, p, q, r)^T \end{aligned} \quad (3.2)$$

式中, \mathbf{s} 是由式 (2.2) 的姿态向量 \mathbf{l} 表示的旋量的轴线.

采用射线坐标时, 表示旋量的第一个三维向量对应于研究空间刚体运动中的力、角位移与角速度, 第二个三维向量对应于空间刚体受到的力矩、线位移与线速度. 旋量由 Plücker 坐标在空间定义的线矢量构成与延伸, 包括沿线矢量的向量、该线矢量的矩以及旋距. 简言之, 旋量是具有旋距的线矢量, 一般为单位线矢量加上旋距. 但也常考虑到带幅值的非单位旋量, 即为速度旋量与力旋量.

定义 3.2 旋量的代数形式包括两部分, 旋量的轴线向量 $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)^T$ 为主部, 也称原部; 用于确定轴线位置与旋距的向量 $\mathbf{s}_0 = (s_{x0}, s_{y0}, s_{z0})^T$ 为副部, 也称对偶部.

3.1.2 旋量的参数

将旋量的主部与副部作标量积, 可得

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}_0 = \mathbf{s} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{s}) + h\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} \quad (3.3)$$

由此可推导出旋量的旋距表达式.

定义 3.3 旋距为旋量副部在主部上的投影与主部模长的比值, 表示为

$$h = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}_0}{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} \quad (3.4)$$

当旋量为单位旋量时, 旋距是旋量副部在主部上的投影. 它的物理意义是当物体做螺旋运动时, 物体沿轴线平移的直线距离. 当物体受到的力等效为合力时, 旋距是力偶的幅值与合力的幅值的比值. 因而, 旋距为不变量.

注释 3.1 旋距为零的旋量为线矢量.

一个旋量具有五个独立参数, 其中四个从线矢量继承而来, 另外一个为式 (3.4) 给出的旋距. 旋量是五维射影空间中的元素. 若式 (3.3) 所示主部与副部的标量积为零, 即

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}_0 = 0 \quad (3.5)$$

如 2.1.3 节所述, 该式可由 **Klein 型** 对应的二次型导出, 如定义 2.4 所示, 并定义了 **Klein 二次曲面**. 此时, 旋量的旋距为零, 旋量由此退化为线矢量, 并为 Klein 二次曲面上的点. 除点积外, 旋量主部和副部也可以作叉积运算

$$\mathbf{s} \times \mathbf{s}_0 = \mathbf{s} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{s}) \quad (3.6)$$

式中, 旋量轴线的位置向量 \mathbf{r} 和轴线向量 \mathbf{s} 的叉积等效于同旋量轴线垂直的位置向量 \mathbf{r}_0 与 \mathbf{s} 的叉积, 这种代换并不影响叉积运算结果. 考虑向量三重积的特性 $\mathbf{s} \times (\mathbf{r}_0 \times \mathbf{s}) = (\mathbf{s} \cdot \mathbf{s})\mathbf{r}_0 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}_0)\mathbf{s}$, 上式可变换为

$$\mathbf{s} \times \mathbf{s}_0 = \mathbf{s} \times (\mathbf{r}_0 \times \mathbf{s}) = (\mathbf{s} \cdot \mathbf{s})\mathbf{r}_0$$

由此给出了与旋量轴线正交的位置向量的方程, 为

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{s} \times \mathbf{s}_0}{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} \quad (3.7)$$

3.1.3 坐标变换法则与不变量

式 (3.2) 给定一旋量, 主部 \mathbf{s} 与坐标原点无关, 副部 \mathbf{s}_0 却随原点位置的变换而改变, 当原点位置由 O 变换为 P 时, 有

$$\mathbf{s}_p = (\mathbf{r}_{po} + \mathbf{r}) \times \mathbf{s} + h\mathbf{s} \quad (3.8)$$

式中, \mathbf{s}_p 为变换后旋量的副部; \mathbf{r}_{po} 为从 P 到 O 的位置向量, 如图 3.2 所示.

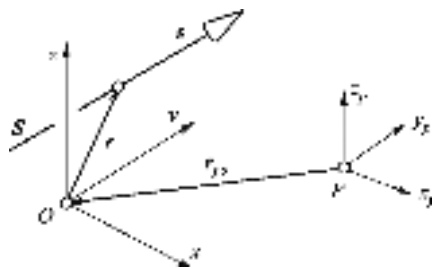


图 3.2 坐标原点变换

在上式中引入原副部向量 \mathbf{s}_0 , 可进一步改写为

$$\mathbf{s}_p = \mathbf{s}_0 + \mathbf{r}_{po} \times \mathbf{s} \quad (3.9)$$

此式给出了旋量的坐标变换法则. 将该式两边分别与主部向量 \mathbf{s} 作标量积, 得

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}_p = \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}_0 \quad (3.10)$$

不难发现, 式 (3.3) 所示的主部与副部的标量积与原点无关, 因此, 式 (3.4) 给出的旋距 h 是不变量.

3.2 旋量运算

3.2.1 互易积与 Klein 型

互易旋量由 Klein 于 1871 年首次提出, 同年, Ball 也独自提出这一概念. 如式 (2.9) 与注释 2.2 所示, 两旋量的互易积可由 Klein 型表示, 为

$$Kl(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = (\mathbf{s}_1^T, \mathbf{s}_{10}^T) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_{20} \end{pmatrix} = \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_{20} + \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_{10} \quad (3.11)$$

式中, 两旋量分别为 $\mathbf{S}_1 = (\mathbf{s}_1^T, \mathbf{s}_{10}^T)^T$ 和 $\mathbf{S}_2 = (\mathbf{s}_2^T, \mathbf{s}_{20}^T)^T$, 对偶算子 Δ 见式 (2.55).

定义 3.4 两旋量互矩称为旋量的互易积, 也称旋量的标量积¹, 即

$$\mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2 = \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_{20} + \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_{10} \quad (3.12)$$

如定义 2.3 与注释 2.2 所述, 互易积与 2.8 节中式 (2.59) 给出的线矢量互矩可统一于 Klein 型中. 旋量的互易性可详见 3.7 节以及第六章.

注释 3.2 互易积也称相互不变量, 被 Ball 称为虚系数.

定理 3.1 互易积独立于坐标系, 具有不变性.

证明 1 设坐标原点 O 在位置向量 \mathbf{r}_{po} 作用下变换至 P 点, 如式 (3.9) 所示, 两旋量的副部都要作相应变换, 进而产生变换后新的副部为

$$\mathbf{s}_{1p} = \mathbf{s}_{10} + \mathbf{r}_{po} \times \mathbf{s}_1$$

和

$$\mathbf{s}_{2p} = \mathbf{s}_{20} + \mathbf{r}_{po} \times \mathbf{s}_2$$

将上式代入式 (3.12), 并运用三重积偶排列特性, 可推导出

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2 &= \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_{2p} + \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_{1p} = \mathbf{s}_1 \cdot (\mathbf{s}_{20} + \mathbf{r}_{po} \times \mathbf{s}_2) + \mathbf{s}_2 \cdot (\mathbf{s}_{10} + \mathbf{r}_{po} \times \mathbf{s}_1) \\ &= \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_{20} + \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_{10} \end{aligned} \quad (3.13)$$

上式与式 (3.12) 相同. 由此, 互易积独立于坐标系, 为不变量. 定理得证.

¹旋量互易积的结果最早被 Ball (1871) 称为虚系数, 互易积由 von Mises (1924) 定义为旋量标量积.

该定理也可从如下另一角度证明.

证明 2 将旋量改写为含旋距参量的形式, 即 $\mathbf{S}_1 = (\mathbf{s}_1^T, (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{s}_1 + h_1 \mathbf{s}_1)^T)^T$ 和 $\mathbf{S}_2 = (\mathbf{s}_2^T, (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_2 + h_2 \mathbf{s}_2)^T)^T$, 则式 (3.12) 变换为

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2 &= (h_1 + h_2) \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}_1 \times \mathbf{s}_1 \\ &= (h_1 + h_2) \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

式中, h_1 、 h_2 分别为 \mathbf{S}_1 、 \mathbf{S}_2 的旋距.

记向量 \mathbf{s}_1 与 \mathbf{s}_2 的公法线的姿态向量对应的单位向量为 \mathbf{e} , 如图 3.3 所示, 存在式 $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = \cos \varphi$ 与 $\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \mathbf{e} \sin \varphi$, 同时将式 (2.62) 代入式 (3.14) 的第二项, 两旋量互易积可写为以下形式:

$$\mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2 = (h_1 + h_2) \cos \varphi - d \sin \varphi \quad (3.15)$$

式中, d 和 φ 分别为两旋量轴线的距离和投影夹角. 由此可见互易积独立于坐标系. 定理得证.

式 (3.15) 由 Ball (1871) 在基于互易旋量系的理论研究中首先提出, 并命名为虚系数.

3.2.2 旋量叉积

两旋量 \mathbf{S}_1 和 \mathbf{S}_2 的叉积由旋量主部的叉积及其相应主、副部交叉的叉积得到的向量构成, 表示为

$$\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_{20} + \mathbf{s}_{10} \times \mathbf{s}_2 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

定理 3.2 旋量叉积为零是两旋量共轴的充分必要条件.

证明 先证明充分性. 如图 3.3 所示, \mathbf{e} 表示两旋量轴线 \mathbf{s}_1 和 \mathbf{s}_2 的公法线对应的单位向量, 并且由 \mathbf{s}_1 指向 \mathbf{s}_2 . 取旋量轴线 \mathbf{s}_1 与 \mathbf{e} 的交点为原点 O , 两旋量可写成以下形式:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \\ h_1 \mathbf{s}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_2 \\ d\mathbf{e} \times \mathbf{s}_2 + h_2 \mathbf{s}_2 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

因此, 式 (3.16) 所示旋量叉积的副部可写为

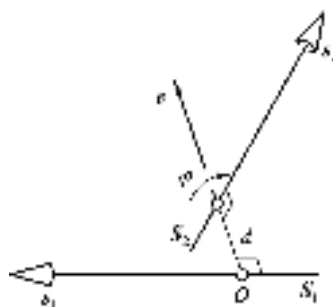


图 3.3 两旋量的相互位姿关系

$$\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_{10} \times \mathbf{s}_2 = d\mathbf{s}_1 \times (\mathbf{e} \times \mathbf{s}_2) + (h_1 + h_2)\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2$$

考虑到 \mathbf{s}_1 与 \mathbf{e} 正交, $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{e} = 0$, 又 $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = \cos \varphi$ 且 $\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \mathbf{e} \sin \varphi$, 应用向量三重积特性, 上式可变换为

$$\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_{10} \times \mathbf{s}_2 = (d \cos \varphi + (h_1 + h_2) \sin \varphi) \mathbf{e}$$

若 $\sin \varphi \neq 0$, 上式可写成

$$\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_{10} \times \mathbf{s}_2 = (d \cot \varphi + (h_1 + h_2)) \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 \quad (3.18)$$

由 $\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \mathbf{e} \sin \varphi$ 及上述分析, 式 (3.16) 所示旋量叉积公式则可简化为

$$\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} \sin \varphi \mathbf{e} \\ (d \cot \varphi + (h_1 + h_2)) \sin \varphi \mathbf{e} \end{pmatrix}$$

由上式, 当两旋量叉积为零时, 可得

$$\begin{cases} \mathbf{e} \sin \varphi = 0 \\ d\mathbf{e} \cos \varphi + (h_1 + h_2)\mathbf{e} \sin \varphi = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

即

$$\begin{cases} \mathbf{e} \sin \varphi = 0 \\ d\mathbf{e} \cos \varphi = 0 \end{cases}$$

由上式易知 $\varphi = 0$ 或 π 且 $d = 0$, 从而两旋量共轴, 由此充分性得证.

必要性可以从两旋量共轴推导出, 当两旋量共轴时, 两旋量轴线公垂线 $d = 0$ 且投影夹角 $\varphi = 0$ 或 π , 由此可知式 (3.19) 成立, 从而两旋量叉积为零. 定理得证.

3.2.3 旋量微分

旋量的微分是指旋量的主部和副部分别对时间取微分. 其中, 旋量 $\mathbf{S} = (\mathbf{s}^T, \mathbf{s}_0^T)^T$ 的主部仅与时间 t 有关. 而旋量 $\mathbf{S} = (\mathbf{s}^T, \mathbf{s}_0^T)^T$ 的副部不仅与时间 t 有关, 也取决于在时间 t 内该旋量相对固定坐标系的位移.

令旋量 \mathbf{S} 的副部对时间取微分. 假设在已知的 Δt 时间内, 位置向量 \mathbf{r} 从 A 点处的 \mathbf{r}_o 运动至 B 点处的 $\mathbf{r}_{o'}$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathbf{s}_0}{\Delta t} &= \frac{\mathbf{s}_0(t + \Delta t) - \mathbf{s}_0(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{\mathbf{s}_{o'}(t + \Delta t) + (\mathbf{r}_{o'} - \mathbf{r}_o) \times \mathbf{s}(t + \Delta t) - \mathbf{s}_0(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{\mathbf{s}_{o'}(t + \Delta t) - \mathbf{s}_0(t)}{\Delta t} + \frac{\mathbf{r}_{o'} - \mathbf{r}_o}{\Delta t} \times \mathbf{s}(t + \Delta t) \end{aligned} \quad (3.20)$$

令 Δt 趋近于无穷小量 dt , 可推导出

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{s}_0}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{s}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_o}{dt} \times \mathbf{s} \quad (3.21)$$

由此, 可给出旋量微分的定义式

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{s}}{dt} \\ \frac{d\mathbf{s}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_o}{dt} \times \mathbf{s} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

3.2.4 Killing 型

当两旋量旋距均为零时, 旋量退化为线矢量, 式 (3.15) 所示的旋量互易积转化为式 (2.62) 所示的线矢量互矩. 当两旋量轴线交于一点或无穷远处时, 其互易积为零. 由此可得到判定两直线位置关系及其夹角余弦值 (Karger 和 Novak, 1985) 的 Killing 型.

定义 3.5 Killing 型是李代数的内积, 为不变量, 也是对称双线性型, 即

$$\begin{aligned} K(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) &= \text{tr}(\text{ad}(\mathbf{S}_1)\text{ad}(\mathbf{S}_2)) = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} [\mathbf{s}_1 \times] & \mathbf{0} \\ [\mathbf{s}_{10} \times] & [\mathbf{s}_1 \times] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{s}_2 \times] & \mathbf{0} \\ [\mathbf{s}_{20} \times] & [\mathbf{s}_2 \times] \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{tr} \left(\begin{bmatrix} [\mathbf{s}_1 \times][\mathbf{s}_2 \times] & \mathbf{0} \\ [\mathbf{s}_{10} \times][\mathbf{s}_2 \times] + [\mathbf{s}_1 \times][\mathbf{s}_{20} \times] & [\mathbf{s}_1 \times][\mathbf{s}_2 \times] \end{bmatrix} \right) \\ &= -4(s_{1x}s_{2x} + s_{1y}s_{2y} + s_{1z}s_{2z}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

式中, 矩阵的迹 $\text{tr}(\cdot)$ 为矩阵主对角线元素之和; $\text{ad}(\cdot)$ 为李代数元素的伴随表示, 具体定义将在 3.9 节给出. Killing 型和式 (3.11) 给出的 Klein 型是李代数 $se(3)$ 仅有的两种具有不变性的对称双线性型.

注释 3.3 Killing 型的对称性由式 $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$ 得出.

推论 3.1 两旋量 Killing 型为零的充分必要条件是两旋量轴线垂直.

3.3 旋量与旋量运算的对偶表示

3.3.1 对偶数、对偶向量与矩量

对偶数由 Clifford 在构造 Clifford 算子 ω 时首次提出 (Clifford, 1873). 该算子为现在人们熟知的对偶单元 ε , 满足 $\varepsilon^2 = 0$. 对偶数的一般形式为 $v + \varepsilon v'$, 其中 v 和 v' 为实数, 分别为对偶数的主部和副部, 也可称为原部和对偶部.

定义 3.6 对偶角的主部为空间两直线或旋量轴线的投影夹角 φ , 副部为两直线或旋量轴线的垂直距离, 这一特殊的对偶数也称为对偶角.

如图 3.3 所示, 两旋量 S_1 和 S_2 的对偶角为

$$\Phi = \varphi + \varepsilon d \quad (3.24)$$

Study 最先提出对偶角的概念 (Study, 1903). 对偶角的意义在于所有常规的三角函数公式均可适用, 即

$$\begin{cases} \sin(\varphi + \varepsilon d) = \sin \varphi + \varepsilon d \cos \varphi \\ \cos(\varphi + \varepsilon d) = \cos \varphi - \varepsilon d \sin \varphi \end{cases} \quad (3.25)$$

与对偶角类似, 线矢量的对偶形式可以表示为

$$\mathbf{L} = \mathbf{l} + \varepsilon \mathbf{l}_0 \quad (3.26)$$

上式的数学含义与式 (2.6) 一致, 只是将线矢量的副部写为对偶部. Clifford 于 1882 年首次提出了上述对偶向量形式的矩量, 后来 Brand (1947) 对此进行了重点研究.

定义 3.7 矩量为矩与向量的合称, 是线矢量与对偶数 $\lambda + \varepsilon \lambda'$ 乘积得到的几何量.

矩量也是旋量的广义拓展, 可称为**泛旋量**. 线矢量与对偶数作乘积可得

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} + \varepsilon \boldsymbol{m}_0 = (\lambda + \varepsilon \lambda')(\boldsymbol{l} + \varepsilon \boldsymbol{l}_0)$$

展开可得矩量的定义式为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} + \varepsilon \boldsymbol{m}_0 = \lambda \boldsymbol{l} + \varepsilon(\lambda' \boldsymbol{l} + \lambda \boldsymbol{l}_0) \quad (3.27)$$

这就给出了矩量的定义.

注释 3.4 矩量的旋距同定义 3.3, 表示为

$$h = \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{m}_0}{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{m}}$$

注释 3.5 矩量包含四组不同的向量.

(1) 线矢量: 当 $\lambda \neq 0, \lambda' = 0$ 时, 由式 (3.27) 可得到式 (3.26) 所示的对偶形式的线矢量. 按注释 3.4, 旋距为零.

(2) 旋量: 当 $\lambda \neq 0, \lambda' \neq 0$ 时, 有以下两种情况

(a) 当 $\lambda = 1$ 时, 上式为旋量. 旋距为 $h = \lambda'$.

(b) 当 λ 为非单位量时, 上式可用来表示力旋量和速度旋量. 旋距为 $h = \lambda'/\lambda$.

线矢量与旋量被 Brand 称为**本征矩量**.

(3) 当 $\lambda = 0, \lambda' \neq 0$ 时, 上式变换为由纯对偶向量构成的旋量, 即

$$\boldsymbol{M} = \varepsilon \lambda' \boldsymbol{l} \quad (3.28)$$

(4) 当 $\lambda = \lambda' = 0$ 时, 这就给出了**零矩量**, 也为零向量、零旋量.

由此, 矩量被分为四种六维向量. 总而言之, 在旋量理论中, 矩量的提出使我们找到了一个涵盖线矢量、旋量、力旋量和速度旋量以及零旋量的广义量, 即矩量.

定义 3.8 旋量的对偶形式为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s} + \varepsilon \boldsymbol{s}_0 = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

如果将线矢量和纯平移旋量视为矩量的退化形式, 就可产生对加法运算具有封闭性的矩量代数学, 即旋量代数学.

3.3.2 旋量运算的对偶表示

1. 互易积和全标量积

互易积运算最早由 von Mises 提出. 两旋量的互易积 $S_1 \circ S_2$ 的定义见 3.2.1 节的式 (3.12).

定义 3.9 旋量全标量积为

$$S_1 \cdot S_2 = s_1 \cdot s_2 + \varepsilon(s_1 \cdot s_{20} + s_{10} \cdot s_2) \quad (3.30)$$

其中, 副部与式 (3.12) 给出的互易积相同. 3.2.1 节已证明, 互易积与原点的选取无关, 是独立于坐标系的不变量. 不失一般性, 取旋量 S_1 与两旋量轴线公法线的单位向量 e 的交点为原点, 空间任意两旋量的对偶形式可表示为 $S_1 = s_1 + \varepsilon h_1 s_1$ 和 $S_2 = s_2 + \varepsilon(de \times s_2 + h_2 s_2)$, 类似于式 (3.18), 上式可变换为

$$\begin{aligned} S_1 \cdot S_2 &= s_1 \cdot s_2 + \varepsilon(ds_1 \cdot (e \times s_2) + (h_1 + h_2)s_1 \cdot s_2) \\ &= \cos \varphi - \varepsilon de \cdot (s_1 \times s_2) + \varepsilon(h_1 + h_2) \cos \varphi \\ &= \cos \varphi - \varepsilon d \sin \varphi + \varepsilon(h_1 + h_2) \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.31)$$

引入式 (3.24) 所示的对偶角, 并将式 (3.25) 中的正余弦公式代入, 上式可简化为

$$S_1 \cdot S_2 = \cos \Phi + \varepsilon(h_1 + h_2) \cos \varphi \quad (3.32)$$

当两旋量的旋距同时为零或互为相反数时, 上式可进一步简化为

$$S_1 \cdot S_2 = \cos \Phi \quad (3.33)$$

从以上推导过程不难发现, 引入对偶角后得到的上述结果与向量代数中的标量积是一致的. 对于旋量, 应该考虑到旋距的影响. 当两旋量轴线垂直相交时, 式 (3.30) 所示的全标量积以及式 (3.11) 所示的 Klein 型与式 (3.23) 所示的 Killing 型均为零. 由此得出如下推论.

推论 3.2 从几何角度出发, 两旋量全标量积为零的充分必要条件是两旋量轴线垂直相交; 相应地, 从代数角度看, 两旋量全标量积为零的充分必要条件是两旋量的 Killing 型与 Klein 型同时为零.

2. 旋量叉积的对偶表示

旋量叉积的对偶形式同样可由 3.2.2 节推导出. 它是由 Brand (1947) 以 Gibbs 形式 (Gibbs, 1901) 给出的两对偶向量的矩量积, 即

$$\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2 = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 + \varepsilon(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_{20} + \mathbf{s}_{10} \times \mathbf{s}_2) \quad (3.34)$$

与 3.2.2 节推导过程类似, 在图 3.3 中取旋量轴线 \mathbf{s}_1 与 \mathbf{e} 的交点为原点, 上式可以写成类似式 (3.17) 和式 (3.19) 的形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2 &= \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 + \varepsilon(d\mathbf{s}_1 \times (\mathbf{e} \times \mathbf{s}_2) + (h_1 + h_2)\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2) \\ &= \mathbf{e} \sin \varphi + \varepsilon(d\mathbf{e}(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2) - d\mathbf{s}_2(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{e}) + (h_1 + h_2)\mathbf{e} \sin \varphi) \\ &= \mathbf{e}(\sin \varphi + \varepsilon d \cos \varphi) + \varepsilon(h_1 + h_2)\mathbf{e} \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.35)$$

引入式 (3.24) 所示的对偶角, 并将式 (3.25) 代入上式得

$$\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2 = \mathbf{e} \sin \Phi + \varepsilon(h_1 + h_2)\mathbf{e} \sin \varphi \quad (3.36)$$

当两旋量旋距全为零或互为相反数时, 上式变换为

$$\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2 = \mathbf{e} \sin \Phi \quad (3.37)$$

上述结果同线性代数中向量叉积计算公式相一致. 对于旋量, 如式 (3.35) 所示, 旋距的影响应该考虑. 由上述推导, 以下推论成立.

推论 3.3 旋量叉积的主部为零是两旋量平行或共轴的充分必要条件.

3. 旋量标量三重全积

已知任意三个旋量 \mathbf{S}_1 、 \mathbf{S}_2 和 \mathbf{S}_3 , 以主部的标量三重积为主部, 以主部与副部相互交叉置换的标量三重积之和为副部, 可以构成旋量标量三重全积. 其定义式为

$$(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2) \cdot \mathbf{S}_3 = (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2) \cdot \mathbf{s}_3 + \varepsilon(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_{30} + \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_{20} \cdot \mathbf{s}_3 + \mathbf{s}_{10} \times \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_3)$$

若基于 von Mises 对标量积的定义, 也可将旋量标量三重积定义为上式的副部, 即

$$(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2) \circ \mathbf{S}_3 = (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2) \cdot \mathbf{s}_{30} + (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_{20} + \mathbf{s}_{10} \times \mathbf{s}_2) \cdot \mathbf{s}_3 \quad (3.38)$$

将式 (3.18) 代入上式, 得

$$(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2) \circ \mathbf{S}_3 = (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2) \cdot ((h_1 + h_2 + d \cot \varphi) \mathbf{s}_3 + \mathbf{s}_{30}) \quad (3.39)$$

式中, φ 不能取 0 或 π , 即该式不包含两旋量轴线平行的情况.

3.4 速度旋量与 Mozzi 瞬轴

3.4.1 螺旋运动速度场

刚体在三维空间的运动均可表示为绕一轴线的旋转与沿该轴的平移, 与螺母在螺丝上的运动类似.

定义 3.10 速度旋量是含有速度幅值的旋量, 隶属于矩量的范畴, 也是李代数 $se(3)$ 的元素.

速度旋量的轴线为旋转轴的轴线, 平移的方向平行于该轴线, 平移速度与旋转速度的比值为速度旋量的旋距. 如图 3.4 所示, 给定旋量轴线, 并已知刚体关于旋量轴线的角速度 ω 和固联在刚体上的点 P 的速度 \mathbf{v}_P . 则此刚体上任意点的速度均可分解为平行于旋量轴线的分量 $h\omega$ 和正交于旋量轴线的分量 $\omega \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_O)$.

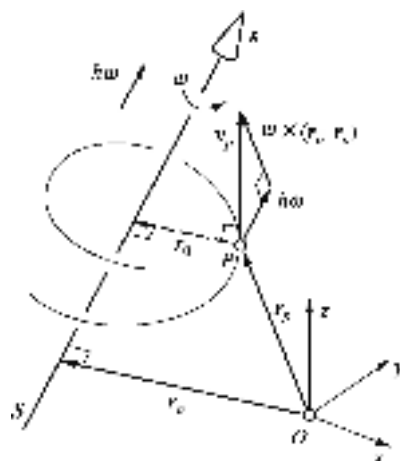


图 3.4 瞬时旋量轴线及螺旋运动速度场

旋量轴线的位置由 \mathbf{r}_o 确定, 如图 3.4 所示.

定义 3.11 当刚体绕某一轴线作瞬时运动时, 描述该运动的旋量即为瞬时旋量 (instantaneous screw); 该旋量轴线为刚体瞬时运动轴线, 称为**瞬时旋量轴** (instantaneous screw axis, 简称 ISA), 也称瞬轴.

刚体关于瞬时轴线的瞬时角速度为 ω , 这样一来, 刚体上任意点均具有相同角速度 ω . 沿该轴线方向, 只有速度为 $h\omega$ 的平移, 这样的轴线即为瞬轴 (ISA). 瞬轴的概念是由意大利数学家 Mozzi (1763) 首次提出, 因而也称为 Mozzi 瞬轴. 基于此, P 点速度 \boldsymbol{v} 可分解为与轴线平行和垂直两部分, 为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_s + \boldsymbol{v}_n = h\omega + \omega \times (\boldsymbol{r}_p - \boldsymbol{r}_o) \quad (3.40)$$

瞬轴产生的全部速度向量构成**螺旋运动速度场**. 当 $\boldsymbol{r}_p = \boldsymbol{r}_o$ 时, 点 P 在旋量轴线上, 此时速度 \boldsymbol{v} 等于旋距引起的平移速度, 即 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{v}_n = h\omega$. 当 $\boldsymbol{r}_p = \mathbf{0}$ 时, 即原点位于 P 点处, 该点的运动等于速度旋量的副部 \boldsymbol{v} . 可见, 速度旋量 \boldsymbol{T} 的副部实质上表示的是刚体上与原点 O 重合的点的瞬时线速度.

3.4.2 速度旋量及其李代数表示

将式 (3.40) 两边分别对旋量轴线向量 \boldsymbol{s} 取标量积, 得到

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{s} = h\omega \cdot \boldsymbol{s} + \omega \times (\boldsymbol{r}_p - \boldsymbol{r}_o) \cdot \boldsymbol{s} \quad (3.41)$$

由于 $\omega = \omega \boldsymbol{s}$, 上式化简后可得线速度分量 v_s 为

$$v_s = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{s} = h\omega \cdot \boldsymbol{s} \quad (3.42)$$

由此得出结论, 旋距表征线速度向量在旋量轴线上的投影. 式 (3.40) 可变换为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{r}_o - \boldsymbol{r}_p) \times \omega + h\omega \\ &= \boldsymbol{r} \times \omega + h\omega \end{aligned} \quad (3.43)$$

式中, \boldsymbol{r} 为由 P 点指向轴线的位置向量. 至此, 经过推导得到了速度旋量的

副部, 结合其主部, 速度旋量可定义为

$$T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega} + h\boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{s}_0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s} + h\boldsymbol{s} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \\ p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{S} \quad (3.44)$$

为求得速度旋量旋距 h 及与旋量轴线垂直的位置向量 \boldsymbol{r}_0 , 将式 (3.43) 两边对 $\boldsymbol{\omega}$ 取叉积, 并由向量三重积, 得

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}) + h\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}) \quad (3.45)$$

用正交位置向量 \boldsymbol{r}_0 取代 \boldsymbol{r} , 并注意 \boldsymbol{r}_0 与 $\boldsymbol{\omega}$ 正交, 上式可简化为

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) \quad (3.46)$$

至此, 便得到速度旋量正交位置向量表达式, 同式 (3.7) 一致, 如下:

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}} = \frac{\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{s}_0}{\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}} \quad (3.47)$$

进一步, 将式 (3.43) 两边对 $\boldsymbol{\omega}$ 取标量积, 即

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}) + h\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = h\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (3.48)$$

由此推导出速度旋量另一个重要参数, 即旋距, 为

$$h = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}} = \frac{\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}_0}{\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}} \quad (3.49)$$

这证实了速度旋量的平移分量 $h\boldsymbol{\omega}$ 等同于刚体上任一点的速度在旋量轴方向的分量. 至此, 刚体瞬时运动得以完整描述. 实际上, 刚体上任意点的瞬时线速度均可用类似图 3.4 所示 P 点速度的表达方式来描述.

若刚体的运动由转动关节引起, 其运动可以由旋距为零的速度旋量来描述, 为

$$T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s} \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

若刚体运动由移动副引起,可用旋距无穷大的速度旋量来描述其运动,即

$$\mathbf{T} = v \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

注释 3.6 速度旋量可表示为李代数 $se(3)$ 的元素,为

$$\text{ad}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y & v_x \\ \omega_z & 0 & -\omega_x & v_y \\ -\omega_y & \omega_x & 0 & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega} \times] & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} \in so(3) \quad (3.52)$$

式中, $\text{ad}(\mathbf{T})$ 为李代数的伴随表示; $[\boldsymbol{\omega} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$, 是李代数 $so(3)$ 的元素.

李代数 $se(3)$ 的元素构成的空间的维数是 6, 与向量空间 \mathbb{R}^6 同构, 记为 $se(3) \cong \mathbb{R}^6$. 若刚体沿 \mathbf{s} 方向以速度 v 作纯平移, 其运动可描述为标量与旋量轴线姿态向量 \mathbf{s} 作乘积.

3.4.3 刚体运动

本部分给出一个用速度旋量描述刚体运动的实例.

例 3.1 设刚体以大小为 0.5 rad/s 的角速度绕轴线旋转, 轴线为过点 $(-1, 0, 1)^T \text{ m}$ 和 $(2, 1, 5)^T \text{ m}$ 的直线, 其中 m 代表长度单位“米”. 另外, 刚体上坐标为 $\mathbf{r}_p = (1, 2, 3)^T$ 的点 P 的速度给定为

$$\mathbf{v} = (0.6, 0.4, 0.5)^T \text{ m/s} \quad (3.53)$$

由此, 旋量轴线 \mathbf{s} 可表示为

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\sqrt{26}}(3, 1, 4)^T \quad (3.54)$$

并且, 有

$$\boldsymbol{\omega} = 0.5\mathbf{s} \text{ rad/s} \quad (3.55)$$

根据式 (3.46), 得

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{26}}(-0.55, 0.45, 0.30)^T \quad (3.56)$$

由式 (3.47), 点 P 指向旋量轴线的正交位置向量可写作

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}}{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{0.5 \times 0.5 \sqrt{26}} (-0.55, 0.45, 0.30)^T \text{ m} \\ &= (-0.432, 0.353, 0.235)^T \text{ m} \end{aligned} \quad (3.57)$$

由于 P 点坐标为 $\mathbf{r}_p = (1, 2, 3)^T$, 其垂直于速度旋量轴线的正交位置向量为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_p + \mathbf{r}_0 = (0.568, 2.353, 3.235)^T \text{ m} \quad (3.58)$$

上式描述的位置向量如图 3.5 所示. 由式 (3.42) 可求出纯平移速度分量为

$$\begin{aligned} v_s &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{s} = \frac{1}{\sqrt{26}} (0.6, 0.4, 0.5) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ m/s} \\ &= \frac{4.2}{\sqrt{26}} \text{ m/s} \end{aligned} \quad (3.59)$$

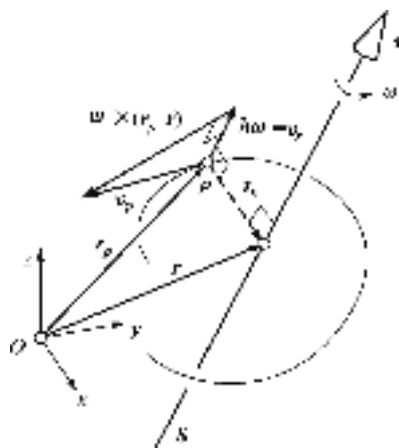


图 3.5 刚体瞬时运动

进而, 由式 (3.42) 求得速度旋量的旋距为

$$h = \frac{v_s}{\omega} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}}{\omega} = \frac{4.2}{0.5\sqrt{26}} \text{ m/rad} = 1.647 \text{ m/rad} \quad (3.60)$$

3.4.4 串联刚体

如图 3.6 所示, 若作瞬时运动的两个刚体通过转动副串联在一起, 给定旋量 S_1 的速度幅值即可确定刚体 1 相对固定坐标系的瞬时运动 T_1 . 同理, 给定旋量 S_2 的相关参数, 即可以确定刚体 2 相对刚体 1 的瞬时运动 T_2 , 分别表示为

$$T_1 = \omega_1 \begin{pmatrix} s_1 \\ r_1 \times s_1 \end{pmatrix}, T_2 = \omega_2 \begin{pmatrix} s_2 \\ r_2 \times s_2 \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

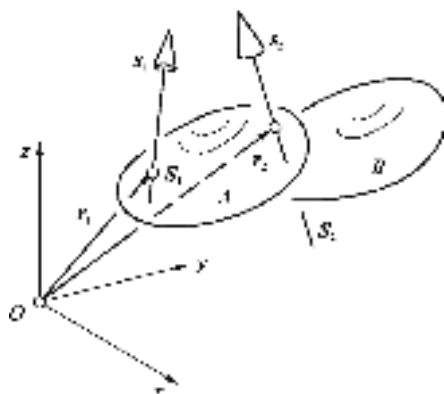


图 3.6 两串联运动刚体

刚体 2 相对固定坐标系的运动可用速度旋量 T 表示为

$$T = \omega \begin{pmatrix} s \\ s_0 \end{pmatrix} = \omega S \quad (3.62)$$

式中

$$T = T_1 + T_2 = \begin{pmatrix} \omega_1 s_1 + \omega_2 s_2 \\ \omega_1 (r_1 \times s_1) + \omega_2 (r_2 \times s_2) \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

上式的证明过程见第四章.

显然, 对式 (3.62), $s \cdot s_0 \neq 0$, 即 S 为非零旋距的旋量. 因此, 刚体 2 相对固定坐标系的瞬时运动就不能表示为绕任一轴的纯旋转, 还需要增加一个平移分量.

将式 (3.62) 变换为下列形式:

$$T = \omega \begin{pmatrix} s \\ s_0 - h s \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} 0 \\ h s \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

此式把速度旋量 T 分解为两部分. 第一部分为关于轴线 s 的纯旋转, 第二部分为沿轴线 s 方向且速度为 $h\omega$ 的纯平移, 式中, 旋距 h 可由式 (3.49) 求出. 因此, 刚体 2 的任意瞬时运动均可看作绕 s 方向的纯旋转与沿该轴线方向的纯平移之和. 由此刚体 2 的瞬时螺旋运动可表示为

$$T = \omega \begin{pmatrix} s \\ r \times s + hs \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

比较上式和式 (3.62), 有

$$r \times s = s_0 - hs$$

这可用于求解正交位置向量 r_0 . 用式 (3.49) 取代上式的 h , 同时应用向量三重积恒等式得

$$r_0 \times s = s_0 - \frac{s \cdot s_0}{s \cdot s} s = \frac{(s \cdot s)s_0 - (s \cdot s_0)s}{s \cdot s} = \left(\frac{s \times s_0}{s \cdot s} \right) \times s \quad (3.66)$$

化简得

$$r_0 = \frac{s \times s_0}{s \cdot s} \quad (3.67)$$

上式与式 (3.47) 相同. 但该式由副部推出, 与旋距无关. 因此, 对于任意速度旋量, 式 (3.47) 和式 (3.49) 给出的计算正交位置向量及旋距的公式均适用.

3.4.5 机械臂

例 3.2 如图 3.7 所示, 机械臂的第一个杆件与机座通过转动副 O_1 连接, 可在水平面内绕通过 O_1 点的竖直线旋转. 第二个杆件与第一个杆件通过点 O_2 处的转动副相连, 可绕水平轴线作相对第一个杆件的转动, 该轴线过 O_2 点, 且与 $x-y$ 平面平行, 与第一个杆件正交. 坐标系 $\{x_1y_1z_1\}$ 为固定坐标系, 坐标系 $\{x_2y_2z_2\}$ 则随杆件 O_1O_2 的转动而变动. 两坐标系之间的关系可表示为

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

两个转动关节 O_1 和 O_2 处的速度旋量 T_1 和 T_2 可表示为

$$\begin{aligned} T_1 &= \omega_1(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T, \\ T_2 &= \omega_2(\cos \theta_1, \sin \theta_1, 0, 0, 0, -a)^T \end{aligned} \quad (3.68)$$

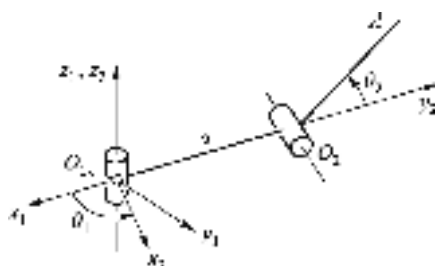


图 3.7 串联机械臂

刚体 A 的速度旋量可表示为

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 = (\omega_2 \cos \theta_1, \omega_2 \sin \theta_1, \omega_1, 0, 0, -a\omega_2)^T \quad (3.69)$$

因此第二个杆件速度旋量的旋距 h 为

$$h = -\frac{a\omega_1\omega_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \quad (3.70)$$

其正交位置向量 \mathbf{r}_0 的表达式也可求出, 即

$$\mathbf{r}_0 = \frac{a\omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

3.5 力旋量与 Poincot 中心轴定理

3.5.1 对偶李代数 $se^*(3)$ 元素的力旋量

由纯力以及与该力作用线平行的力偶组成的力, 称为作用在旋量轴向上的力旋量, 简称力旋量.

定义 3.12 力旋量是含有力幅值的旋量, 隶属于矩量范畴, 与李代数 $se(3)$ 构成对偶关系, 可表示为

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{s}_0 \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{s} + h\mathbf{s} \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

式中, $\mathbf{W} \in se^*(3)$; w 表示力的大小; \mathbf{s} 为力所在的线矢量的姿态向量, 也为轴线向量; \mathbf{r} 为力所在的线矢量的位置向量. 在力旋量定义中, 力偶 \mathbf{m} 在轴

线方向上的投影和纯力 f 的幅值的比值为旋距. 与力旋量的轴线垂直相交的位置向量表达式可根据式 (3.7) 导出.

对偶李代数 $se^*(3)$ 元素构成的空间力旋量可映射为向量空间 \mathbb{R}^6 上的一个向量.

3.5.2 Poinsot 中心轴定理

定理 3.3 Poinsot 中心轴定理 (Poinsot, 1806) 指出, 任意力与力偶的力系均可简化为空间某定点处的纯力和与之相平行的力偶.

下面给出简化过程. 对空间任意力系, 若用 f 表示简化结果中沿轴线 s 的合力, 则有

$$f = fs \quad (3.73)$$

再用 m 表示相对于点 P 简化得到的合力偶, 则

$$f = \sum_{i=1}^n f_i, \quad m = \sum_{i=1}^n r_i \times f_i + \sum_{i=1}^n c_i \quad (3.74)$$

式中, 合力偶 m 的方向是任意的; c 表示原力系中的力偶. 力系简化的结果如图 3.8a 所示, 即为式 (3.72) 表示的力旋量. 进一步研究, 如图 3.8b, 合力偶可分解为与合力 f 同向的分量 m_s 及与 f 正交的分量 m_n .

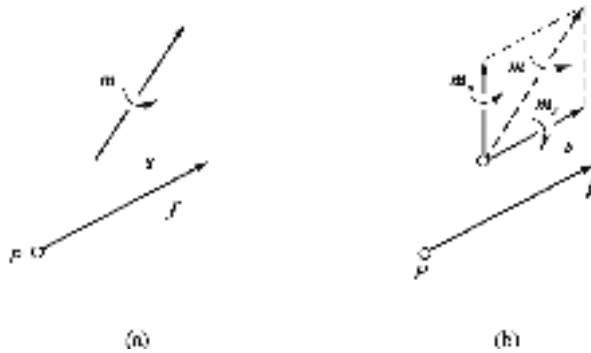


图 3.8 合力与合力偶及合力偶的分解

力偶沿合力 f 方向的分量 m_s 可根据下式求出:

$$(m \cdot s)s = m_s s \quad (3.75)$$

式中, c 为合力偶在合力 f 方向上的投影, 并且 f 的作用线的方向与旋量轴线 s 的方向一致. 进而, 与合力 f 正交的力偶分量 m_n 可由 $m - cs$ 得出, 如图 3.8b 所示. 这一力偶分量 m_n 可以由纯力 f 平移距离 r 得到的附加力偶 $f \times r$ 相抵, 使得位置向量 r 满足 f 对 P 点取矩得到的结果恰为力偶分量 m_n . 由此, 力偶分量 m_n 在图 3.9a 中消失.

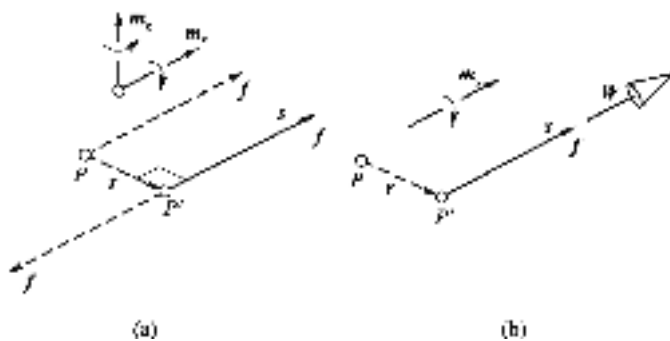


图 3.9 合力与力偶

与 f 正交的力偶分量 m_n 可由 f 对 P' 点取矩表示, 得

$$m_n = m - m_s = m - cs = -f \times r \quad (3.76)$$

3.5.3 力旋量参数

将式 (3.76) 两边分别对 s 作标量积可得

$$s \cdot m - cs \cdot s = s \cdot (r \times f) \quad (3.77)$$

上式右边的三重积为零且 s 为单位向量, 由此可推导出合力偶在轴线方向上分量的大小, 为

$$c = m \cdot s \quad (3.78)$$

旋距作为标准化的数值参数, 反映了力偶与纯力大小的比值, 即

$$h = \frac{c}{f} \quad (3.79)$$

由式 (3.73), 上式可进一步写为

$$h = \frac{c}{f} = \frac{m \cdot f}{f \cdot f} \quad (3.80)$$

将式 (3.76) 两边对 \boldsymbol{f} 做叉乘, 并运用向量三重积恒等式, 得

$$\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{m} = \boldsymbol{f} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}) = (\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{f})\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{f} \quad (3.81)$$

取过原点且垂直于 \boldsymbol{f} 的线矢量的位置向量为 \boldsymbol{r}_0 , 代入上式的 \boldsymbol{r} , 并考虑到 $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{r}_0 = 0$, 可推导出正交位置向量 \boldsymbol{r}_0 的表达式为

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{m}}{\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{f}} \quad (3.82)$$

因此, 力系简化得到的结果可用图 3.10 所示的力旋量表示.

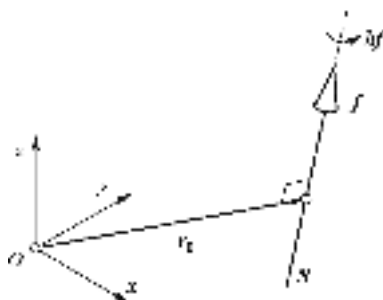


图 3.10 力旋量及其正交位置向量

由上述推导过程可知, 力旋量可通过以下方法构建:

- (1) 合力 \boldsymbol{f} 由常规力合成的方法得到;
- (2) 任意力系相对某定点 P 的合力偶 \boldsymbol{m} 也可由理论力学的一般方法获得;
- (3) 力旋量的大小及力旋量轴线上一点 P' 的位置可根据以上推导得到的公式由 \boldsymbol{f} 和 \boldsymbol{m} 导出.

依据 3.1.3 节给出的坐标变换法则, 合力偶亦可用平行于合力方向的分量 \boldsymbol{m}_s 与正交于合力方向的分量 $\boldsymbol{m}_n = -\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{r}$ 求和表示, 即

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_s + \boldsymbol{m}_n = c\boldsymbol{s} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f} \quad (3.83)$$

此式与式 (3.76) 是一致的.

特别地, 纯力可用旋距为零的力旋量表示, 为

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{m} \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s} \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

纯力偶可用旋距无穷大的力旋量表示, 为

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ cs \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

3.5.4 合成力旋量

下面举例说明求解合成力旋量的过程.

例 3.3 如图 3.11 所示, 大小分别为 40 N 和 20 N 的力作用在矩形板料上. 力 F_1 作用线的姿态向量坐标为

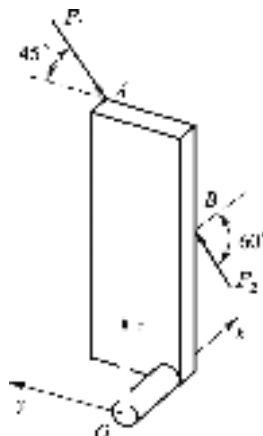


图 3.11 受到力作用的矩形板料

$$\mathbf{s}_A = (0, -\cos 45^\circ, -\sin 45^\circ)^T = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$$

其位置为

$$\mathbf{r}_A = (1, 1, 3)^T$$

由此, 副部为

$$\mathbf{r}_A \times \mathbf{s}_A = \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$$

力 F_2 作用线的姿态向量坐标为

$$\mathbf{s}_B = (-\cos 60^\circ, 0, \sin 60^\circ)^T = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^T$$

其位置为

$$\mathbf{r}_B = (1, 0, \sqrt{3})^T$$

由此, 副部为

$$\mathbf{r}_B \times \mathbf{s}_B = (0, -\sqrt{3}, 0)^T$$

因此, 上述两力 F_1 和 F_2 对应的力旋量分别为

$$\mathbf{W}_A = 40 \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^T$$

和

$$\mathbf{W}_B = 20 \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\sqrt{3}, 0 \right)^T$$

将两个力的作用等效为合力 \mathbf{f} 加之对原点 O 取矩得到的力偶 \mathbf{m} , 可得以下结果:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_A + \mathbf{W}_B = (-10, -20\sqrt{2}, -20\sqrt{2} + 10\sqrt{3}, 40\sqrt{2}, 20\sqrt{2} - 20\sqrt{3}, -20\sqrt{2})^T$$

可得到合力与合力偶分别为

$$\mathbf{f} = f\mathbf{s} = 31.94(-0.313, -0.886, -0.343)^T \text{ N}$$

和

$$\mathbf{m} = 66.04(0.856, -0.288, -0.428)^T \text{ N}\cdot\text{m}$$

由式 (3.78) 知纯力偶的大小为

$$c = \mathbf{m} \cdot \mathbf{s} = 8.854 \text{ N}\cdot\text{m} \quad (3.86)$$

因此, 由式 (3.80) 可得力旋量的旋距为

$$h = \frac{c}{f} = \frac{8.854}{31.94} \text{ m} = 0.277 \text{ m} \quad (3.87)$$

力旋量轴线的位置可由以原点为起始点的正交位置向量 \mathbf{r}_0 给定, 如式 (3.82), 表示为

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{f} \times \mathbf{m}}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}} = (0.579, -0.885, 1.382)^T \text{ m}$$

3.6 几何量的向量表示

3.6.1 静力学与瞬时运动学的对应性

力旋量与速度旋量在数学形式上的一致性, 决定了旋量理论中静力学与瞬时运动学具有直接的对应性. 表 3.1 全面展示了两者的对应性.

表 3.1 静力学与瞬时运动学的对应性

	几何意义	瞬时运动学	静力学
主部	直线 (姿态向量)	具有一定角速度的 旋转轴线 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega s}$	力作用线 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f s}$
副部	关于原点的矢矩 (直线的位置)	平移速度 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega s}_0$	力矩 $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{f s}_0$
旋距的影响			
非零旋距	旋量 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s} + \boldsymbol{h s} \end{pmatrix}$ 式 (3.2)	旋转 + 平移 $\boldsymbol{\omega} \begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s} + \boldsymbol{h s} \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega s} \\ \boldsymbol{\omega r} \times \boldsymbol{s} + \boldsymbol{v}_s \boldsymbol{s} \end{pmatrix}$ 式 (3.44)	纯力 + 力偶 $\boldsymbol{f} \begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s} + \boldsymbol{h s} \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \boldsymbol{f s} \\ \boldsymbol{f r} \times \boldsymbol{s} + \boldsymbol{c s} \end{pmatrix}$ 式 (3.84) + 式 (3.85)
零旋距	线矢量 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s} \end{pmatrix}$ 式 (2.6)	纯旋转 $\boldsymbol{\omega} \begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s} \end{pmatrix}$ 式 (3.50)	纯力 $\boldsymbol{f} \begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s} \end{pmatrix}$ 式 (3.84)
无穷大旋距	偶量 $\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{h s} \end{pmatrix}$ 式 (3.64)	纯平移 $\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{v s} \end{pmatrix}$ 式 (3.51)	纯力偶 $\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{c s} \end{pmatrix}$ 式 (3.85)

表 3.1 中, 与力旋量轴线平行的力偶的幅值 c 由式 (3.78) 给出, 且式 (3.79) 给出了力偶幅值 c 与旋距 h 之间的关系. 类似地, 与速度旋量轴线平行的平移速度的幅值 v_s 由式 (3.42) 给定, 而且也给出了平移速度 v_s 幅值与旋距 h 之间的关系, 也可参考式 (3.59) 与式 (3.60). 这种对应性是其对偶性的内在原因, 将在第九章作进一步讨论.

3.6.2 向量空间几何量的关联特性

关于自由向量、旋转线矢量、旋量、矩量、四元数与双四元数 (对偶四元数) 之间的关系, Clifford (1882) 在《双四元数概述》一文的旋量表格中给出了著名的阐述, 如表 3.2 所示.

表 3.2 自由向量、旋转线矢量、旋量、矩量、四元数、双四元数的几何表示、特性与变换

几何形式	向量表示	代数或物理含义	算子
有向线段	一维空间向量	正数或负数	含正负号的数
平面姿态	二维空间向量	复数	复数
空间姿态	三维空间向量	平移, 力偶	四元数
轴线	旋转线矢量	旋转速度, 纯力	速度 (位移) 旋量
旋量	矩量	速度旋量, 力系	双四元数

Clifford 将旋量视为矩量的几何形式, 其物理意义用以表示螺旋运动速度以及力系. Clifford 又将双四元数 (即现在的对偶四元数) 表示为作用于矩量的算子, 用来描述从一个矩量到另一个矩量的螺旋位移. 双四元数是由四元数和对偶数构成的算子. 下一章将对此作更深入的探讨.

3.7 互易性

两旋量互易的条件是互易积为零, 下面等式为互易性的定义式, 互易性奠定了整个旋量系理论的基础.

定义 3.13 当两旋量 S_1 和 S_2 的标量积即互易积为零时, 称这两旋量具有互易性, 即

$$S_1 \circ S_2 = 0 \quad (3.88)$$

进而由式 (3.15) 得出

$$S_1 \circ S_2 = (h_1 + h_2) \cos \varphi - d \sin \varphi = 0 \quad (3.89)$$

当两个旋量的旋距均为零时, 上式变为

$$S_1 \circ S_2 = -d \sin \varphi = 0 \quad (3.90)$$

因此,若两个旋量的旋距均为零,两旋量互易的几何条件为相交或平行.若两个旋量的旋距均为有限值,根据式 (3.89),两旋量互易的几何条件可分为几种情况.第一种为两旋量轴线垂直相交,或者两旋量轴线相交且旋距之和为零.第二种为两旋量轴线平行且旋距之和为零. Hunt (1978) 给出了全部分类.根据上述分析,可以得到以下两旋量互易的几何关系.

(1) 如果两旋量的旋距互为相反数,并相交或平行/反向平行,那么旋量的几何关系可据式 (3.89) 划分为以下两种情况.

(a) $h_1 = h_2 = 0$, 此时两旋量均为线矢量,因而,根据 $d \sin \varphi = 0$ 又可分为两种情况: (i) $d = 0$, 两旋量相交; (ii) $\varphi = 0$ 或 π , 两旋量平行或反向平行.

(b) $h_1 = -h_2$, 根据 $d \sin \varphi = 0$ 又可分为上述 (i) 和 (ii) 两种情况.

(2) 如果两个具有有限旋距的旋量相交,那么 $d = 0$, 式 (3.89) 可化简为 $(h_1 + h_2) \cos \varphi = 0$, 并产生以下两种情形:

(a) $h_1 = -h_2$, 与上述 (b) 中 (i) 情况相同;

(b) $\varphi = \pi/2$ 或 $3\pi/2$, 两旋量轴线正交.

(3) 如果一个旋量的旋距为无穷值,另一个旋量的旋距为有限值或零,则二者互易的几何条件是:具有无穷大旋距的旋量所在的平面与有限旋距旋量垂直.

(4) 如果两个旋量的旋距均为无穷值,则两旋量互易.

(5) 除了上述情况,只要两旋量的位姿关系与旋距满足如下关系,则二者互易:

$$d \sin \varphi = (h_1 + h_2) \cos \varphi$$

3.8 正则旋量

正则旋量可用图 3.12 所示的无限大四面体表示,旋量 S_1 , S_2 和 S_3 沿坐标轴分布,即

$$S_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T \quad (3.91)$$

$$S_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T \quad (3.92)$$

$$S_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T \quad (3.93)$$

这三个正则旋量可合成为过原点的任意线矢量. 旋量 S_4 , S_5 和 S_6 的旋距为无穷大, 有

$$S_4 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T \quad (3.94)$$

$$S_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T \quad (3.95)$$

$$S_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T \quad (3.96)$$

这六个正则旋量任意组合可构成空间内的所有旋量.

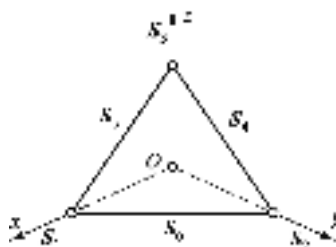


图 3.12 正则旋量

3.9 李代数及其表示

3.9.1 李代数的概念

李代数是研究李群、微分流形和微小变换等几何体的代数工具. 瞬时旋量是李群 $SE(3)$ 的射影李代数的元素. 在 20 世纪 40 年代德国数学家与理论物理学家 Hermann Weyl (1944) 引进术语“李代数”之前, 李代数一直被称作“无穷小群”, 即群元素非常接近恒等, 为李群流形在单位元处的切空间.

定义 3.14 李代数是域 \mathcal{F} 上具有二元运算的有限维向量空间 \mathbb{R}^n , 该二元运算为 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 也称李括号, 且满足下述性质:

(1) 运算双线性: $[a_1 \mathbf{X}_1 + a_2 \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}] = a_1 [\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}] + a_2 [\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}]$, $[\mathbf{X}, a_1 \mathbf{Y}_1 + a_2 \mathbf{Y}_2] = a_1 [\mathbf{X}, \mathbf{Y}_1] + a_2 [\mathbf{X}, \mathbf{Y}_2]$, 其中标量 $a_1, a_2 \in \mathcal{F}$, 向量 $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$.

(2) 反对称性: 对向量空间 \mathbb{R}^n 的任意元素 \mathbf{X} , 有 $[\mathbf{X}, \mathbf{X}] = \mathbf{0}$, 由此, 对任意元素 \mathbf{X}, \mathbf{Y} , 有 $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}]$.

(3) Jacobi 恒等式成立: 对空间 \mathbb{R}^n 的任意元素 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$, 等式 $[\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] + [\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] + [\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]] = \mathbf{0}$ 成立.

注释 3.7 李代数是研究李群以及微分流形几何体的一种代数结构. 李代数不仅是群论问题线性化的工具, 而且是有限群理论以及线性代数中许多重要问题的来源.

注释 3.8 任何具有恒等零的李括号运算的向量空间均为李代数. 最常见的例子为三维欧氏空间, 具有向量叉积赋予的李括号运算的三维欧氏空间 \mathbb{R}^3 是三维李代数.

注释 3.9 李代数研究无穷小位移与无穷小变换, 并将刚体速度表示为 $SE(3)$ 在单位元处的切空间. 李代数也是向量场, 如 $SE(3)$ 的李代数 $se(3)$, 即为六维实向量空间 \mathbb{R}^6 .

定义 3.15 李括号是双线性微分算子, 表征赋予光滑流形 μ 上任意两向量生成第三个向量的运算, 也称 Jacobi-Lie 括号或向量空间的交换子². 李括号为李代数乘法运算或李积, 有双线性、反交换律与 Jacobi 恒等式等特性. 反交换律即为定义 3.14 中的反对称性.

3.9.2 李代数伴随算子 $\text{ad}(\mathbf{X})$ 与伴随作用

定义 3.16 李代数的表示是李代数的同态映射, 为

$$\varphi: \mathbf{X} \rightarrow gl(\mathbf{V})$$

定义 3.17 李代数伴随算子为 $\text{ad}(\mathbf{X})$, 是向量空间李运算的伴随表示.

定义 3.18 李代数的伴随表示为李代数向量空间元素向一般线性李代数的同态映射, 记为

$$\varphi: \mathbf{X} \rightarrow gl(\mathbf{X}), \varphi(\mathbf{X}) = \text{ad}(\mathbf{X})$$

在本书中, 这种映射将李代数向量空间 $so(3)$ 和 $se(3)$ 元素 \mathbf{s} 与 \mathbf{S} 分别映射为上述的伴随表示.

定理 3.4 无论 \mathbf{X} 为李代数的向量形式元素还是矩阵表示元素, $\text{ad}(\mathbf{X})$ 都是作用于向量空间的一个矩阵.

²也有“换位子”的称法, 但意义相同. 本书采用“交换子”.

当伴随表示元素 S 为李代数的向量形式元素, U 为李代数的矩阵表示元素, 有下式:

$$\text{ad}(S) = U \quad (3.97)$$

当伴随表示元素为李代数的矩阵表示元素时, 有如下定义:

定义 3.19 李代数对李代数的伴随作用是自同态映射, 为

$$\text{ad}(\mathbf{X}_1) : g \rightarrow g$$

由此

$$\text{ad}(\mathbf{X}_1)\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] \quad (3.98)$$

定理 3.5 李代数伴随作用对李代数向量形式元素的作用为左作用, 对李代数矩阵向量空间元素的作用为**李括号**, 统称李运算.

李运算与李括号将在下一节详细阐述.

3.9.3 李代数的向量形式

李代数元素有向量形式和矩阵表示两种代数描述方式. 对于向量形式的李代数 $se(3)$, 又有三种表示形式. 第一, 经常习惯表示为 n 维向量, 如特殊正交群的李代数 $so(3)$ 可表示为如式 (3.2) 中的姿态向量 \mathbf{s} 所示的三维向量形式, 特殊欧式群的李代数 $se(3)$ 可表示为式 (3.44) 所示的速度旋量的六维向量形式 \mathbf{S} . 第二, 可表示为式 (3.29) 所示的对偶向量形式. 第三, 可表示为如式 (4.67) 所示的纯四元数, 即向量四元数, 如特殊正交群的李代数 $so(3)$, 可用纯四元数表示.

3.9.4 李代数的表示

定理 3.6 Ado 定理 (Ado, 1947) 每个有限维李代数都可以由满足李括号的 $n \times n$ 可逆矩阵表示.

若采用矩阵表示, 则李代数元素构成矩阵向量空间, $so(n)$ 的空间元素是迹为零的反对称矩阵, $se(n)$ 和 $sl(n)$ 的空间元素是迹为零的矩阵.

1. $so(3)$ 的 3×3 伴随表示

对于李代数 $so(3)$, 其矩阵伴随表示为下列反对称矩阵形式:

$$\text{ad}(\mathbf{s}) = \mathbf{A}_s = [\mathbf{s} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

李代数 $so(3)$ 由 3×3 反对称矩阵组成, 其三维矩阵向量空间的基为

$$\begin{aligned} \text{ad}(\mathbf{s}_x) = [\mathbf{s}_x \times] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & \text{ad}(\mathbf{s}_y) = [\mathbf{s}_y \times] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \text{ad}(\mathbf{s}_z) = [\mathbf{s}_z \times] &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.100)$$

李代数 $so(3)$ 的任意元素均可以由这组基的线性组合表示.

2. $se(3)$ 的标准 4×4 表示

李代数 $se(3)$ 有两种矩阵表示形式, 其中, 标准 4×4 矩阵表示为

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} [\mathbf{s} \times] & \mathbf{s}_0 \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

式中, $[\mathbf{s} \times] = \mathbf{A}_s \in so(3)$, $\mathbf{s}_0 \in \mathbb{R}^3$. 因此, 李代数元素构成的空间可以表示为 $se(3) \subset \mathbb{R}^{4 \times 4}$. 该六维向量空间的生成元为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{E}_y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{E}_z &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{E}_{x0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{E}_{y0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{E}_{z0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.102)$$

李代数 $se(3)$ 的任意元素可以由上述生成元的线性组合表示. 同时可见, 李代数 $so(3) \cong \mathbb{R}^3$ 是 $se(3) \cong \mathbb{R}^6$ 的子空间.

3. $se(3)$ 的 6×6 伴随表示

借助于李代数六维向量形式的伴随算子, 李代数的元素又可写为 6×6 矩阵形式, 即

$$U = \text{ad}(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} [\mathbf{s} \times] & \mathbf{0} \\ [\mathbf{s}_0 \times] & [\mathbf{s} \times] \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

式中, 算子 $\text{ad}(\mathbf{S}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ 是与李代数维数相同且与 $se(3)$ 标准 4×4 矩阵表示同构的矩阵. 这六个基的伴随表示可写为

$$\begin{aligned} \text{ad}(\mathbf{S}_x) &= \begin{bmatrix} [\mathbf{s}_x \times] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{s}_x \times] \end{bmatrix}, & \text{ad}(\mathbf{S}_y) &= \begin{bmatrix} [\mathbf{s}_y \times] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{s}_y \times] \end{bmatrix} \\ \text{ad}(\mathbf{S}_z) &= \begin{bmatrix} [\mathbf{s}_z \times] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{s}_z \times] \end{bmatrix}, & \text{ad}(\mathbf{S}_{x0}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ [\mathbf{s}_x \times] & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \text{ad}(\mathbf{S}_{y0}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ [\mathbf{s}_y \times] & \mathbf{0} \end{bmatrix}, & \text{ad}(\mathbf{S}_{z0}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ [\mathbf{s}_z \times] & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.104)$$

由此, 李代数 $se(3)$ 的任意元素均可由上述六个基组合而成.

3.10 李运算与李括号及其等价原理

若李代数以 3.9.3 节的向量形式表示, 李运算同于 3.2 节与 3.3 节的旋量运算.

定义 3.20 李运算为向量空间的二元运算, 可以归纳为两类运算, 即叉积与双线性型运算, 叉积由李括号表示, 而双线性型运算含 Klein 型与 Killing 型运算以及正常内积.

注释 3.10 对于以矩阵形式表示的李代数, 叉积由李括号表示, 而 Klein 型与 Killing 型运算可见 3.2.1 节与 3.2.4 节.

定义 3.21 李括号运算可表示为

$$[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2 \mathbf{X}_1 \quad (3.105)$$

对于 $se(3)$, 李括号既可以由 4×4 标准矩阵 \mathbf{E} 表示, 又可以采用 6×6 伴随表示 U .

注释 3.11 由 $\text{tr}[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \text{tr}(\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2) - \text{tr}(\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_1) = 0$ 可知, 李括号是特殊线性群的李代数元素, 即 $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] \in sl(n)$

3.10.1 标准 4×4 矩阵表示的李括号

3.9.4 节内容给出了李代数的标准 4×4 矩阵表示形式. 在式 (3.101) 中, 采用 4×4 矩阵表示, \mathbf{E}_1 和 \mathbf{E}_2 可写为式 (3.101) 的形式

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} [\mathbf{s}_1 \times] & \mathbf{s}_{10} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \text{ 和 } \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} [\mathbf{s}_2 \times] & \mathbf{s}_{20} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

由此可推导出标准 4×4 矩阵形式的李括号为

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2] &= \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \\ &= \begin{bmatrix} [\mathbf{s}_1 \times] & \mathbf{s}_{10} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{s}_2 \times] & \mathbf{s}_{20} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [\mathbf{s}_2 \times] & \mathbf{s}_{20} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{s}_1 \times] & \mathbf{s}_{10} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\mathbf{s}_1 \times][\mathbf{s}_2 \times] & [\mathbf{s}_1 \times]\mathbf{s}_{20} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [\mathbf{s}_2 \times][\mathbf{s}_1 \times] & [\mathbf{s}_2 \times]\mathbf{s}_{10} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\mathbf{s}_1 \times][\mathbf{s}_2 \times] - [\mathbf{s}_2 \times][\mathbf{s}_1 \times] & [\mathbf{s}_1 \times]\mathbf{s}_{20} + [\mathbf{s}_{10} \times]\mathbf{s}_2 \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.107)$$

3.10.2 交换子与 Jacobi 恒等式

根据附录 A, 有

$$\mathbf{A}_{s_1} \mathbf{A}_{s_2} - \mathbf{A}_{s_2} \mathbf{A}_{s_1} = [\mathbf{s}_1 \times][\mathbf{s}_2 \times] - [\mathbf{s}_2 \times][\mathbf{s}_1 \times] = [[\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2] \times] \quad (3.108)$$

因此, 式 (3.107) 所示的李括号可表示为

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2] &= \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \\ &= \begin{bmatrix} [[\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2] \times] & [\mathbf{s}_1 \times]\mathbf{s}_{20} + [\mathbf{s}_{10} \times]\mathbf{s}_2 \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.109)$$

上式是式 (3.16) 与式 (3.34) 的 4×4 标准矩阵表示. 可以得出, 李括号表示两个对象间的运算, 即李代数元素的叉积或 3.2.2 节与 3.3.2 节给出的旋量叉积.

注释 3.12 李括号又称矩阵交换子, 是线性算子, 可以生成另一个李代数元素.

注释 3.13 李括号运算具有下列的反对称特性, 即反交换律:

$$[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = -[\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1] \quad (3.110)$$

此外, 李括号运算不具有结合律, 但满足 Jacobi 恒等式, 为

$$[\mathbf{X}_1, [\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3]] + [\mathbf{X}_2, [\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_1]] + [\mathbf{X}_3, [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]] = \mathbf{0} \quad (3.111)$$

同时李括号是双线性算子, 有以下表示方式:

$$\begin{aligned} & [(\alpha\mathbf{X}_1 + \beta\mathbf{X}_2), (\gamma\mathbf{X}_{1'} + \delta\mathbf{X}_{2'})] \\ &= \alpha\gamma[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_{1'}] + \alpha\delta[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_{2'}] + \beta\gamma[\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_{1'}] + \beta\delta[\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_{2'}] \end{aligned} \quad (3.112)$$

上述公式中的 \mathbf{X} 为李代数矩阵空间元素.

值得注意的是, 两李代数元素的矩阵相乘, 一般情况下不能得到另一个李代数元素. 任意满足式 (3.110) 的交换子及式 (3.111) 所示的 Jacobi 恒等式的代数均为李代数.

注释 3.14 当 \mathbb{R}^3 空间中的叉积以及 \mathbb{R}^3 中的元素满足 Jacobi 恒等式时, 向量代数即演变为李代数.

3.10.3 6×6 伴随表示的李括号及其等价定理

定理 3.7 6×6 伴随表示的李括号等价于李代数对六维向量形式元素的伴随作用.

证明 采用 6×6 伴随表示, 李括号可表示为

$$\begin{aligned} \text{ad}(\text{ad}(\mathbf{S}_1))\text{ad}(\mathbf{S}_2) &= \text{ad}(\mathbf{U}_1)(\mathbf{U}_2) = [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2] = \begin{bmatrix} [\mathbf{s}_1 \times] & \mathbf{0} \\ [\mathbf{s}_{10} \times] & [\mathbf{s}_1 \times] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{s}_2 \times] & \mathbf{0} \\ [\mathbf{s}_{20} \times] & [\mathbf{s}_2 \times] \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} [\mathbf{s}_2 \times] & \mathbf{0} \\ [\mathbf{s}_{20} \times] & [\mathbf{s}_2 \times] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{s}_1 \times] & \mathbf{0} \\ [\mathbf{s}_{10} \times] & [\mathbf{s}_1 \times] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.113)$$

上式可进一步变换为

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{s}_1 \times][\mathbf{s}_2 \times] - [\mathbf{s}_2 \times][\mathbf{s}_1 \times] & \mathbf{0} \\ [\mathbf{s}_{10} \times][\mathbf{s}_2 \times] - [\mathbf{s}_2 \times][\mathbf{s}_{10} \times] + [\mathbf{s}_1 \times][\mathbf{s}_{20} \times] - [\mathbf{s}_{20} \times][\mathbf{s}_1 \times] & [\mathbf{s}_1 \times][\mathbf{s}_2 \times] - [\mathbf{s}_2 \times][\mathbf{s}_1 \times] \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

由附录 A, 上式可化简为

$$\begin{bmatrix} [[\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2] \times] & \mathbf{0} \\ [[\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_{20}] \times] + [[\mathbf{s}_{10} \times \mathbf{s}_2] \times] & [[\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2] \times] \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

此结果与式 (3.109) 所示的李括号标准 4×4 矩阵表示结果等价. 进而, 采用李代数伴随表示 $\text{ad}(\mathbf{S}_1)$ 对李代数向量形式 \mathbf{S}_2 作伴随作用, 得

$$\begin{aligned} \text{ad}(\mathbf{S}_1)\mathbf{S}_2 &= \begin{bmatrix} [\mathbf{s}_1 \times] & \mathbf{0} \\ [\mathbf{s}_{10} \times] & [\mathbf{s}_1 \times] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{s}_1 \times] \mathbf{s}_2 \\ [\mathbf{s}_{10} \times] \mathbf{s}_2 + [\mathbf{s}_1 \times] \mathbf{s}_{20} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_{20} + \mathbf{s}_{10} \times \mathbf{s}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.116)$$

由此可见, 李括号等价于李代数对其向量形式元素的伴随作用. 证毕.

推论 3.4 标准 4×4 矩阵表示的李括号与 6×6 伴随表示的李括号等价.

推论 3.5 李代数对 3×3 矩阵向量空间元素的李括号等价于李代数对三维向量形式元素的伴随作用.

证明可见附录的定理 A1.

推论 3.6 对于特殊欧氏群的李代数 $se(3)$ 的 4×4 矩阵表示的李括号、 6×6 伴随表示的李括号以及李代数对向量形式元素的伴随表示的左作用, 三者等价.

证明可以由式 (3.109)、式 (3.115) 及式 (3.116) 完成.

参考文献

- Ado, D. (1947) The representation of Lie algebras by matrices, *Uspekhi Mat. Nauk*, **6**(22): 159-173.
- Baker, A. (2002) *Matrix Groups: An Introduction to Lie Group Theory*, Springer, London.
- Ball, R.S. (1871) The theory of screws, a geometrical study of the kinematics, equilibrium, and small oscillations of a rigid body, *Transactions of the Royal Irish Academy*, **25**: 137-217.
- Brand, L. (1947) *Vector and Tensor Analysis*, Wiley, New York.
- Chirikjian, G.S. (2011) *Stochastic Models, Information Theory, and Lie Groups, Volume 2: Analytic Methods and Modern Applications*, Birkhäuser, Boston.

- Clifford, W.K. (1873) Preliminary sketch of bi-quaternions, *Proc. London Math Society*, **4**(64/65): 381-395.
- Clifford W.K. (1882) *Mathematical Papers*, Macmillan & Co., London.
- Dai, J.S. (1993) Chapter 3: New look at properties of screws and screw systems, *Screw Image Space and Its Application to Robotic Grasping*, PhD Dissertation, University of Salford, Manchester.
- Dai, J.S. (2006) A historical review of the theoretical development of rigid body displacements from Rodrigues parameters to the finite twist, *Mech. Mach. Theory*, **41**(1): 41-52.
- Dai, J.S. (2012) Finite displacement screw operators with embedded Chasles' motion, *ASME J. Mech. Rob.*, **4**(4): 041002.
- Dai, J.S. (2014) *Screw Algebra and Kinematic Approaches for Mechanisms and Robotics*, Springer, London.
- Gibbs J.W. (1901) *Vector Analysis: A Text-book for the use of Students of Mathematics and Physics, Founded upon the Lectures of J. Willard Gibbs*, Yale University Press.
- Hunt, K.H. (1978) *Kinematic Geometry of Mechanisms*, Oxford University Press, London.
- Karger, A. and Novak, J. (1985) *Space Kinematics and Lie Groups* (translated by M. Basch), Gordon and Breach, New York.
- Li, H. (2000) The Lie model for Euclidean geometry, in: *Algebraic Frames for the Perception-action Cycle*, G. Sommer and Y. Zeevi (eds.), Springer, Berlin: 115-133.
- Mises, R.V. (1924) Motorrechnung: Ein neues hilfsmittel in der mechanik, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **4**(2): 155-181. Translated by Baker, E.J. and Wolhart, K., *Motor Calculus: A New Theoretical Device for Mechanics*, (Graz, Austria: Institute for Mechanics, University of Technology, 1996).
- Murray, R.M., Li, Z. and Sastry, S.S. (1994) *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press, New York.
- Mozi, G. (1763) *Discorso Matematico Sopra Il Rotamento Momentaneo Dei Corpi*, Stamperia di Donato Campo, Napoli.
- Poinsot, L. (1806) Sur la composition des moments et la composition des aires, *Paris Journal de l'Ecole Polytechnique*, **6**(13): 182-205.
- Selig, J.M. (2005) *Geometric Fundamentals of Robotics*, Spriger, New York.
- Smith, G. (1998) *Introductory Mathematics: Algebra and Analysis*, Springer, London.
- Study, E. (1903) Die Geometrie der Dynamen, *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, Leipzig, **35**: 470-483.
- Weyl, H. (1934) Harmonics of homogeneous manifolds, *Math. Ann.*, **35**(3): 486-499.
- Weyl, H. (1944) David Hilbert. 1862—1943, *Obituary Notices of Fellows of the Royal Society*, **4**(13): 547-553.
- 万哲先 (2013) 李代数, 2 版, 高等教育出版社, 北京.

第四章 位移算子与指数映射

正如 Ball 所述, 关于刚体运动的 Chasles 定理是旋量理论的两大基本定理之一. 在 Ball 推导瞬时旋量及其速度旋量时, 他的带有旋距参量的位移旋量 (Ball, 1876) 的物理意义为, 刚体绕轴线做旋转运动得到弧度制角位移的同时, 又沿旋量轴线方向作直线平移. 几乎在同一时期, Clifford 发现了可作为描述刚体一般螺旋运动的李群算子的对偶四元数. 位移旋量是旋量代数的一个核心内容.

一般螺旋位移最初由 Dimentberg (1950) 进行研究, 随后由 Yang (1964)、Roth (1967)、Tsai 与 Roth (1973) 进行了研究, 由 Bottema 和 Roth (1979) 做了详细的论证. 有限位移旋量由 Dimentberg 提出, 而后 Yang 和 Freudenstein (1964)、Hunt (1978) 也提出了这一概念. 在 20 世纪 90 年代, Parkin (1990)、Hunt 和 Parkin (1995)、Dai, Holland 与 Kerr (1995)、Huang (1995, 1997) 对其表示法做了全面的研究. 有限位移旋量理论的提出是旋量理论由瞬时到非瞬时的飞跃, 进而与对偶四元数、李群相联系.

本章首先阐述了位移算子与坐标变换的区别, 进而引入了有限位移旋量算子, 由此引出了多个经典算子, 包括 Rodrigues 向量、Cayley 方程、四元数与对偶四元数, 揭示了这些经典算子的几何意义与物理意义及其同李群、李代数之间的内在关联关系.

4.1 坐标变换

4.1.1 旋转变换

将向量从某一坐标系变换至另一坐标系,称为刚体**坐标变换**.刚体坐标变换包括旋转、平移和镜像.本书主要研究常规的刚体变换,对镜像变换不作研究.常规的刚体变换可由点 P 分别在局部坐标系与全局坐标系下的两组坐标给定,如图 4.1 所示.

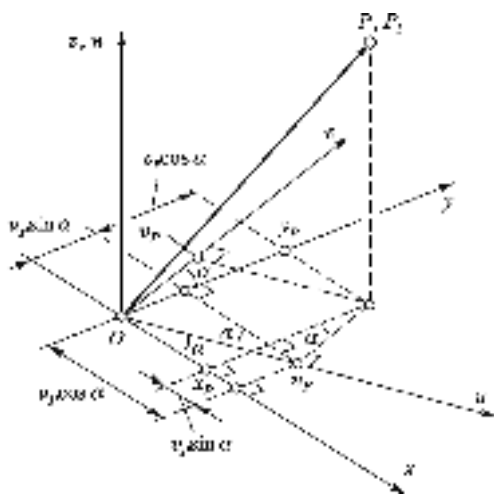


图 4.1 纯旋转运动引起的坐标变换

点 P_l 在局部坐标系 $\{uvw\}$ 中的坐标为 $\mathbf{p}_l = (u, v, w)^T$, 可变换至全局坐标系 $\{xyz\}$ 中的 P 点, 得到坐标 $\mathbf{p} = (x, y, z)^T$. 变换过程可描述为

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \mathbf{R}\mathbf{p}_l = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

上式给出了关于 z 轴的旋转矩阵 \mathbf{R} , 该矩阵描述了局部坐标系相对全局坐标系的变换. 该矩阵的逆则表示从全局坐标系到局部坐标系的变换, 为

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

式中, \mathbf{R} 为正交矩阵, 满足

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I} \quad (4.3)$$

上式对 t 求微分得

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T = \mathbf{0} \quad (4.4)$$

亦可写为

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T = -\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T = (\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T)^T$$

可见, $\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T$ 与 $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ 是反对称矩阵, 得

$$[\boldsymbol{\omega} \times] + [\boldsymbol{\omega} \times]^T = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

式中, $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{s}$, \mathbf{s} 为旋转轴, 表述为旋量轴, 见第三章; θ 为绕旋转轴的角度.

定义 4.1 满足式子 $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ 的方阵为反对称矩阵, 也称斜对称矩阵.

反对称矩阵有许多特性. 本书以及附录给出了许多其他的特性.

由式 (4.5), 可得

$$[\mathbf{s} \times] + [\mathbf{s} \times]^T = \mathbf{0}$$

式中, \mathbf{s} 为式 (3.2) 中给出的旋转运动轴线, 上式采用了其反对称矩阵表达式, 即

$$\mathbf{A}_s = [\mathbf{s} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -n & m \\ n & 0 & -l \\ -m & l & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

如式 (3.99), \mathbf{A}_s 是反对称矩阵表示的李代数 $so(3)$ 元素, 为 $\mathbf{A}_s \in so(3)$.

4.1.2 齐次变换

式 (4.1) 表示的旋转矩阵可扩展为齐次坐标形式, 即

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

如 2.3 节所述, 空间点可以描述为四维向量如 $(x, y, z, d)^T$, 其中 d 是比例因子, 可以简化为 1 以表示射影空间的单位比例因子.

注释 4.1 齐次空间是容许李群作光滑传递作用的流形.

因而式 (4.1) 的旋转变换可以与平移变换结合为如下描述一般变换的齐次变换矩阵, 也称仿射变换矩阵:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & d_x \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其分块矩阵形式为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

式中, 两个坐标系原点间的距离可由 $\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_z)^T$ 得到, 零向量 $\mathbf{0}$ 为三维列向量. 齐次变换矩阵的逆矩阵为

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

在图形学中, 用大于 1 的常量替换矩阵元素 1 使图形缩小, 用小于 1 的常量代替矩阵元素 1 则使图形放大. 更进一步, 仿射变换矩阵最后一行的零向量也有特定含义, 当以其他不同的行向量作代换时, 可表示透视变换. 由于刚体运动不涉及以上两种情形, 本书对此不作过多讨论.

图 4.2 给出了两坐标系的相对位置与姿态.

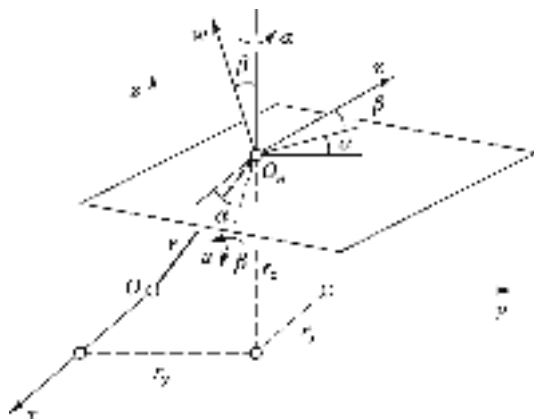


图 4.2 两坐标系的位置与姿态

由此, 仿射变换矩阵的一般形式可写为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}_n & \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}_n & \mathbf{i} \cdot \mathbf{k}_n & \mathbf{r} \cdot \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}_n & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}_n & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}_n & \mathbf{r} \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{i}_n & \mathbf{k} \cdot \mathbf{j}_n & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_n & \mathbf{r} \cdot \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x, u) & \cos(x, v) & \cos(x, w) & r_x \\ \cos(y, u) & \cos(y, v) & \cos(y, w) & r_y \\ \cos(z, u) & \cos(z, v) & \cos(z, w) & r_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

仿射变换矩阵的物理意义与几何意义明确. 左上方 3×3 子矩阵为旋转矩阵, 其每一列分别为局部坐标系 $\{uvw\}$ 的单位坐标向量在全局坐标系 $\{xyz\}$ 下的坐标, 同时, 每一行是全局坐标系的单位坐标向量在局部坐标系下的坐标. 仿射变换矩阵的最后一列给出了局部坐标系原点的位置向量在全局坐标系各坐标轴上的投影. 其中, 旋转矩阵可视为由三个正交列向量或正交行向量分别构成的两种形式, 为

$$\mathbf{R} = [\mathbf{u} \ \mathbf{v} \ \mathbf{w}] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T \\ \mathbf{y}^T \\ \mathbf{z}^T \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

4.2 位移算子与坐标变换

4.2.1 位移算子

位移算子是作用在向量空间上且保持其欧几里得度量的李群元素. 每一个算子表示一个连续流形. 流形中的曲线定义运动, 位移可视为旋转和平移仿射映射的结果. 如用方程描述, 则为

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}\mathbf{p} + \mathbf{d} \quad (4.11)$$

式中, \mathbf{R} 和 \mathbf{d} 为位移算子, 其将位置向量 \mathbf{p} 移到位置向量 \mathbf{p}' . 两个向量均以全局坐标系度量, 如图 4.3 所示, 即

$$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$$

和

$$\mathbf{p}' = (p'_x, p'_y, p'_z)^T$$

式 (4.11) 给出了仿射变换. 将位置向量坐标写为齐次坐标形式, 并引用式 (4.7) 给出的仿射变换矩阵 \mathbf{H} , 式 (4.11) 写成 4×4 齐次坐标形式为

$$\mathbf{P}' = \mathbf{H}\mathbf{P} \quad (4.12)$$

式中, \mathbf{P} 和 \mathbf{P}' 为齐次坐标, 即

$$\mathbf{P} = (p_x, p_y, p_z, 1)^T$$

和

$$\mathbf{P}' = (p'_x, p'_y, p'_z, 1)^T$$

式 (4.12) 中, 矩阵 \mathbf{H} 称为齐次位移算子. \mathbf{H} 是齐次形式的特殊欧氏群 $SE(3)$ (也称刚体位移群) 的元素, 其能实现 $SE(3)$ 对向量空间的左作用. 其中, $SE(3)$ 为包含 $\mathbf{R} \in SO(3)$ 和 $d \in \mathbb{R}^3$ 的六维李群. 其位移见图 4.3.

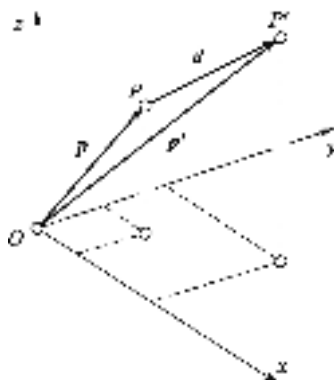


图 4.3 位移与位移算子

4.2.2 坐标变换与位移算子的关系

在 4.2.1 节中, 点 \mathbf{P} 和 \mathbf{P}' 均在全局坐标系下度量, 旋转矩阵 \mathbf{R} 和平移向量 \mathbf{d} 均为算子. 本节讨论坐标变换, 如图 4.4 所示, 建立局部坐标系 $\{uvw\}$, 点 \mathbf{P} 在局部坐标系下的坐标记为 \mathbf{p}_l , 由此可得点 \mathbf{P} 在全局坐标系 $\{xyz\}$ 下的坐标为

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}\mathbf{p}_l + \mathbf{r} \quad (4.13)$$

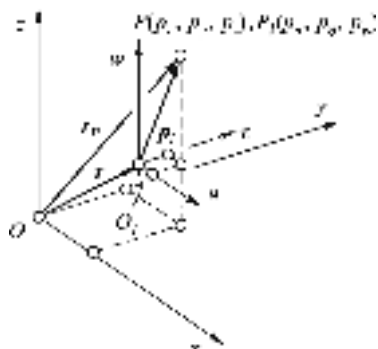


图 4.4 空间点分别在局部坐标系与全局坐标系下的描述

由此, 空间任意一点的位置均可同时用全局坐标系 $\{xyz\}$ 和局部坐标系 $\{uvw\}$ 描述. 如果已知其中一个坐标, 根据该式可求得另一坐标.

如图 4.4 所示, 尽管变换了参考坐标系, 点的空间位置仍然保持不变. 坐标系的变换一般用旋转矩阵 R 和平移向量 r 表示. 对比图 4.3 和图 4.4 不难发现, 图 4.3 中点 P 到点 P' 的平移向量 d 与图 4.4 描述局部坐标系和全局坐标系间的坐标变换的平移向量 r 是相等的. 图 4.5 展示出平移向量 d 等效于坐标变换向量 r . 坐标变换与位移算子的根本不同在于, 对坐标变换而言, 式 (4.13) 中的向量采用不同的参考坐标系进行度量; 而对位移算子而言,

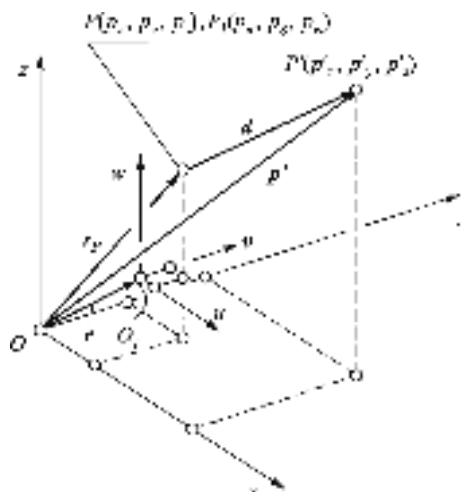


图 4.5 坐标变换与位移的概念的对比

式 (4.11) 所示的所有向量是在同一参考坐标系下度量. 后者可用来描述位移, 这些是研究运动位移物理意义与数学内涵的基础.

图 4.5 与本节的讨论表明, 坐标变换仅是坐标系的变化, 如同在计算机辅助设计系统 (McMahon 和 Browne, 1998) 中观测点的变换. 众所周知, 观测点的变化对物体或几何体的空间位姿不造成影响. 位移算子则不然, 它能使物体或几何体产生位置和姿态的变化. 这如同在计算机辅助设计系统中对几何体作了修改. 因此, 尽管合理地构建局部坐标系有助于分析, 但在应用位移算子之前, 必须将物体的坐标变换为全局坐标系下的坐标.

4.3 一般运动的仿射变换及其空间结构与群表示

位移算子是包含旋转和平移的仿射变换.

定义 4.2 仿射变换或仿射映射是包含线性变换 (矩阵乘) 与平移变换 (向量加) 的变换, 其变换不保留线性空间的原点, 但保持直线或距离比值.

仿射变换从属于一个线性投影变换, 使无穷远平面保持不变.

注释 4.2 在本书中, 仅限于同一维数的仿射空间的仿射映射.

注释 4.3 仿射特性是仿射变换保持的几何特性, 若仿射变换为 $A: V \rightarrow W$, 其中 V, W 为仿射空间, 则有

(1) 共线性: 给定仿射子空间 $S + v \subset V$, 则 $A(S + v) \subset W$.

(2) 平行性: 假定仿射子空间 $S + a$ 与 $S + b$ 平行, 则 $A(S + a)$ 与 $A(S + b)$ 平行.

(3) 比例特性: 对于仿射空间 V 中共线的三点 P_1, P_2, P_3 ; 线段 P_1P_2 与 P_2P_3 的比值同 $A(P_1)A(P_2)$ 与 $A(P_2)A(P_3)$ 的比值相等.

注释 4.4 齐次坐标的应用使刚体平移与旋转的仿射变换得以用矩阵乘积完成. 这种方法需要将所有位置向量在尾端扩展 “1”, 所有表示姿态的自由向量在尾端扩展 “0”. 这样所得的矩阵为齐次矩阵, 或仿射变换矩阵, 也称投影变换矩阵. 这种表示展示了作为 $GL(3)$ 与 $T(3)$ 采用半直乘组合得到的所有可逆仿射变换的集合. 这一集合是在组合规律下操作的群, 为仿射群.

注释 4.5 附加 “1” 在每一位置向量上, 附加 “0” 在每一自由向量上, 欧氏空间可被映射为高一维仿射空间的子空间. 原有空间的原点被映射成

为 $(0, 0, \dots, 1)$. 该高一维空间的坐标为齐次坐标, 其空间为**实射影空间**.

定义 4.3 仿射空间 (也称线性流形) 是概括欧氏空间的仿射性质的几何结构. 换言之, 仿射空间是向量空间**加群的主齐次空间**.

仿射空间可以表示为点集 A 及其映射

$$\ell: V \times A \rightarrow A, (v, a) \mapsto v + a$$

并有以下特性.

- (1) 左恒等: $\forall a \in A, 0 + a = a$.
- (2) 结合律: $\forall b, c \in V, \forall a \in A, b + (c + a) = (b + c) + a$.
- (3) 唯一性: $\forall a \in A, V \rightarrow A: v \mapsto v + a$ 是双射.

其中, 向量空间 V 是仿射空间 A 的基础, 也称**差异空间**.

注释 4.6 将欧氏空间 \mathbb{E} 中每一个向量附属一个仿射空间上的平移变换, 欧氏空间 \mathbb{E} 则被赋予从属于 \mathbb{E} 的仿射空间结构, 称为**经典结构**.

推论 4.1 从属于欧氏空间 \mathbb{E} 的仿射空间是一个度量空间.

如 2.3 节所述, 空间一点可表示为三维射影空间元素 $(x, y, z, w)^T$, 其中 w 为缩放比值, 常被视为单位 1, 代表射影空间的单位量.

定义 4.4 仿射变换矩阵构成仿射群¹, 为

$$Aff(n) = \left\{ \mathbf{H} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \middle| \mathbf{R} \in GL(n), \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \right\} \subseteq GL(n+1)$$

该定义给出了一般线性群 $GL(n+1)$ 的闭合子群.

定义 4.5 仿射群可以表示为一般线性群 $GL(n)$ 与平移群 $T(n)$ 的**半直积**, 即

$$Aff(n) = GL(n) \ltimes T(n)$$

定义 4.6 在抽象代数中, 半直积是一种由至少一个为正规子群的两个子群构造另一个群的特殊方法.

给定两个子群, 其中一个为**正规子群**, 通过上述半直积可以组成群. 平移群 $T(3)$ 与它自身构成的空间同构. 平移也是仿射变换, 并保留直线及长度度量的比值.

¹在仿射群 $Aff(n)$ 中, 矩阵 \mathbf{R} 可表示任意 $n \times n$ 可逆矩阵.

定义 4.7 一般线性群 $GL(n)$ 是具有常规矩阵运算的 $n \times n$ 可逆矩阵的集合. 其中, 行列式为 1 的矩阵组成的集合为特殊线性群 $SL(n)$.

定义 4.8 特殊仿射群²是仿射群的子群, 为

$$SA(n) = \left\{ \mathbf{H} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \middle| \mathbf{R} \in SL(n), \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

定义 4.9 平移群 $T(n)$ 是所有平移的集合, 与自身空间同构, 并为特殊欧氏群 $SE(n)$ 的正规子群. $T(n)$ 对 $SE(n)$ 的商群与特殊正交群 $SO(n)$ 同构.

注释 4.7 平移是没有定点的仿射变换.

$T(3)$ 元素可用 \mathbb{R}^3 中的三维向量表示, 如式 (4.11) 中向量 \mathbf{d} 所示. 因此, $T(3)$ 的群流形为三维欧氏空间 \mathbb{R}^3 .

4.4 旋转算子、旋转群 $SO(3)$ 与指数映射

4.4.1 群公理与李群

公理 4.1 具有二元运算“ \circ ”的集合 G 构造群时, 需满足下列公理.

封闭性: 在二元运算作用下, 对于任意 $g_1, g_2 \in G$, 有 $g_1 \circ g_2 \in G$.

单位元: 对于任意 $g \in G$, 存在单位元 $e \in G$, 使得 $g \circ e = e \circ g = g$ 成立.

可逆性: 对于任意 $g \in G$, 存在逆元 $g^{-1} \in G$, 使得 $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ 成立.

结合律: 对任意 $g_1, g_2, g_3 \in G$, 均有 $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ 成立.

其中, “ \circ ”为二元运算, 含加法与乘法运算, 也称群的运算. 在一般表述中, 符号“ \circ ”可以省略. 可以证明, $SO(3)$ 是满足矩阵乘法运算的群.

定义 4.10 李群是具有几何对称性的平滑群操作的光滑流形, 也称微分流形, 是有限维光滑流形构成的群, 其群运算乘法与求逆均满足作用在一对群元素上的光滑映射 $G \times G \rightarrow G$, 表示为 $(g_1, g_2 \in G) \mapsto g_1 g_2 \in G$ 和 $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$.

以上定义可由下列公理详尽地给出.

²在特殊仿射群 $SA(n)$ 中, 矩阵 \mathbf{R} 可表示任意 $n \times n$ 可逆矩阵, 且行列式为 1.

公理 4.2 李群满足下列光滑映射.

(1) 群运算 (组合) 的光滑映射: 对于 $g(x) \circ g(y) = g(z)$, 群运算 $z = \phi(x, y)$ 的映射是可微的.

(2) 对于 $g(x)^{-1} = g(y)$, 群的逆的映射 $y = \psi(x)$ 是可微的.

公理 4.1 阐述了李群的封闭性、单位元、可逆性及结合律, 公理 4.2 表明李群及其逆是可微分的光滑流形.

注释 4.8 李群也被认为是具有对称性的平滑变换的集合. 矩阵群给出了最通常的李群的实例. 李群是现代几何学的核心之一.

注释 4.9 李群可由下列方式进行构造:

(1) 两李群的积仍为李群.

(2) 李群的拓扑闭合子群仍为李群, 这称为 Cartan 定理.

(3) 李群采用闭合正则子群得到的商仍为李群.

注释 4.10 每一个李群都对应于一个李代数, 其向量空间是李群流形在单位元处的切空间, 并完全含有群的局部结构.

4.4.2 旋转群

旋转群 $SO(3)$ 是有限旋转的集合, 用于完成组合运算下绕经过三维欧氏空间 \mathbb{R}^3 原点的轴线的旋转, 也是 \mathbb{R}^3 的李群.

定义 4.11 旋转群 $SO(3)$ 也称特殊正交群, 是所有行列式为 1 的 3×3 正交矩阵的集合.

机构或机器人运动引起的姿态变化为向量空间上的曲线 $\mathbf{R}(t) \in SO(3)$, 其中 $t \in [0, T]$, 这给出了机构或机器人的位形空间. 如图 4.1 所示, 以空间任意方位且过原点的线矢量为旋转轴线, 可得正交矩阵

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

属于 $SO(3)$ 的旋转矩阵 \mathbf{R} 具有如下一些重要性质, 可以反映其角位移的本质属性, 为

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (4.15)$$

并且

$$\det \mathbf{R} = 1 \quad (4.16)$$

这给出了一般线性群 $GL(3)$ 上的三阶代数簇. 其子空间为微分流形, 李群流形为三维射影空间 \mathbb{P}^3 .

与矩阵 \mathbf{R} 的单位特征值对应的特征向量是与旋转轴线共线的向量, 且可以用来确定其唯一的单位向量. 从矩阵 \mathbf{R} 入手, 可得旋转角 θ 为

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{tr} \mathbf{R} - 1}{2} \quad (4.17)$$

式 (3.2) 中向量 \mathbf{s} 描述的旋转轴线可由下述反对称矩阵得出:

$$\begin{bmatrix} 0 & r_{12} - r_{21} & r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} & 0 & r_{23} - r_{32} \\ r_{31} - r_{13} & r_{32} - r_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

向量 \mathbf{u} 是非归一化的旋转轴, 可从上式得

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

向量 \mathbf{u} 对应于 5.4.1 节将要讨论的特征旋量, 其范数为

$$\|\mathbf{u}\| = 2 \sin \theta \quad (4.20)$$

由单位向量 \mathbf{s} 描述的轴线姿态为

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = (l, m, n)^T \quad (4.21)$$

4.4.3 Rodrigues 方程与 $so(3)$ 到 $SO(3)$ 的指数映射

与 4.4.2 节内容的推导过程相反, 根据 Rodrigues 方程 (Grattan-Guinness, 1997), 由旋转运动轴线 \mathbf{s} 及旋转角度 θ , 可推导出旋转矩阵 \mathbf{R} , 为

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin \theta \mathbf{A}_s + (1 - \cos \theta) \mathbf{A}_s \mathbf{A}_s \quad (4.22)$$

式中, \mathbf{I} 为 3×3 单位矩阵; \mathbf{A}_s 为向量 \mathbf{s} 的反对称矩阵表示, 具有用向量 \mathbf{s} 对其他向量作叉积运算的功能. \mathbf{A}_s 又可写为式 (4.6) 所示的 $[\mathbf{s} \times]$.

式 (4.6) 给出了基于向量 \mathbf{s} 的叉积线性算子, 即 $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{s} \times \mathbf{v}$, 但以矩阵形式表示. 由此向量叉积可写为

$$\mathbf{s} \times \mathbf{v} = [\mathbf{s} \times] \mathbf{v} \quad (4.23)$$

因反对称矩阵具有如下性质:

$$\mathbf{A}_s + \mathbf{A}_s^T = \mathbf{0} \quad (4.24)$$

由 Jacobi 定理 (Eves, 1980), 该矩阵的行列式满足下列等式:

$$\det \mathbf{A}_s = \det \mathbf{A}_s^T = \det(-\mathbf{A}_s) = -\det \mathbf{A}_s = 0 \quad (4.25)$$

式中, \mathbf{A}_s 以式 (4.6) 所示的 3×3 反对称矩阵形式给出了李群 $SO(3)$ 的李代数 $so(3)$.

因此, 式 (4.22) 给出了 $so(3)$ 到 $SO(3)$ 的指数映射, 为

$$\mathbf{R} = e^{\theta \mathbf{A}_s} = \mathbf{I} + \sin \theta \mathbf{A}_s + (1 - \cos \theta) \mathbf{A}_s \mathbf{A}_s \quad (4.26)$$

定义 4.12 指数映射是李代数 \mathbf{V} 到李群 G 的光滑映射, 表示为 $\exp : \mathbf{V} \rightarrow G$.

注释 4.11 如果 G 是矩阵李群, 其指数映射等同于矩阵指数, 由正常的序列展开, 见式 (4.28). 通常情况下, 反对称矩阵的指数映射可给出以正交矩阵形式表示的旋转矩阵, 其特征值为 1. 从反对称矩阵到旋转矩阵的指数映射为满射. 由此, 从旋转运动的“轴-角”表示法到旋转矩阵的指数映射可表示为

$$\exp : so(3) \rightarrow SO(3) \quad (4.27)$$

当给定单位长度的轴线 $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3$ 及旋转角度 $\theta \in \mathbb{R}$ 时, 式 (4.26) 可由 Taylor 展开推导并根据附录 B 定理 A.2 给出, 过程如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= e^{\theta \mathbf{A}_s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta \mathbf{A}_s)^k}{k!} = \mathbf{I} + \theta \mathbf{A}_s + \frac{1}{2}(\theta \mathbf{A}_s)^2 + \frac{1}{6}(\theta \mathbf{A}_s)^3 + \cdots \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{A}_s \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \right) + \mathbf{A}_s^2 \left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} - \cdots \right) \\ &= \mathbf{I} + \sin \theta \mathbf{A}_s + (1 - \cos \theta) \mathbf{A}_s \mathbf{A}_s \end{aligned} \quad (4.28)$$

若采用式 (4.21) 所示的单位向量, 并用旋转运动的非归一化轴线 \mathbf{u} 的分量取代反对称矩阵中 \mathbf{s} 的分量, 式 (4.26) 的指数映射可变换为

$$e^{\theta \mathbf{A}_u} = \mathbf{I} + \sin(\|\mathbf{u}\|\theta) \frac{\mathbf{A}_u}{\|\mathbf{u}\|} + (1 - \cos(\|\mathbf{u}\|\theta)) \frac{\mathbf{A}_u^2}{\|\mathbf{u}\|^2} \quad (4.29)$$

式中, \mathbf{A}_u 为轴线 \mathbf{u} 对应的反对称矩阵, 即

$$\mathbf{A}_u = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{u} \times] \quad (4.30)$$

由此, 式 (4.29) 定义了从非归一化李代数到李群的指数映射. 进一步推导, 由于

$$\mathbf{A}_s \mathbf{A}_s = \mathbf{s} \mathbf{s}^T - \mathbf{I} \quad (4.31)$$

并考虑反对称矩阵的性质, 式 (4.22) 可改写为

$$\mathbf{R} = \cos \theta \mathbf{I} + \sin \theta [\mathbf{s} \times] + (1 - \cos \theta) \mathbf{s} \mathbf{s}^T \quad (4.32)$$

这就给出了 Rodrigues 公式的另一种形式, 其详细讨论将在 4.5.3 节给出, 其证明将在后续讨论四元数的章节中完成. 至此, 本章完整地定义了变化范围为 $-\pi < \theta < \pi$ 和旋转运动轴线为 \mathbf{s} 的非单位矩阵旋转算子 \mathbf{R} .

旋转运动轴线向量 \mathbf{s} 的三个坐标分量与标量 θ 的有序组合可唯一确定地描述定轴旋转. 该有序组合不具备可交换性与可加性, 因此不可能通过传统的向量积运算获得其他具有明确几何意义或物理意义的量. 然而, 引入该姿态向量或有限旋转运动向量 $\theta \mathbf{s}$ 可以唯一确定相对于参考姿态的任意旋转运动的状态. 有限旋转运动向量的优点是三维非线性向量空间中的点在其空间中可以直接用来描绘旋转运动.

4.5 Rodrigues 参数、Rodrigues 方程与 Cayley 方程

4.5.1 平面运动的 Rodrigues 参数与 Rodrigues 方程

刚体旋转可用 Rodrigues 参数 (Rodrigues, 1840) 描述. Rodrigues 参数是赋予半角正切值的旋转轴线姿态的三个参量, 即

$$b_x = \tan \frac{\theta}{2} s_x, \quad b_y = \tan \frac{\theta}{2} s_y, \quad b_z = \tan \frac{\theta}{2} s_z \quad (4.33)$$

式中

$$\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)^T \quad (4.34)$$

即式 (3.2) 所示旋量的旋转运动轴线. 式 (4.33) 所示的参数为采用旋转角对应的半角的正切值表示的 Rodrigues 参数. Rodrigues 参数的提出, 意味着旋转角首次以半角形式出现在关于旋转运动的数学研究之中. 半角是旋转参数化的一个最基本特征, 也是运动学中的纯旋转最优雅的程度表示, 见图 4.6.

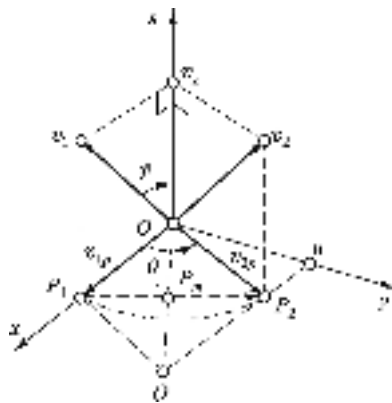


图 4.6 旋转运动中的向量菱形与半角

如图 4.6 所示, 向量 \mathbf{v}_1 相对于 z 轴共线的轴线 \mathbf{s} 做旋转运动得到向量 \mathbf{v}_2 ; 向量 \mathbf{v}_1 与其旋转得到的向量 \mathbf{v}_2 在 $x-y$ 平面上的投影分别为 \mathbf{v}_{1p} 和 \mathbf{v}_{2p} ; 这一旋转运动的旋转角为 θ . 在 $x-y$ 平面上, 作平行于向量 \mathbf{v}_{2p} 的直线 P_1Q 和平行于向量 \mathbf{v}_{1p} 的直线 P_2Q 组成了向量菱形. 作出对角线 P_1P_2 和 OQ , 其交点 P_m 为菱形的中心, 可以得到

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{P_1P_m}{OP_m} \quad (4.35)$$

用菱形对角线 $\mathbf{v}_{2p} - \mathbf{v}_{1p}$ 和 $\mathbf{v}_{2p} + \mathbf{v}_{1p}$ 取代上式的线段, 得

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\|\mathbf{v}_{2p} - \mathbf{v}_{1p}\|}{\|\mathbf{v}_{2p} + \mathbf{v}_{1p}\|} \quad (4.36)$$

采用图 4.6 给出的模长与姿态, 原点在位移中心的平面运动的 Rodrigues 公式 (Coe, 1934) 即可获得, 为

$$\mathbf{v}_{2p} - \mathbf{v}_{1p} = \mathbf{b} \times (\mathbf{v}_{2p} + \mathbf{v}_{1p}) = \tan \frac{\theta}{2} \mathbf{s} \times (\mathbf{v}_{2p} + \mathbf{v}_{1p}) \quad (4.37)$$

式中, \mathbf{b} 是由 (4.33) 所示的 Rodrigues 参数构成的 Rodrigues 向量. 如用原有向量 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 代替投影得到的向量 \mathbf{v}_{1p} 和 \mathbf{v}_{2p} , 上式仍成立, 即

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{b} \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1) \quad (4.38)$$

也可写为

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{B}(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1) \quad (4.39)$$

式中, \mathbf{B} 为向量 \mathbf{b} 的反对称矩阵表示, 采用式 (4.33) 中的元素, 表示为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -b_z & b_y \\ b_z & 0 & -b_x \\ -b_y & b_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

该反对称矩阵在采用式 (4.33) 中的 Rodrigues 向量构建旋转矩阵时有着至关重要的作用.

当坐标系原点位于旋量轴线其他位置时, 可以证明, 如将平面坐标系下的两个向量变换为球面坐标系下的向量, 式 (4.39) 中的 Rodrigues 方程同样成立. 当坐标系原点不在旋转运动轴线 \mathbf{s} 上时, 用 \mathbf{e} 表示原点相对于运动瞬心的位置向量, 下式可以由式 (4.37) 推出:

$$\mathbf{v}_{2p} - \mathbf{v}_{1p} = \mathbf{b} \times (\mathbf{v}_{2p} + \mathbf{v}_{1p} - 2\mathbf{e}) \quad (4.41)$$

4.5.2 一般运动的 Rodrigues 方程

对于一般空间运动, 将螺旋平移运动算子 σ 作用于向量 \mathbf{v}_{2p} , 则得到 $\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_{2p} - \sigma\mathbf{s}$. 由式 (4.41) 可得到能够产生综合旋转和平移的一般螺旋运动的 Rodrigues 方程 (Gibbs, 1901; Coe, 1934) 为

$$\mathbf{v}_{2p} - \mathbf{v}_{1p} = \mathbf{b} \times (\mathbf{v}_{2p} + \mathbf{v}_{1p} - 2\mathbf{e}) + \sigma\mathbf{s} \quad (4.42)$$

与式 (4.38) 类似, 用原有向量 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 代替投影得到的向量 \mathbf{v}_{1p} 和 \mathbf{v}_{2p} 后, 上式仍然成立, 即

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{b} \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{e}) + \sigma\mathbf{s} \quad (4.43)$$

Rodrigues 的工作首次将运动与产生运动的力系完全分开, 单独进行位移的研究. 上述的 Rodrigues 组合方程 (Rodrigues, 1840; Coe, 1934; Craig, 1989) 是由两个已知旋转轴线方向及旋转角的运动确定运动合成后的轴线方向以及旋转角的数学问题而提出的.

4.5.3 旋转运动的 Rodrigues 方程

由图 4.6 所示的几何关系, 旋转得到的向量 \boldsymbol{v}_2 为

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_{2p} + \boldsymbol{v}_z \quad (4.44)$$

此式给出了向量 \boldsymbol{v}_2 在 $x-y$ 平面的投影与在 z 轴投影的合向量. 由图 4.6 可知, \boldsymbol{v}_2 作为由 \boldsymbol{v}_1 旋转得到的向量, 满足下述式子:

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_{1p} \cos \theta + \boldsymbol{u} \sin \theta + \boldsymbol{v}_z \quad (4.45)$$

将式

$$\boldsymbol{v}_{1p} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_z = \boldsymbol{v}_1 - (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{v}_1) \boldsymbol{s} \quad (4.46)$$

及式

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{v}_1 \quad (4.47)$$

代入式 (4.45), 可推导出

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_2 &= (\boldsymbol{v}_1 - (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{v}_1) \boldsymbol{s}) \cos \theta + (\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{v}_1) \sin \theta + (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{v}_1) \boldsymbol{s} \\ &= \boldsymbol{v}_1 \cos \theta + (\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{v}_1) \sin \theta + (\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{v}_1) \boldsymbol{s} (1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (4.48)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{v}_1 \cos \theta + [\boldsymbol{s} \times] \boldsymbol{v}_1 \sin \theta + \boldsymbol{s} \boldsymbol{s}^T \boldsymbol{v}_1 (1 - \cos \theta) \\ &= (\cos \theta \boldsymbol{I} + [\boldsymbol{s} \times] \sin \theta + \boldsymbol{s} \boldsymbol{s}^T (1 - \cos \theta)) \boldsymbol{v}_1 \\ &= \boldsymbol{R} \boldsymbol{v}_1 \end{aligned} \quad (4.49)$$

式中, $\boldsymbol{s} \boldsymbol{s}^T$ 称为两向量的外积, 又称张量积. 由此可得旋转运动的 Rodrigues 方程 (Bisshopp, 1969) 为

$$\boldsymbol{R} = \cos \theta \boldsymbol{I} + \sin \theta [\boldsymbol{s} \times] + (1 - \cos \theta) \boldsymbol{s} \boldsymbol{s}^T \quad (4.50)$$

定义 4.13 外积又称两向量的张量积, 对比内积生成标量, 外积由一对向量生成矩阵. 外积也被认为是矩阵直积 (Kronecker 积) 的特例, 记为 $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$ 或 $\boldsymbol{u} \boldsymbol{v}^T$.

Rodrigues 旋转运动方程是完成已知轴线向量和旋转角的旋转的有效方法. 换句话说, 无须计算出全部矩阵指数, Rodrigues 方程就可以完成从三维旋转群的李代数 $so(3)$ 到旋转群 $SO(3)$ 的指数映射.

4.5.4 旋转运动的 Cayley 方程

如图 4.6 所示, 向量 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 在 $x-y$ 平面内的投影 \mathbf{v}_{1p} 和 \mathbf{v}_{2p} 构成了菱形 OP_1QP_2 , 其对角线 $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{v}_{2p} - \mathbf{v}_{1p}$ 与对角线 $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{v}_{2p} + \mathbf{v}_{1p}$ 正交, 则有

$$(\mathbf{v}_{2p} - \mathbf{v}_{1p})(\mathbf{v}_{2p} + \mathbf{v}_{1p}) = 0 \quad (4.51)$$

式中

$$\mathbf{v}_{2p} - \mathbf{v}_{1p} = (\mathbf{R} - \mathbf{I})\mathbf{v}_{1p} \quad (4.52)$$

和

$$\mathbf{v}_{2p} + \mathbf{v}_{1p} = (\mathbf{R} + \mathbf{I})\mathbf{v}_{1p} \quad (4.53)$$

将式 (4.53) 代入式 (4.52) 且不考虑特征值为 -1 的特殊情况, 可得

$$\mathbf{v}_{2p} - \mathbf{v}_{1p} = (\mathbf{R} - \mathbf{I})(\mathbf{R} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{v}_{2p} + \mathbf{v}_{1p}) = \mathbf{B}(\mathbf{v}_{2p} + \mathbf{v}_{1p}) \quad (4.54)$$

这就给出了矩阵 \mathbf{B} , 为

$$(\mathbf{R} - \mathbf{I})(\mathbf{R} + \mathbf{I})^{-1} = \mathbf{B} \quad (4.55)$$

由式 (4.51), 可以证明 \mathbf{B} 为式 (4.40) 所示的反对称矩阵 (Bottema 和 Roth, 1979), 则上式可变换为

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{R} = \mathbf{I} + \mathbf{B} \quad (4.56)$$

因此, 可得到 Cayley 方程为

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{B}) \quad (4.57)$$

考虑到矩阵 $\mathbf{I} + \mathbf{B}$ 和 $(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}$ 的可交换性, Cayley 方程的等价方程为

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I} + \mathbf{B})(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} \quad (4.58)$$

可以证明, 所有反对称矩阵均可根据 Cayley 方程定义一个正交矩阵. 因此, 当角度不等于 180° 时, 式 (4.14) 所示的一般运动的旋转矩阵可通过基于式 (4.33) 所示的 Rodrigues 参数的 Cayley 方程推导出.

4.6 研究旋转运动的四元数法及其与李群、李代数的关联

单位四元数是 Clifford 偶子代数子群的元素, 为描述几何体的位姿提供了有效和可靠的工具, 并已在计算机图形学与视觉技术、机器人学及导航技术等领域得到了成功的应用. 为了扩展实数、复数的概念及四元数到高维与超复数问题, Clifford (1876) 创建了 Clifford 代数. 它是特殊类型的结合代数, 是一个向量空间, 也是有效的计算工具. Hamilton 四元数与对偶四元数是 Clifford 代数空间的元素. 由于从计算误差中恢复数据显得简洁而有效, Clifford 代数的元素和四元数被广泛应用于计算机科学领域.

4.6.1 Hamilton 四元数与共轭四元数

定义 4.14 四元数是标量与向量的组合形式, 作为复数概念合乎逻辑的延伸, 其实部以标量表示, 虚部为三维向量空间中的向量. 四元数源于三个满足特定运算法则即 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ 的抽象符号 i 、 j 、 k , 表示为 $Q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$.

定义 4.15 四元数乘积具有下述形式:

$$(q_0 + \mathbf{q})(s_0 + \mathbf{s}) = q_0s_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{s} + q_0\mathbf{s} + s_0\mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{s} \quad (4.59)$$

其矩阵运算形式为

$$QS_q = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = H_q s_q$$

非零四元数的逆可用**共轭四元数**与四元数范数平方的比值表示, 即

$$(q_0 + \mathbf{q})^{-1} = \frac{(q_0 + \mathbf{q})^*}{\|q_0 + \mathbf{q}\|^2} = \frac{q_0 - \mathbf{q}}{q_0^2 + \|\mathbf{q}\|^2} \quad (4.60)$$

式中, $q_0 - \mathbf{q} = Q^*$ 为定义 4.14 给出的四元数的共轭四元数.

定义 4.16 **Hamilton 算子** H_s 为 4×4 反对称矩阵, 类似于纯四元数与真四元数相乘时的矩阵, 为

$$\mathbf{H}_s = \begin{bmatrix} 0 & -q_x & -q_y & -q_z \\ q_x & 0 & -q_z & q_y \\ q_y & q_z & 0 & -q_x \\ q_z & -q_y & q_x & 0 \end{bmatrix}$$

Hamilton 四元数的范数定义为

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^* = (q_0 + \mathbf{q})(q_0 - \mathbf{q}) = q_0^2 + \|\mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{Q}\|^2 \quad (4.61)$$

因此, Hamilton 四元数可表示为

$$\mathbf{Q} = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{q} \quad (4.62)$$

Hamilton 四元数可构造为 Clifford 代数 $Cl_{0,2}$ 的偶子代数. 四元数的几何意义通过 Cayley (1845) 对采用四元数算子描述三维空间中旋转的研究得以揭示.

4.6.2 Euler-Rodrigues 参数与 Rodrigues 四元数

基于由赋予旋转角半角正弦值的旋转轴线三维向量加之旋转角半角的余弦值构成的 Euler-Rodrigues 四参数 (Rodrigues, 1840), Rodrigues 四元数可表示为

$$\mathbf{Q} = s_0 + \mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3) = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{s} \quad (4.63)$$

式中, \mathbf{s} 的含义已在式 (4.34) 中给出, 且为 Clifford 代数 $Cl_{0,2}$ 的元素. 因此, 旋转运动可采用 Clifford 代数 $Cl_{0,2}$ 的元素来完成. 与 $\mathbf{Q}(\pi\mathbf{s})$ 等价的四元数是 \mathbb{R}^4 中的 $(0 + \mathbf{s})$, 而 Rodrigues 四元数的共轭四元数为

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^{-1} = \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{s} \quad (4.64)$$

四元数构成一个连续群, 所以是李群的一种表示. 单位四元数群与三维旋转群同构.

4.6.3 四元数与李群、李代数的关联

Hamilton 四元数与 Rodrigues 四元数均为单位四元数, 即满足

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (4.65)$$

单位四元数的乘法运算是平稳连续的, 因此可构成与特殊酉群 $SU(2)$ 以及 $Spin(3)$ 同态的李群, 是特殊正交群 $SO(3)$ 的双覆盖. 四元数的乘法运算对应于旋转群的合成运算. 单位四元数群与李群 $SO(3)$ 有着同样的李代数. 每个李群 $SO(3)$ 的元素对应于单位四元数 Q 和 $-Q$ 的四元数共轭运算, 如下所示:

$$\mathbf{V}' = Q\mathbf{V}Q^* = (-Q)\mathbf{V}(-Q)^* \quad (4.66)$$

式中, \mathbf{V} 和 \mathbf{V}' 为下文定义 4.17 给出的纯四元数, 即李代数. 李群对其李代数的作用与单位四元数对向量的共轭运算的等效性说明单位四元数构成的群是 $SO(3)$ 的双覆盖 (Heard, 2006). 该李群为 \mathbb{R}^4 中的三维球面.

定义 4.17 当四元数表示为如下形式时, 即

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

称为纯四元数或向量四元数.

注释 4.12 纯四元数为李代数的四元数表示.

纯四元数的存在使得四元数代数演变为具有加法和乘法运算封闭性的代数, 并且满足 3.9.1 节给出的反对称性与 Jacobi 恒等式. 式 (4.66) 中的单位四元数共轭运算完成了李群对其李代数的作用. 由式 (4.66) 可得, 这两个四元数 Q 和 \mathbf{V} 可分别看成操作算子与操作数.

4.6.4 四元数形式的旋转操作与 Rodrigues 方程

旋转运动可由式 (4.66) 所示的四元数共轭运算完成. 这一运算类似于 Rodrigues 方程的四元数算子运算. 此时四元数拥有操作算子与操作对象两种角色. 在四维向量空间中, 左乘和右乘均为线性变换. 如式 (4.66) 以及 5.7 节所示, 四元数共轭运算表示线性作用在李代数元素 \mathbf{V} 上的李群, 这一操作将纯四元数 \mathbf{V} 作一般螺旋运动变换至另一纯四元数 \mathbf{V}' . 将式 (4.63) 和式 (4.64) 代入式 (4.66), 得

$$\begin{aligned} \mathbf{V}' &= \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{s} \right) \mathbf{V} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{s} \right) \\ &= \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{s} \right) \left(\sin \frac{\theta}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{s} + \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{v} - \sin \frac{\theta}{2} (\mathbf{v} \times \mathbf{s}) \right) \end{aligned} \quad (4.68)$$

即构成了新的李代数元素. 上式实部为

$$\operatorname{Re}(\mathbf{V}') = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{s} - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{v}) = 0$$

虚部为

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\mathbf{V}') &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \mathbf{v} - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} (\mathbf{v} \times \mathbf{s}) + \sin^2 \frac{\theta}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{s} \\ &\quad + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{s} \times \mathbf{v} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \mathbf{s} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{s}) \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \mathbf{v} + \sin \theta (\mathbf{s} \times \mathbf{v}) + \sin^2 \frac{\theta}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{s} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \mathbf{s} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{s}) \end{aligned}$$

由向量三重积特性 $\mathbf{s} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{s}) = (\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{v} - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{s}$, 得

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\mathbf{V}') &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \mathbf{v} + \sin \theta \mathbf{s} \times \mathbf{v} + \sin^2 \frac{\theta}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{s} - \sin^2 \frac{\theta}{2} (\mathbf{v} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}) - \mathbf{s} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{v})) \\ &= \cos \theta \mathbf{v} + \sin \theta (\mathbf{s} \times \mathbf{v}) + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{s} \end{aligned} \quad (4.69)$$

因此, 式 (4.68) 可变换为

$$\begin{aligned} \mathbf{V}' &= \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{s} \right) \mathbf{V} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{s} \right) \\ &= 0 + \cos \theta \mathbf{v} + \sin \theta (\mathbf{s} \times \mathbf{v}) + (1 - \cos \theta) (\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{s} \end{aligned} \quad (4.70)$$

由 4.5.3 节的两个向量的外积或张量积, 上式可写为

$$\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} 0 \\ (\cos \theta \mathbf{I} + \sin \theta [\mathbf{s} \times] + (1 - \cos \theta) \mathbf{s} \mathbf{s}^T) \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{R} \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

因此, 式 (4.32) 和 (4.50) 给出的旋转运动的 Rodrigues 方程可由 Rodrigues 四元数对纯四元数的共轭运算生成.

4.7 研究一般运动的对偶四元数法

4.7.1 对偶四元数³与 Hamilton 算子

单位对偶四元数是表 3.2 中 Clifford 给出的双四元数的现代名称. 采用对偶四元数法研究多个连续的螺旋运动尤为有效. 对偶四元数理论属于 Clifford 代数. 对偶四元数与线性代数结合可以方便地表述刚体的一般运动, 进

³对偶四元数由两个四元数组成, 分别为其主部与副部, 也有称原部与对偶部.

而构造刚体位移群模型. 对偶四元数的主部为 Euler-Rodrigues 四元数, 其副部如下述定义.

定义 4.18 对偶四元数的副部是代表平移向量的向量四元数与对偶四元数主部的四元数积, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0 &= \frac{1}{2} \mathbf{d} \mathbf{Q} = \frac{1}{2} (0 + \mathbf{d})(q_0 + \mathbf{q}) = \frac{1}{2} (-\mathbf{d} \cdot \mathbf{q} + q_0 \mathbf{d} + \mathbf{d} \times \mathbf{q}) \\ &= q_{00} + \mathbf{q}_0 = (q_{00}, q_{01}, q_{02}, q_{03})^T \end{aligned} \quad (4.72)$$

式中, $(0 + \mathbf{d})$ 为向量四元数, 是 $Cl_{0,2}$ 的元素; $(q_0 + \mathbf{q})$ 则为式 (4.63) 给出的对偶四元数的主部.

按照四元数运算规则, 由上式可以导出四元数副部的矩阵形式, 为

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} q_{00} \\ q_{01} \\ q_{02} \\ q_{03} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -d_x & -d_y & -d_z \\ d_x & 0 & -d_z & d_y \\ d_y & d_z & 0 & -d_x \\ d_z & -d_y & d_x & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \mathbf{H}_s \mathbf{Q} \quad (4.73)$$

式中, $\mathbf{Q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T$, 由式 (4.63) 定义. 这里再次给出 4×4 反对称矩阵的 **Hamilton 算子** \mathbf{H}_s .

平移向量 \mathbf{d} 也可采用反对称矩阵形式表示, 由式 (4.72) 可得对偶四元数的副部为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0 &= \frac{1}{2} (-\mathbf{d} \cdot \mathbf{q} + q_0 \mathbf{d} + \mathbf{d} \times \mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{2} (-\mathbf{d} \cdot \mathbf{q} + q_0 \mathbf{d} + (\mathbf{D} \mathbf{q})) \end{aligned} \quad (4.74)$$

式中, \mathbf{D} 即为反对称矩阵, 为

$$\mathbf{D} = [\mathbf{d} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -d_z & d_y \\ d_z & 0 & -d_x \\ -d_y & d_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

将式 (4.75) 中的矩阵 \mathbf{D} 代入式 (4.74), 可得对偶四元数的副部, 为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0 &= \frac{1}{2} (-\mathbf{d} \cdot \mathbf{q} + q_0 \mathbf{d} + \mathbf{d} \times \mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\mathbf{d} \cdot \mathbf{q}, q_0 d_x + \begin{vmatrix} d_y & d_z \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix}, q_0 d_y + \begin{vmatrix} d_z & d_x \\ q_3 & q_1 \end{vmatrix}, q_0 d_z + \begin{vmatrix} d_x & d_y \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(-q_1 d_x - q_2 d_y - q_3 d_z, q_0 d_x + q_3 d_y - q_2 d_z, q_0 d_y + q_1 d_z - q_3 d_x, \\
&\quad q_0 d_z + q_2 d_x - q_1 d_y)
\end{aligned} \tag{4.76}$$

该表达式也可参考 Bottema 和 Roth (1979) 的著作. \mathbf{Q}_0 的四个分量恰为 Study (1891, 1903, 1913) 提出的胞体模型的八个齐次坐标的后四个元素. 在 Study 的研究中, 半角的概念与七维射影空间被用来研究刚体运动. 七维射影空间的超二次曲面与直线对应的五维射影空间的 Klein 二次曲面 (Klein, 1924; Coolidge, 1940) 极为类似. Study 超二次曲面上的点能够描述刚体的包含位置和姿态的全部位姿信息. McAulay (1898) 曾采用对偶四元数描述作用在刚体上的力系及刚体上点的速度分布, 这是应用对偶四元数描述刚体有限位移的最早的尝试. 在此基础上, Yang (1963)、Yang 和 Freudenstein (1964) 将四元数应用到了空间机构运动学的分析中.

若旋量轴线偏离原点, 如 5.2.2 节定理 5.2 所述, 则平移向量 \mathbf{d} 包含两部分, 即由 Rodrigues 参数定义的沿旋量轴线的平移和 5.2.1 节给出的由轴线相对原点的位置向量 \mathbf{r} 引起的等效平移 \mathbf{r}_e (Dai, 2012). 因此, 平移向量 \mathbf{d} 有如下结构:

$$\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_z)^T = \mathbf{r}_e + h\mathbf{s} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{r} + h\mathbf{s} \tag{4.77}$$

式中, $h\mathbf{s}$ 是沿旋量轴线的平移, 5.2 节将给出详细说明. 由式 (4.72), 对偶四元数的副部可写为

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_0 &= \frac{1}{2}(-((\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{r}) \cdot \mathbf{q} - h\mathbf{s} \cdot \mathbf{q} + q_0((\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{r} + h\mathbf{s}) \\
&\quad + ((\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{r}) \times \mathbf{q} + h\mathbf{s} \times \mathbf{q}) \\
&= \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{\theta}{2} h\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} - \sin \frac{\theta}{2} ((\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{r}) \cdot \mathbf{s} + \sin \frac{\theta}{2} h\mathbf{s} \times \mathbf{s} \right. \\
&\quad \left. + \sin \frac{\theta}{2} ((\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{r}) \times \mathbf{s} + q_0((\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{r} + h\mathbf{s}) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{\theta}{2} h - \sin \frac{\theta}{2} ((\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{r}) \cdot \mathbf{s} + \sin \frac{\theta}{2} ((\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{r}) \times \mathbf{s} \right. \\
&\quad \left. + q_0((\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{r} + h\mathbf{s}) \right)
\end{aligned} \tag{4.78}$$

考虑 5.2.1 节给出的等效平移 \mathbf{r}_e , 上式可变换为

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_0 &= \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{\theta}{2} h - \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{r}_e \cdot \mathbf{s}, \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{r}_e \times \mathbf{s} + q_0(\mathbf{r}_e + h\mathbf{s}) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(h \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{r}_e \cdot \mathbf{s}, h \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{s} + \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{r}_e + \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{r}_e \times \mathbf{s} \right) \end{aligned} \quad (4.79)$$

如果旋量轴线通过原点, 则 \mathbf{r} 为 $\mathbf{0}$, 化简上式得

$$\mathbf{Q}_0 = \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{\theta}{2} h + q_0 h \mathbf{s} \right) \quad (4.80)$$

定义 4.19 单位对偶四元数可表示为

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} + \varepsilon \mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q} + \varepsilon \frac{1}{2} d\mathbf{Q} \quad (4.81)$$

其中, ε 是对偶四元数的对偶部单元, 具有 $\varepsilon^2 = 0$ 的特性.

由此, 螺旋运动算子可由对偶四元数构造. 当对偶四元数主部 (原部) 为零时, 该算子可以唯一确定纯对偶向量.

推论 4.2 对应于由 Klein 型推导出的线矢量的二阶约束, 对偶四元数可以给出类似二阶约束方程, 为

$$q_0 q_{00} + q_1 q_{01} + q_2 q_{02} + q_3 q_{03} = 0 \quad (4.82)$$

证明 根据定义 4.15, 按照四元数乘法规则, 可得

$$\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}^* = \frac{1}{2} (0 + d)(q_0 + \mathbf{q})(q_0 - \mathbf{q}) = \frac{1}{2} (0 + d) \quad (4.83)$$

所以上式取实部或标量部为零, 即

$$\operatorname{Re}(\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}^*) = 0$$

又按照四元数的计算法则, 其实部为

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}^*) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}((q_{00} + \mathbf{q}_0)(q_0 - \mathbf{q})) = \frac{1}{2} (q_{00} q_0 - \mathbf{q}_0 \cdot (-\mathbf{q})) \\ &= \frac{1}{2} (q_{00} q_0 + \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}) = \frac{1}{2} (q_{00} q_0 + q_{01} q_1 + q_{02} q_2 + q_{03} q_3) \end{aligned}$$

这就引出公式 (4.82). 推论得证.

根据 **Hamilton 算子** H_s 的反对称特性, 式 (4.82) 可写为

$$\mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{Q} = (\mathbf{H}_s \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \mathbf{H}_s^T \mathbf{Q} = -\mathbf{Q}^T \mathbf{H}_s \mathbf{Q} = 0 \quad (4.84)$$

因此, Clifford 对偶四元数 (Clifford, 1873) 提供了一种描述运动学的有效方法.

4.7.2 Clifford 代数⁴

对偶四元数可用其退化二次型构造为四维空间中的偶 Clifford 代数. 用 e_1 、 e_2 、 e_3 和 e_4 表示四维向量空间 \mathbb{R}^4 下的一组正交基, 则 Clifford 代数也称几何代数, 满足以下基本等式:

$$e_i e_j = -e_j e_i, \quad i \neq j \quad (4.85)$$

和

$$e_i^2 = -1, \quad i = 1, 2, 3, \quad e_4^2 = 0 \quad (4.86)$$

Clifford 代数区别于向量代数的核心在于前者引入了多向量的概念. 其中的双向量由两个向量作特定的乘法获得, 即

$$vw = v \cdot w + v \wedge w \quad (4.87)$$

上式右边两部分分别满足交换律与反交换律, 即

$$v \cdot w = w \cdot v = (vw + wv)/2 \quad (4.88)$$

$$v \wedge w = -w \wedge v = (vw - wv)/2 \quad (4.89)$$

因此, 几何积可采用标量积和楔积⁵ “ \wedge ” 表示, 以生成双向量. 双向量给定了两向量间的区域, 并且与幅值和方向表示同一方位区域的轴线向量具有几何等效性. Clifford 代数的最大特征是任意向量的二次方均为标量.

设 e_1 、 e_2 和 e_3 为 \mathbb{R}^3 下的一组单位正交向量, 则三个向量作 Clifford 积的结果可用式 (4.85) 和式 (4.86) 表示. Hamilton 四元数可由 $Cl_{0,2}$ 构造为 Clifford 代数的子群, 即

$$Q = q_0 + q_1 e_2 e_3 + q_2 e_3 e_1 + q_3 e_1 e_2 \quad (4.90)$$

⁴Clifford 代数 (克利福德代数) 又称几何代数 (geometric algebra), 它综合了内积和外积两种运算, 是对复数、四元数和外代数的推广.

⁵楔积 (wedge product) 也称外积 (exterior product), 是欧几里得几何外代数 (exterior algebra 也称 grassmann algebra), 用以研究面积、体积和它们高维同类体代数构造的积, 是通用于两维以上任何维数空间的向量积, 其生成双向量.

取 e_1 、 e_2 、 e_3 和 e_4 为一组单位正交基, 对偶四元数也可构造为 Clifford 代数 $Cl_{0,3}$ 的子群, 为

$$\begin{aligned} \hat{Q} = & q_0 + q_1 e_2 e_3 + q_2 e_3 e_1 + q_3 e_1 e_2 \\ & + q_{00} e_1 e_2 e_3 e_4 + q_{01} e_4 e_1 + q_{02} e_4 e_2 + q_{03} e_4 e_3 \end{aligned} \quad (4.91)$$

Clifford 代数的基本元素同四元数的基本元素 i 、 j 、 k 以及对偶单元 ε 之间有着特定的映射关系, 如下所示:

$$i = e_2 e_3, \quad j = e_3 e_1, \quad k = e_1 e_2, \quad \varepsilon = e_1 e_2 e_3 e_4$$

和

$$i\varepsilon = e_4 e_1, \quad j\varepsilon = e_4 e_2, \quad k\varepsilon = e_4 e_3 \quad (4.92)$$

可见对偶四元数是 Clifford 偶子代数的一个子群, 由定义 4.14 可写为式 (4.81). 由于子群对 Clifford 代数空间元素的运算可采用第五章将提及的共轭运算完成. 与 Clifford 代数和 Clifford 群相关的文献还可参考 (McCarthy, 1990; Selig, 2005; Garling, 2011).

4.8 经典位移算子的内在关联

经典位移算子始于式 (4.33) 所示的 Rodrigues 三参数, 它采用旋转角半角构造了描述旋转运动轴线的 Rodrigues 向量. Rodrigues 由此入手, 构建了描述位移的 Rodrigues 方程. 基于旋转角半角的概念可以构造式 (4.50) 描述旋转运动的 Rodrigues 方程. 之后, Cayley 采用由 Rodrigues 参数构成的式 (4.40) 反对称矩阵推导出基于式 (4.57) 的 Cayley 方程以建立正交矩阵. 需要强调的是, Rodrigues 方程包括了一般运动描述方程 (Bottema 和 Roth, 1979; Dai, 2006). 关于运动的平移分量的研究始于式 (4.43) 所示的一般螺旋运动的 Rodrigues 方程. 由此, Rodrigues 揭示了运动中的平移的实质, 并将运动从产生运动的力系中分离出来.

另一条发展主线始于基于式 (4.63) Rodrigues 四元数的 Euler-Rodrigues 四参数. 这四个参数的使用又推动了式 (4.71) 旋转运动的 Rodrigues 方程的发现. 四元数已经被证实了其在旋转运动研究中的优势. Clifford 在此基础上提出了式 (4.81) 所示的对偶四元数, 使得四元数理论可以用于处理包

含平移与旋转的一般位移. 对偶四元数的主部为式 (4.63) 给出的由 Euler-Rodrigues 参数构成的四元数, 副部是四元数积; 该四元数积由式 (4.77) 的平移向量与式 (4.63) 所示的主部组成. 已在式 (4.73) 证实, 对偶四元数的副部可用 Hamilton 算子表示, 其给出了对偶四元数的二阶约束, 如式 (4.82). 图 4.7 给出了 19 世纪至 20 世纪初期间上述经典算子的发展历程. 第五章将揭示它们的现代形式以及与李群和李代数的关联.

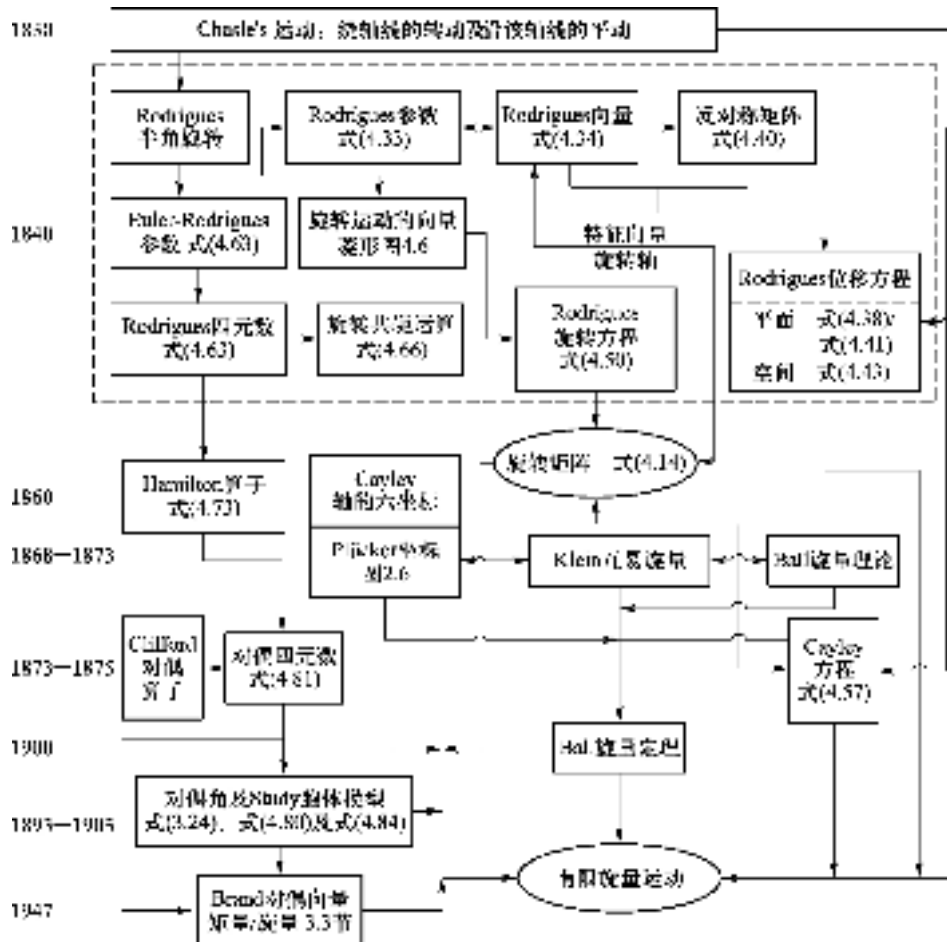


图 4.7 典型算子间的内在关联关系与发展历史年代表

参考文献

- Baker, A (2006) *Matrix groups: An introduction to lie group theory*, Springer, London.
- Ball, R.S. (1876) *Theory of screws: A study in the dynamics of a rigid body*, Hodges, Foster, and Co., Grafton-Street, Dublin.
- Bisshopp, K.E. (1969) Rodrigues' formula and the screw matrix, *ASME J. Eng. Ind.*, **91**(1): 179-185.
- Bottema, O. and Roth, B. (1979) *Theoretical kinematics*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, North-Holland, Amsterdam.
- Cayley, A. (1845) On certain results relating to quaternions, *Phil. Mag.*, **26**(171): 141-145.
- Chirikjian, G.S. (2011) *Stochastic models, information theory, and lie groups, Volume 2: Analytic methods and modern applications*, Birkhäuser, Boston.
- Clifford, W.K. (1873) Preliminary sketch of bi-quaternions, *Proc. London Math Society*, **4**(64/65): 381-395.
- Clifford, W.K. (1876) On the space-theory of matter, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **2**: 157-158.
- Coe, C.J. (1934) Displacements of a rigid body, *American Mathematical Monthly*, **41**(4): 242-253.
- Coolidge, J.L (1940) *A History of Geometrical Methods*, Oxford University Press, New York (Reprinted by Dover 1963).
- Craig, J.J. (1989) *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA.
- Dai, J.S. (2006) An historical review of the theoretical development of rigid body displacements from Rodrigues parameters to the finite twist, *Mech. Mach. Theory*, **41**(1): 41-52.
- Dai, J.S. (2012) Finite displacement screw operators with embedded Chasles' motion, *ASME J. Mech. Rob.*, **4**(4): 041002.
- Dai, J.S. (2014) *Screw Algebra and Kinematic Approaches for Mechanisms and Robotics*, Springer, London.
- Dai, J.S., Holland, N. and Kerr, D.R. (1995) Finite twist mapping and its application to planar serial manipulators with revolute Joints, *J. Mech. Eng. Sci.*, **209**(C3): 263-272.
- Dimentberg, F.M. (1950) *The determination of the positions of spatial mechanisms*, Izdat, Akad, Moscow, USSR.
- Eves, H. (1980) *Elementary matrix theory*, Dover, New York.
- Garling, D.J.H. (2011) *Clifford algebras: An introduction*, Cambridge University Press, Cambridge.

- Gan, D., Liao, Q., Wei, S., Dai, J.S. and Qiao, S. (2008) Dual quaternion-based inverse kinematics of the general spatial 7R mechanism, *J. Mech. Eng. Sci.*, **222**(8): 1593-1598.
- Ge, Q.J., Varshney, A., Menon, J.P. and Chang, C.F. (1998) Double quaternions for motion interpolation, *Proc. of the ASME DETC'98*, paper no. DETC98/DFM-5755, Sept. 13-16, Atlanta, GA.
- Gibbs J.W. (1901) *Vector Analysis: A Text-book for the Use of Students of Mathematics and Physics, Founded upon the lectures of J. Willard Gibbs*, Yale University Press, London.
- Grattan-Guinness I. (1997) *The Fontana History of the Mathematical Sciences*, Fontana Press, London.
- Heard W.B. (2006) *Rigid Body Mechanics: Mathematics, Physics and Applications*, Wiley-VCH, Weinheim.
- Huang, C. (1995) On the finite screw system of the third order associated with a revolute-revolute chain, *ASME J. Mech. Des.*, **116**(3): 875-883.
- Huang, C. (1997) The cylindroid associated with finite motion of the Bennett mechanism, *ASME J. Mech. Des.*, **119**(4): 521-524.
- Hunt, K.H. (1978) *Kinematic Geometry of Mechanisms*, Clarendon Press, Oxford.
- Hunt, K.H. and Parkin, I.A. (1995) Finite displacements of points, planes, and lines via screw theory, *Mech. Mach. Theory*, **30**(2): 177-192.
- Klein, F. (1924) *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Geometry*, Reprinted in 1939, Dover Publications Inc.
- Li, H. (1997) Hyperbolic geometry with Clifford algebra, *Acta Appl. Math.*, **48**(3): 317-358.
- Lounesto, P. (2001) *Clifford Algebra and Spinors*, Cambridge University Press, New York.
- McAulay, A. (1898) *Octonion: A Development of Clifford's Bi-quaternions*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- McCarthy, J.M. (1990) *An Introduction to Theoretical Kinematics*, The MIT Press, London.
- McMahon, C. and Browne, J. (1998) *CAD/CAM: Principles, Practice and Manufacturing Management*, Addison-Wesley, New York.
- Murray, R.M., Li, Z. and Sastry, S.S. (1994) *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press, New York.
- Parkin, I.A. (1990) Coordinate transformations of screws with applications to screw systems and finite twists, *Mech. Mach. Theory*, **25**(6): 689-699.
- Ravani, B. and Roth, B. (1984) Mappings of spatial kinematics, *ASME J. Mech. Trans. Autom. Design*, **106**(3): 341-347.

- Rodrigues, O. (1840) Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire. *Journal de Mathématiques*, **5**: 380-440.
- Roth, B. (1967) On the screw axes and other special lines associated with spatial displacements of a rigid body, *Journal of Engineering for Industry*, **89**(1): 102-110.
- Selig, J.M. (2005) *Geometric Fundamentals of Robotics*, Springer, New York.
- Smith, G. (1998) *Introductory Mathematics: Algebra and Analysis*, Springer, London.
- Study, E. (1891) Von den Bewegungen und Umlegungen, *Mathematische Annalen*, **39**(4): 441-565.
- Study, E. (1903) Die geometrie der dynamen, *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, Leipzig, **35**: 470-483.
- Study, E. (1913) Grundlagen und ziele der analytischen kinematik, *Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft* **12**: 36-60.
- Tsai, L.W. and Roth, B. (1973) Incompletely specified displacements: Geometry and spatial linkage synthesis, *ASME J. Eng. Ind.*, **95**(B): 603-611.
- Yang, A.T. (1963) *Application of Quaternion Algebra and Dual Numbers to the Analysis of Spatial Mechanisms*, PhD Dissertation, Columbia University, New York.
- Yang, A.T. and Freudenstein, F. (1964) Application of dual-number quaternion algebra to the analysis of spatial mechanisms, *ASME J Appl. Mech.*, **86**(2): 300-309.
- 郝矿荣, 丁永生 (2011) 机器人几何代数模型与控制, 科学出版社, 北京.
- 李洪波 (2003) Clifford 代数, 几何计算和几何推理, *数学进展*, **32**(4): 405-415.
- 廖启征, 倪振松, 李洪波, 黄雷 (2009) 四元数的复数形式及其在 6R 机器人反解中的应用, *系统科学与数学*, **29**(9): 1286-1296.
- 李武明 (2000) Clifford 代数与 Minkowski 空间的性质, *吉林大学自然科学学报*, (4): 13-16.
- 吴文俊 (1984) 几何定理机器证明的基本原理, 科学出版社, 北京.
- 张桂颖, 李武明, 张庆成 (2013) 实结合代数的双环与 Clifford 代数的结构, *吉林大学学报: 理学版*, **51**(3): 434-436.

第五章 $SE(3)$ 伴随作用的有限位移旋量

有限位移旋量的运算可采用具有李群 $SE(3)$ 伴随作用的有限位移旋量矩阵表示. 李群 $SE(3)$ 是全部可用有限位移旋量矩阵表示的低维群的半直积. 作为李群的伴随表示, 有限位移旋量矩阵具有 3×3 对偶矩阵形式和 6×6 矩阵形式, 可用来描述刚体运动即 Chasles 运动的旋转和平移. 刚体的所有有限运动和微小运动, 均可等效为绕轴线的旋转与沿该轴线的平移. 这就是旋量理论 (Ball, 1900) 的两大基础理论之一 (Chasles, 1830; Coolidge, 1963), 即我们所熟知的有限螺旋位移理论. 任意合成有限位移旋量均可由旋转角、旋转轴线的位姿以及旋距或者沿该轴线平移的距离确定. 该旋转角是唯一确定的, 其变化范围一般限制在 $(-\pi, \pi)$. 旋转矩阵 (Altmann, 1986) 可采用如式 (4.40) 所示具有 Rodrigues 参数的反对称矩阵的 Cayley 公式 [见式 (4.57)] 构建.

运用矩阵算子研究空间机构可以追溯到 20 世纪 50 年代至 60 年代 Dimentberg (1948, 1960, 1965) 与 Denavit 和 Hartenberg (1955) 的研究. 20 世纪 60 年代至 70 年代初, Yang 和 Freudenstein (1964) 通过用对偶四元数左乘对偶线矢量提出了有限位移旋量算子, 进而得到描述空间机构的对偶四元数. Woo 和 Freudenstein (1970) 在研究刚体运动过程中提出了一个代数公式, 即运用

直线几何的概念构建了含有 3×3 反对称平移矩阵的 6×6 矩阵. 这些成果在该领域的研究中具有里程碑意义. 在此基础上, Yuan 和 Freudenstein (1971) 成功地采用代数形式对有限螺旋运动进行了描述. Bottema 和 Roth (1979) 对有限螺旋运动进行了更加深入的研究. 完成直线位移的对偶矩阵被 Pen-nock 和 Yang (1985) 用来解决机器人中的运动学逆解问题, 也被 Ravani、Roth (1984) 和 McCarthy (1986) 用来研究空间运动的位移瞬轴面. 位移算子的全面研究由 McCarthy (1990) 阐述, 而对空间旋转和一般螺旋位移表述的回顾由 Rooney (1977, 1978) 展开, 这些研究的历史回顾由 Dai (2006) 展开.

Samuel、McAree 和 Hunt (1991) 通过使用正交矩阵的不变量以及旋量几何与欧氏群矩阵表达的等效性, 揭示了旋量几何与对偶正交矩阵之间的关系. Dai、Holland 和 Kerr (1995) 揭示了初始参考位姿对有限位移旋量矩阵副部 (即非对角线上子矩阵) 的影响, 提出基于李群作用的一系列有序的有限位移旋量运算, 以描述机构末端杆件的运动. 这一时期, Parkin (1997) 提出了作用于 Chasles 轴线上的特征旋量, Hunt 和 Parkin (1995) 对关联性位移进行了研究, Huang 和 Roth (1994) 给出了有限位移旋量系统的解析表示. 这种有限位移旋量也叫位移旋量, 与 Huang 等 (Huang、Kuo 和 Ravani, 2010) 将直线与线列的一般直线位移相结合提出的直线系统的几何特性有关. Zarrouk 和 Shoham (2011) 采用一个已知运动轴线和角位移的复合运动的纯向量分析法进一步分析了上述连续螺旋运动. 这种关联机构运动的有限位移旋量系统被 Perez-Gracia (2011) 用来描述一组有限任务位置的综合. 可以注意到, 用来描述机构活动度 (Dai、Huang 和 Lipkin, 2006; Yu 等, 2011; Su, 2011)、机构拓扑构型 (Gan、Dai 和 Liao, 2010; Gan、Dai 和 Caldwell, 2011; Zhang、Dai 和 Fang, 2010) 以及几何误差 (Liu、Huang 和 Chetwynd, 2011) 的旋量是有限位移旋量, 可描述整周运动. 其对应的位移子群由 Lee 和 Hervé (2011) 用来研究产生 Schoenflies 运动的等约束并联机构. Chirikjian 和 Kyatkin (2001) 将其应用到了更为广泛的工程领域, 并将其应用到串联机器人和多肽链中 (Lee, Wang 和 Chirikjian, 2007). Müller 和 Terze (2009) 与 Müller (2011, 2012) 用其研究了运动循环. Aspragathos 和 Dimitros (1998) 与 Suleyman (2007) 运用由对偶四元数代数推导出的 4×4 齐次矩阵对机器人的运动学方程进行了研究. 这些矩阵对应于 Hervé (1978) 提出的运动副的位移子群概念, 并被 Chen (2010) 用来研究并联机器人机构的活动度. 这种有限位移旋量及其与李群的

关联关系由 Dai (2012) 作了全面的分析.

研究实践表明, 有限位移旋量矩阵是刚体位移的算子, 为空间机构的分析与综合提供了有力的工具.

5.1 有限位移旋量算子与 $SE(3)$ 的伴随表示

5.1.1 Chasles 运动、李群 $SE(3)$ 与有限位移旋量矩阵

Chasles (1830) 的研究工作早于 Lie 对连续元素群的研究 (1888—1893). Chasles 指出, 刚体运动均可看作有限螺旋运动, 包括绕轴线的旋转和沿该轴线的平移.

刚体位移可视为“定向平面上的有向线段上的点”的三合体的位移, 也可将刚体运动视为直线及直线外一点的运动, 可以由三维空间内的刚体位移群的特殊欧氏群 $SE(3)$ 描述.

定义 5.1 特殊欧氏群 $SE(3)$ 是三维空间仿射群 $Aff(3)$ 的闭合子群, 为李群, 可以表示为特殊正交群 $SO(3)$ 与位移群 $T(3)$ 的半直积.

$SE(3)$ 不是欧氏空间, 而是流形, 又是常规的欧氏运动群. 在古典机械学中, $SE(3)$ 常被用来研究刚体运动学, 既是有代数运算功能的代数结构, 又是有连续函数作用的拓扑结构的数学实体, 即拓扑群. 因此, 刚体运动是仿射映射, 映射为欧氏群内的曲线. 虽然齐次变换算子运用仿射变换矩阵包括了一般运动的旋转和平移, 齐次变换算子只能完成点位移的运算.

直线在空间的位移可以由两点的位移描述, 而刚体的位移需要由不在一条直线上的三点描述, 有效的方法是采用旋量位移算子. 旋量位移算子以 3×3 对偶正交矩阵的形式或 6×6 矩阵的形式表示. 其中, 采用 3×3 对偶矩阵形式, 有限位移旋量矩阵可表示为

$$\mathbf{R} + \varepsilon \mathbf{AR} \quad (5.1)$$

式中, 矩阵 \mathbf{R} 为对偶矩阵的主部, 也是属于李群的特殊正交群 $SO(3)$; 矩阵 \mathbf{AR} 为对偶矩阵的副部; 矩阵 \mathbf{A} 为反对称矩阵, 起着平移作用, 其元素由

平移向量得来, 即

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -d_z & d_y \\ d_z & 0 & -d_x \\ -d_y & d_x & 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{d}\times] \quad (5.2)$$

该矩阵完成旋转轴线位置的改变, 由平移向量 \mathbf{d} 表示. 对偶矩阵也可变换为 6×6 有限位移旋量矩阵形式 (Woo 和 Freudenstein, 1970), 以其分块矩阵形式表示为

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{AR} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

类似于对偶正交矩阵, 在该 6×6 位移矩阵算子的分块矩阵形式中, \mathbf{R} 为主部, 也称对角线部, 本章后续章节统一称为主部; \mathbf{AR} 称为副部或非对角线部, 本章后续章节统一称为副部. 将上式所示的有限位移旋量矩阵作用于式 (3.2) 所示的任意单位旋量, 并考虑式 (5.2), 可得

$$\mathbf{S}' = \mathbf{NS} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{AR} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ s_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Rs} \\ \mathbf{ARs} + \mathbf{Rs}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Rs} \\ [\mathbf{d}\times]\mathbf{Rs} + \mathbf{Rs}_0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

以上运算也可采用对偶正交矩阵完成. 不同的是, 运算过程中的旋量采用如式 (3.29) 所示的 3×1 对偶向量形式.

5.1.2 李群伴随算子 $\text{Ad}(g)$ 与伴随作用

定义 5.2 $\text{Ad}(g)$ 为李群伴随算子, 对其自身或李代数产生伴随作用.

注释 5.1 $\text{Ad}(g)$ 本身是一个矩阵, 也是李群元素. 在 $SO(3)$ 可写为矩阵 \mathbf{R} , 在 $SE(3)$ 可写为 4×4 的矩阵 \mathbf{H} 或 6×6 的矩阵 \mathbf{N} .

定义 5.3 设李代数矩阵向量空间元素为 \mathbf{X} , 其李群算子作用于该李代数的伴随作用为共轭运算, 即

$$\text{Ad}(g)\mathbf{X} = g\mathbf{X}g^{-1}$$

定义 5.4 设李代数 $se(3)$ 的六维向量形式元素为 \mathbf{S} , 其李群算子作用于该李代数元素的伴随作用为左作用, 即

$$\text{Ad}(g)\mathbf{S} = \mathbf{NS}$$

定义 5.5 李群对自身或其李代数矩阵表示的伴随作用为共轭, 对其李代数向量形式元素的伴随作用通过左作用完成.

5.1.3 李群 $SE(3)$ 的标准表示与伴随表示以及 Rodrigues 一般运动公式

李群 $SE(3)$ 有标准表示与伴随表示两种. 作用于李代数的群称为群的伴随作用, 也称伴随表示.

1. 李群 $SE(3)$ 的标准 4×4 表示与 Rodrigues 一般运动公式

基于 3.9.4 节式 (3.101) 的李代数标准表示, 由指数映射可得李群 $SE(3)$ 的 4×4 标准表示, 如下式所示:

$$\mathbf{H} = e^{\theta \mathbf{E}} = \mathbf{I} + \sin \theta \mathbf{E} + (1 - \cos \theta) \mathbf{E}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

式中, \mathbf{E} 如式 (3.101); $\mathbf{R} \in SO(3)$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$. 李群 $SE(3)$ 的 4×4 标准表示也称标准伴随作用, 与式 (4.7) 所示的仿射变换矩阵相同.

注释 5.2 上式给出了 Rodrigues 一般运动公式, 即一般螺旋运动公式.

定理 5.1 对李代数 $se(3)$ 的标准 4×4 表示做指数映射, 可得到李群 $SE(3)$ 的标准 4×4 表示, 与定义 4.4 给出的仿射群 $Aff(3)$ 同构.

2. 李群的 6×6 伴随表示

定义 5.6 伴随表示也称伴随作用, 是李群 G 的自同态, 表示为

$$\text{Ad} : G \rightarrow GL(g)$$

李群对李代数的伴随作用见定义 5.5, 详情请见 5.7 节.

上节中给出的有限位移旋量矩阵是 $SE(3)$ 的伴随表示, 从注释 5.1 可知, 其也为李群元素, 以分块矩阵形式出现

$$\text{Ad}(g) = \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{AR} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

式中, 映射 $\text{Ad}(g): \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ 为 $SE(3)$ 对采用射线坐标的李代数 $se(3)$ 的伴随作用. $SE(3)$ 对采用轴线坐标的李代数 $se(3)$ 的伴随作用为

$$\text{Ad}(g) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{AR} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

注释 5.3 李群 $SE(3)$ 对采用射线坐标的李代数的伴随作用的逆矩阵是对采用轴线坐标的李代数的伴随作用的转置.

由分块矩阵求逆, 式 (5.3) 所示的 6×6 矩阵 N 的逆矩阵可写为

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{AR} & \mathbf{R} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{AR})\mathbf{R}^{-1} & \mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix}$$

由式 (4.2) 可得

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}^T \mathbf{A} & \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

进一步, 由式 (5.7) 可知, 有限位移旋量矩阵是可逆阵. 同时, 该矩阵的行列式为

$$\det N = \det \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{AR} & \mathbf{R} \end{bmatrix} = \det \mathbf{R} \det \mathbf{R} = 1 \quad (5.8)$$

由此, 有限位移旋量矩阵 N 是行列式为 1 的可逆矩阵, 属于一般线性群 $GL(3)$ 子群, 即特殊线性群 $SL(3)$.

李群对李代数的伴随作用将在 5.7 节中进一步阐述.

5.1.4 李群 $SE(3)$ 元素的 6×6 有限位移旋量矩阵

定理 5.2 6×6 有限位移旋量矩阵是李群 $SE(3)$ 中的一个元素.

证明 对照公理 4.1, 证明如下.

首先, 封闭性公理可用下列二元运算来证实, 若 $N_1, N_2 \in SE(3)$, 则 $N_1 N_2 \in SE(3)$. 这里, 二元运算经常只是将两个元素并列给出而没有特别的符号. 具体过程如下:

$$\begin{aligned} N_1 N_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1 \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 & \mathbf{0} \\ (\mathbf{A}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{R}_1^T) \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.9)$$

和

$$(N_1 N_2)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^T & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^T (\mathbf{A}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{R}_1^T) & \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^T \end{bmatrix}$$

则有

$$\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 (\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2)^{-1} = \mathbf{I} \quad (5.10)$$

进一步推导, 得

$$\det(\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2) = \det \mathbf{N}_1 \det \mathbf{N}_2 = 1 \quad (5.11)$$

可见, 上述两方程满足封闭性公理, 即 $\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 \in SE(3)$.

其次, 单元公理可以从式 (5.10) 和式 (5.11) 看出, 存在 6×6 单位矩阵 $\mathbf{I} \in SE(3)$, 使得任意有限位移旋量矩阵 $\mathbf{N} \in SE(3)$ 均满足 $\mathbf{N}\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{N} = \mathbf{N}$.

再次, 可逆性公理可以从式 (5.5) 和式 (5.7) 看出

$$\mathbf{N}\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{N} = \mathbf{I} \quad (5.12)$$

因而, 存在任意伴随表示 \mathbf{N} 的逆为

$$\mathbf{N}^{-1} \in SE(3) \quad (5.13)$$

最后, 群 $SE(3)$ 运算的结合律可由矩阵运算的结合律得出, 即

$$\mathbf{N}_1(\mathbf{N}_2 \mathbf{N}_3) = (\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2) \mathbf{N}_3 \quad (5.14)$$

进而, 对照公理 4.2, 其封闭性与结合律得出的矩阵与原有矩阵同构, 是可微分的. 其逆也可微. 其二元运算和逆均为拓扑的连续函数. 由此, 定理得证, 即所有 6×6 矩阵 \mathbf{N} 的集合构成李群 $SE(3)$, 单位元为 6×6 单位矩阵 \mathbf{I} .

李群 $SE(3)$ 是拓扑群, 群运算为矩阵乘法. 类似于对偶正交矩阵, 表述于 5.1.1 节的有限位移旋量矩阵中的矩阵 \mathbf{R} 是 6×6 旋量矩阵的主部, 矩阵 \mathbf{AR} 为副部, 采用对偶正交矩阵或 6×6 旋量矩阵均可表示对线矢量先旋转后平移的作用, 不同点是, 前者中的线矢量采用 3×1 对偶向量形式, 后者则采用 6×1 六维向量形式.

5.1.5 有限位移旋量矩阵的传统分解与商群

6×6 有限位移旋量矩阵可进行分解 (Woo 和 Freudenstein, 1970), 表示对线矢量或旋量即李代数 $se(3)$ 的元素先施以旋转而后施以平移的作用, 表示为

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{AR} & \mathbf{R} \end{bmatrix} = \mathbf{N}_t \mathbf{N}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

式中, 矩阵 I 是 3×3 单位矩阵; 矩阵算子 N 为不变量, 适用于任意刚体位移. 由式 (5.15) 可知, $SO(3)$ 的伴随表示可表示为三维平移群 $T(3)$ 对 $SE(3)$ 的商群, 记为 $SO(3) \cong SE(3)/T(3)$.

定义 5.7 如果 N 是群 G 的正规子群, G/N 为商群或因子群.

由上, 特殊欧氏群可表示为 $SO(3)$ 与 $T(3)$ 的半直积, 扩展为

$$SE(3) \cong SO(3) \ltimes T(3) \quad (5.16)$$

上述半直积的几何意义是作用于平移上的旋转.

5.2 有限位移旋量矩阵的 Chasles 分解及其几何意义

5.2.1 绕任意旋量轴具有等效平移的纯旋转

绕具有位置向量为 \mathbf{r} 的旋转轴线 \mathbf{s} [见式 (4.18)] 的纯转动可按下列步骤完成. 先将其邻域空间沿位置向量 $-\mathbf{r}$ 平移, 使得轴线 \mathbf{s} 通过原点, 再将该空间绕平移后的旋转轴线旋转到给定角度, 然后将该空间沿位置向量 \mathbf{r} 平移, 此变换过程可以表示为

$$N_{\mathbf{r}} N_{\mathbf{R}} N_{-\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{\mathbf{r}} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{\mathbf{r}} & I \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

式中, $\mathbf{A}_{\mathbf{r}}$ 是由位置向量 \mathbf{r} 构成的反对称矩阵, 即

$$\mathbf{A}_{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix}$$

由式 (5.17) 得

$$N_{\mathbf{r}} N_{\mathbf{R}} N_{-\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{\mathbf{r}} \mathbf{R} - \mathbf{R} \mathbf{A}_{\mathbf{r}} & \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{A}_{\mathbf{r}} - \mathbf{R} \mathbf{A}_{\mathbf{r}} \mathbf{R}^T) \mathbf{R} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

上式与式 (5.3) 是等效的, 因此上述矩阵的副部与式 (5.3) 的副部相等, 即

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathbf{r}} - \mathbf{R} \mathbf{A}_{\mathbf{r}} \mathbf{R}^T \quad (5.19)$$

用等效平移矩阵 A_e 取代上式中的矩阵 A , 可得到

$$A_e = A_r - RA_rR^T \quad (5.20)$$

上式定义了等效平移变换 A_e . 该矩阵可用来表示与坐标系原点重合的点在关于旋转轴线 s 的纯旋转的作用下发生的等效平移 (Dai、Holland 和 Kerr, 1995), 如图 5.1 所示. RA_rR^T 为矩阵 A_r 的全等变换; 由 4.1.1 节旋转矩阵 R 特性得知 $RA_rR^T = RA_rR^{-1}$, 且 RA_rR^{-1} 为矩阵 A_r 的相似变换. 由 5.7 节可知, A_r 的相似变换与全等变换是对矩阵 A_r 的共轭作用. 由于 A_r 是反对称矩阵, 矩阵 RA_rR^{-1} 仍为反对称矩阵, 由此证明矩阵 A_e 是反对称矩阵.

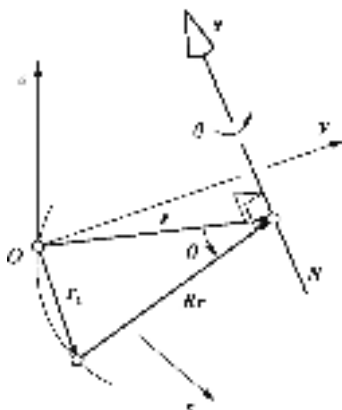


图 5.1 Chasles 旋转及其等效平移

至此, 旋转轴线不经过原点的纯转动可用等效平移矩阵 A_e 表达.

采用相似变换或全等变换, 即 $RA_rR^T = RA_rR^{-1}$ (Ayres, 1974), 可产生作用于反对称矩阵 A_r 的如 5.7 节的共轭运算. 这一共轭运算, 等效于对向量 r 作纯旋转位移, 为

$$A_{r'} = RA_rR^{-1} = [Rr \times] \quad (5.21)$$

这将在 5.7.2 节给出更详细的阐述. 经过旋转变换后的向量 r' 可从反对称矩阵 RA_rR^T 中求出, 为

$$r' = Rr \quad (5.22)$$

因此, 式 (5.20) 的等效平移矩阵 \mathbf{A}_e 含旋转轴线的位位置向量 \mathbf{r} , 能够通过等效平移向量 \mathbf{r}_e 得到

$$\mathbf{r}_e = (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{r} \quad (5.23)$$

等效平移向量 \mathbf{r}_e 为 Chasles 运动在有限位移旋量矩阵中的影响结果, 如图 5.1 所示. 因此, 等效平移向量 \mathbf{r}_e 对应的等效平移矩阵 \mathbf{A}_e 可用下述形式表示:

$$\mathbf{A}_e = [\mathbf{r}_e \times] = [(\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{r} \times] \quad (5.24)$$

式中, $[(\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{r} \times]$ 是反对称矩阵. $(\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{r}$ 的物理意义如图 5.1 中的向量 \mathbf{r}_e 所示, 表示刚体关于不过原点的轴线的旋转.

5.2.2 沿轴线平移的矩阵形式以及有限位移旋量矩阵的 Chasles 分解

Chasles 运动包含绕轴线的旋转和沿该轴线的平移, 这一位移可以由 5.1.1 节的式 (5.3) 完成. 基于 Chasles 运动, 轴向平移分量可以单独表示为

$$\mathbf{A}_l = \iota \mathbf{A}_s \quad (5.25)$$

上式通过轴向平移矩阵 \mathbf{A}_l 给出了 Chasles 运动的轴向平移分量, 称为 **Chasles 平移**. 其中, 矩阵 \mathbf{A}_l 为反对称矩阵, 其模长为 ι . 矩阵 \mathbf{A}_s 是式 (4.6) 给出的由旋转轴线 \mathbf{s} 的分量构成的反对称矩阵, 其作用等同于采用向量 \mathbf{s} 对被作用的向量作叉积.

定理 5.3 有限位移旋量矩阵副部中的一般平移矩阵 \mathbf{A} 可分解为两部分, 分别为由旋转轴线偏离原点引起的与轴线垂直的等效平移和沿轴线方向的平移, 表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_e + \mathbf{A}_l = (\mathbf{A}_r - \mathbf{R}\mathbf{A}_r\mathbf{R}^{-1}) + \iota \mathbf{A}_s \quad (5.26)$$

上式为反对称矩阵形式. 由式 (5.24), 上式可改写为

$$\mathbf{A} = [\mathbf{r}_e \times] + \iota \mathbf{A}_s = [(\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{r} \times] + \iota \mathbf{A}_s \quad (5.27)$$

不同于式 (5.15) 的有限位移旋量矩阵的传统分解方法, 上式可将有限位移旋量矩阵分解为 Chasles 旋转矩阵 \mathbf{N}_c 和平移矩阵 \mathbf{N}_l .

定义 5.8 基于有限位移旋量矩阵副分解定理, 可对关于任意轴线旋转和沿该轴线平移构成的 Chasles 运动进行 **Chasles 分解**, 表示为

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_l \mathbf{N}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \iota \mathbf{A}_s & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ [r_e \times] \mathbf{R} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

该式给出了沿旋转轴线的平移群 $T(3)$, 是李群 $SE(3)$ 的子群. 根据上述分解方法, 并加入轴线平移式 (5.19), 有限位移旋量矩阵的副部可写成

$$\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{A}_r \mathbf{R} - \mathbf{R}\mathbf{A}_r + \iota \mathbf{A}_s \mathbf{R} \quad (5.29)$$

上述对有限位移旋量矩阵的分解过程可通过下列对直线位移的描述进行展示.

例 5.1 空间直线的位移可以用式 (5.3) 所示的有限位移旋量算子 \mathbf{N} 表示, 即

$$\mathbf{L}' = \mathbf{N}\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\mathbf{R} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} l \\ r_l \times l \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

式中, 姿态向量 l 为被操作的线矢量 \mathbf{L} 的主部; r_l 为姿态向量的位置向量. 将式 (5.27) 所示的经过分解的平移矩阵 \mathbf{A} 代入上式得到新的线矢量, 为

$$\mathbf{L}' = \begin{pmatrix} \mathbf{R}l \\ ((\mathbf{I} - \mathbf{R})r \times] + \iota \mathbf{A}_s)\mathbf{R}l + \mathbf{R}(r_l \times l) \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

上式表明, 线矢量经过有限位移旋量矩阵作用仍得到线矢量. 式 (5.31) 副部可写为

$$\begin{aligned} & ((\mathbf{I} - \mathbf{R})r \times] + \iota \mathbf{A}_s)\mathbf{R}l + \mathbf{R}(r_l \times l) \\ &= (\mathbf{r} - \mathbf{R}\mathbf{r} + \iota s) \times \mathbf{R}l + \mathbf{R}r_l \times \mathbf{R}l \\ &= (\mathbf{r} - \mathbf{R}\mathbf{r} + \mathbf{R}r_l + \iota s) \times \mathbf{R}l \end{aligned}$$

如果线矢量 \mathbf{L} 的姿态向量 l 与 Chasles 运动的轴线 s 重合, 那么 $r_l = \mathbf{r}$, $l = s$, $\mathbf{R}l = l$, 上式演化为

$$\begin{aligned} & (\mathbf{r} - \mathbf{R}\mathbf{r} + \mathbf{R}r_l + \iota s) \times \mathbf{R}l \\ &= (\mathbf{r} + \iota s) \times \mathbf{R}l \\ &= \mathbf{r} \times l \end{aligned}$$

由此, 新的线矢量可以表示为

$$\mathbf{L}' = \begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{s} \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

该式表明, Chasles 运动对螺旋运动自身轴线所施加的作用并未改变其轴线的空间位姿, 这就证实了解析后的矩阵正确地完成了 Chasles 运动.

5.2.3 旋量特性算子

式 (5.3) 所示的有限位移旋量矩阵可用来改变旋量的特性. 其中, 矩阵 \mathbf{R} 的作用使得被操作的旋量姿态向量的方向发生变化, 而矩阵 \mathbf{A} 正如式 (5.27) 中的作用使姿态向量的位置发生改变. 矩阵 \mathbf{A} 为由向量 \mathbf{r} 的分量构成的反对称矩阵, 相当于采用向量 \mathbf{r} 对被作用的向量作叉积.

通过下述矩阵, 可改变旋量主部和副部的模长, 该矩阵为:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_p \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_d \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

式中, λ_p 代表对旋量主部的改变量; λ_d 代表对旋量副部的改变量.

若改变旋距, 可采用下列矩阵:

$$\mathbf{N}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ h' \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

式中, h' 代表旋量的旋距改变部分. 将上式给出的矩阵施加到有限位移旋量矩阵, 式 (5.2) 的矩阵 \mathbf{A} 改变为

$$\mathbf{A}' = h' \mathbf{I} + \mathbf{A} \quad (5.35)$$

式中, 矩阵 \mathbf{A}' 是由旋距变化及其他特性变化组合而成的复合矩阵. 因此, 式 (5.3) 的有限位移旋量矩阵可表示为

$$\mathbf{N}' = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}' \mathbf{R} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

将式 (5.26) 代入式 (5.35), 再代入到上式, 得

$$\mathbf{N}' = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ (h' \mathbf{I} + (\mathbf{A}_e + \iota \mathbf{A}_s)) \mathbf{R} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

式中, 反对称矩阵 \mathbf{A}_s 在引入旋距变化矩阵 $h' \mathbf{I}$ 后成为满秩矩阵.

例 5.2 给定旋量 $S = (s, r \times s + hs)^T$, 将上式给出的矩阵 N' 作用于该旋量, 可得

$$S' = \begin{pmatrix} Rs \\ (h'I + (A_e + \iota A_s))Rs + R(r \times s + hs) \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

运用如式 (4.6) 和式 (5.24) 所示的矩阵 A_s 和 A_e 的几何含义, 上式可进一步改写为

$$\begin{aligned} s' &= \begin{pmatrix} Rs \\ (h'I + (A_e + \iota A_s))Rs + R(r \times s + hs) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Rs \\ (h' + h)Rs + (\iota r_s + r_e + Rr) \times Rs \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由此, 经过旋转矩阵 R 的旋转变换作用与等效平移矩阵 A_e 的变换作用, 以及轴线平移矩阵 A_s 的变换作用, 加之由 $h'I$ 引起的旋距改变作用, 可以获得特性发生改变的新旋量. 如果向量 s 是矩阵 R 执行的旋转轴线, 上式可简化为

$$S' = \begin{pmatrix} s \\ r \times s + (h' + h)s \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

由此, 上式给出了原给定旋量仅改变旋距得到的旋量.

5.3 有限位移旋量矩阵的迹与参数

5.3.1 旋转角的相关迹

旋转矩阵的迹是旋转角的余弦值的两倍再加 1. 对于变换范围为 $(-\pi, \pi]$ 的旋转角, 必须另外求出旋转角的正弦值以通过 atan2 函数获得旋转角的唯一值.

定义 5.9 矩阵 A 的迹 $\text{tr } A$ 为其主对角线元素的总和, 也等于矩阵 A 所有特征值的和.

在式 (4.22) 给出的 Rodrigues 公式两边分别左乘式 (4.6) 所示的反对称旋量轴线矩阵 A_s , 可得

$$A_s R = A_s + \sin \theta A_s A_s + (1 - \cos \theta) A_s A_s A_s \quad (5.40)$$

根据附录 B, 并应用 Cayley-Hamilton 定理, 上式可简化为

$$\mathbf{A}_s \mathbf{R} = \cos \theta \mathbf{A}_s + \sin \theta \mathbf{A}_s \mathbf{A}_s \quad (5.41)$$

对上式两边同时取迹, 得

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{A}_s \mathbf{R}) &= \text{tr}(\cos \theta \mathbf{A}_s + \sin \theta \mathbf{A}_s \mathbf{A}_s) \\ &= \cos \theta \text{tr} \mathbf{A}_s + \sin \theta \text{tr}(\mathbf{A}_s \mathbf{A}_s) \\ &= \sin \theta \text{tr}(\mathbf{A}_s \mathbf{A}_s) \end{aligned} \quad (5.42)$$

式中, \mathbf{s} 为单位向量. 根据附录 C, 上式可进一步简化为

$$\text{tr}(\mathbf{A}_s \mathbf{R}) = -2 \sin \theta \quad (5.43)$$

上式即为矩阵 $\mathbf{A}_s \mathbf{R}$ 的迹. 据此, 由 $\mathbf{A}_s \mathbf{R}$ 的迹可以得到 $\sin \theta$, 而由式 (4.17) 所示的 \mathbf{R} 的迹可以得到 $\cos \theta$. 从而, 通过 atan2 函数, 可在 $[-\pi, \pi]$ 范围内求出旋转角的唯一值. 因此, 采用 atan2 函数, 式 (4.17) 与式 (5.43) 的矩阵迹可用来构造求取旋转角的公式, 为

$$\theta = \text{atan2}(-0.5 \text{tr}(\mathbf{A}_s \mathbf{R}), 0.5(\text{tr} \mathbf{R} - 1)) \quad (5.44)$$

5.3.2 轴向平移的迹

为进一步获得其他有限位移旋量矩阵的迹, 可以将式 (5.27) 中平移矩阵 \mathbf{A} 与反对称旋量轴线矩阵 \mathbf{A}_s 相乘, 其迹为

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{A}_s) &= \text{tr}([\mathbf{r}_e \times] + \iota \mathbf{A}_s) \mathbf{A}_s \\ &= \text{tr}([\mathbf{r}_e \times] \mathbf{A}_s) + \iota \text{tr}(\mathbf{A}_s \mathbf{A}_s) \end{aligned} \quad (5.45)$$

式中的 \mathbf{r}_e 位于与旋转轴线 \mathbf{s} 正交的旋转平面内, 如图 5.1 所示. 根据附录 C, 有下式成立:

$$\text{tr}([\mathbf{r}_e \times] \mathbf{A}_s) = -2 \mathbf{r}_e \cdot \mathbf{s} = 0 \quad (5.46)$$

由此, 式 (5.45) 右边第一项为零. 再根据附录 C, 可求得第二项为

$$\text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{A}_s) = \iota \text{tr}(\mathbf{A}_s \mathbf{A}_s) = -2 \iota \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = -2 \iota \quad (5.47)$$

式 (5.43) 与式 (5.47) 是两个有关有限位移旋量矩阵的迹. 其中, 前者可以与 $\text{tr}(\mathbf{R})$ 结合, 通过构造 atan2 函数识别旋转角; 后者则用来求轴向平移分量的模长.

下文继续讨论有关有限位移旋量矩阵的迹. 旋量矩阵副部的迹可通过式 (4.22) 给出的 Rodrigues 公式求得, 即

$$\begin{aligned}\text{tr}(\mathbf{AR}) &= \text{tr}([\mathbf{r}_e \times] + \iota \mathbf{A}_s) \mathbf{R} \\ &= \text{tr}([\mathbf{r}_e \times] \mathbf{R}) + \iota \text{tr}(\mathbf{A}_s \mathbf{R})\end{aligned}\quad (5.48)$$

将 Rodrigues 公式代入上式, 并参考附录 C, 可知上式右边第一项为零. 因此, 上式可转化为

$$\text{tr}(\mathbf{AR}) = \iota \text{tr}(\mathbf{A}_s + \sin \theta \mathbf{A}_s \mathbf{A}_s + (1 - \cos \theta) \mathbf{A}_s \mathbf{A}_s \mathbf{A}_s) \quad (5.49)$$

考虑到旋转轴线 \mathbf{s} 为单位向量, 根据附录 B 和 C, 上式可进一步简化为

$$\text{tr}(\mathbf{AR}) = \iota \sin \theta \text{tr}(\mathbf{A}_s \mathbf{A}_s) = -2\iota \sin \theta \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = -2\iota \sin \theta \quad (5.50)$$

式 (5.50) 根据旋量矩阵的 Chasles 分解推导而来, 同 Samuel 等推演的迹的结果一致 (Samuel、McAree 和 Hunt, 1991). 不难看出, 采用矩阵 Chasles 分解的方法求旋量矩阵的迹更为简洁.

5.4 有限位移旋量表示论

有限位移旋量可以从有限位移旋量矩阵获得. 刚体的位姿可通过刚体上一系列相互独立的直线即线矢量描述. 任意两位姿之间的刚体运动均可通过式 (5.3) 所示的 6×6 有限位移旋量矩阵 \mathbf{N} 作用于刚体上的一系列直线完成. 其中, 旋量矩阵 \mathbf{N} 中的矩阵 \mathbf{A} 由式 (5.27) 给定, 矩阵 \mathbf{A} 是反对称矩阵, 包括由旋转作用引起的与旋转轴线垂直的等效平移和沿旋转轴线的平移两部分.

5.4.1 有限位移旋量矩阵的特征旋量

根据矩阵 \mathbf{N} 的特征方程容易得出, 式 (5.3) 所示的 6×6 有限位移旋量矩阵的特征值与 3×3 旋转矩阵的特征值相同, 但有如下的重根:

$$\{1, e^{+j\theta}, e^{-j\theta}\}, \{1, e^{+j\theta}, e^{-j\theta}\} \quad (5.51)$$

与唯一实特征值 $\lambda = 1$ 对应的特征旋量可由 $\mathbf{N} - \mathbf{N}^{-1}$ 得到, 即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{t_0} & \mathbf{A}_t \end{bmatrix} = \mathbf{N} - \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} - \mathbf{R}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\mathbf{R} - \mathbf{R}^T\mathbf{A}^T & \mathbf{R} - \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

式中, \mathbf{A}_t 是由向量 \mathbf{t} 的分量构造而成的反对称矩阵, 为

$$\mathbf{A}_t = [\mathbf{t}\times]$$

\mathbf{A}_{t_0} 则是由向量 \mathbf{t}_0 的分量构造而成的反对称矩阵, 即

$$\mathbf{A}_{t_0} = [\mathbf{t}_0\times]$$

据此, 可得到矩阵 \mathbf{N} 的特征旋量的主部, 由旋转轴线以及旋转角构成, 为

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{R} - \mathbf{R}^T = 2 \sin \theta \mathbf{A}_s$$

特征旋量的副部可表示为

$$\mathbf{A}_{t_0} = \mathbf{A}\mathbf{R} - \mathbf{R}^T\mathbf{A}^T \quad (5.53)$$

研究表明, 有限位移旋量与各向同性的特征旋量是一致的 (Samuel、McAree 和 Hunt, 1991).

5.4.2 有限位移旋量表示法

1. 纯旋转的有限位移旋量表示

对于轴向平移为零的有限位移旋量, 矩阵 \mathbf{A} 可简化为等效平移矩阵 \mathbf{A}_e 并可以被式 (5.20) 取代. 根据反对称矩阵的性质, 式 (5.53) 右边可改写为

$$\mathbf{A}_{t_0} = \mathbf{A}_r(\mathbf{R} - \mathbf{R}^T) + (\mathbf{R}^T - \mathbf{R})\mathbf{A}_r \quad (5.54)$$

由式 (5.52), 并考虑附录 A 给出的反对称矩阵的性质, 上式可写为

$$\mathbf{A}_{t_0} = \mathbf{A}_r\mathbf{A}_t - (\mathbf{A}_r\mathbf{A}_t)^T = [(\mathbf{r} \times \mathbf{t})\times] \quad (5.55)$$

将上一节所示的 $\mathbf{t} = 2 \sin \theta \mathbf{s}$ 代入上式, 得

$$\mathbf{A}_{t_0} = 2 \sin \theta [(\mathbf{r} \times \mathbf{s})\times] \quad (5.56)$$

因此, 对式 (5.52) 和式 (5.55) 进行归一化后, 可得特征旋量为

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{t}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{s} \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

上式给出了有限位移旋量, 表示为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{s}_0 - h\mathbf{s} \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

此形式同 Samuel 等 (1991) 的推导结果一致. 上式给出的有限位移旋量包含了描述整周运动的连续群的全部信息. 从上式也可以看出, 特征旋量由轴线 \mathbf{s} 和位置向量 \mathbf{r} 构成, 并具有一般旋量的形式.

2. 具有轴线平移的有限位移旋量表示

进一步考虑轴向平移不为零的有限位移旋量矩阵. 如式 (5.26) 所示, 一般平移矩阵由两部分构成, 将式 (5.26) 代入式 (5.53) 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{t0} &= \mathbf{A}_r(\mathbf{R} - \mathbf{R}^T) + (\mathbf{R}^T - \mathbf{R})\mathbf{A}_r + \iota(\mathbf{A}_s\mathbf{R} - (\mathbf{A}_s\mathbf{R})^T) \\ &= 2 \sin \theta [[\mathbf{r} \times \mathbf{s}] \times] + \iota(\mathbf{A}_s\mathbf{R} - (\mathbf{A}_s\mathbf{R})^T) \end{aligned} \quad (5.59)$$

上式右边第一项与式 (5.56) 的右边相同, 为轴向平移为零时的特征旋量的副部; 上式右边第二项即为轴向平移作用的结果, 根据附录 D2, 可简化为

$$\begin{aligned} &\iota(\mathbf{A}_s\mathbf{R} - (\mathbf{A}_s\mathbf{R})^T) \\ &= \frac{\iota}{2 \sin \theta} ((\mathbf{R} - \mathbf{R}^T)\mathbf{R} - ((\mathbf{R} - \mathbf{R}^T)\mathbf{R})^T) \\ &= \frac{\iota}{2 \sin \theta} (\mathbf{R}^2 - \mathbf{R}^{2T}) = 2\iota \cos \theta \mathbf{A}_s \end{aligned} \quad (5.60)$$

因此, 可由式 (5.57) 和式 (5.59) 及式 (5.60) 推导出 Chasles 运动的有限位移旋量轴线, 为

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{s} + \frac{\iota}{\tan \theta} \mathbf{s} \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

5.4.3 有限位移旋量姿态平移表示法

刚体的位移可用有限位移旋量 \mathbf{Y} 构成的两个三元组的六个参量来描述. 前三个参量为主部, 表示旋转角 θ 的大小和有效轴线 \mathbf{s} 的姿态; 后三个

参量为副部, 表示初始状态时刚体上与原点重合的点的线位移, 如图 5.2 所示. 这一有限位移旋量表示为 (Dai、Holland 和 Kerr, 1995)

$$Y = \begin{pmatrix} \theta s \\ (I - R)r + ls \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

式中, θ 为关于轴线 s 旋转的角度.

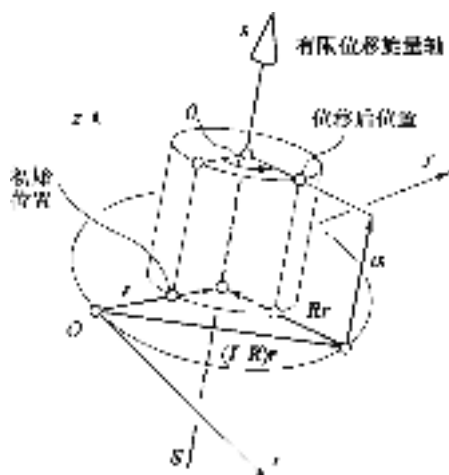


图 5.2 刚体的有限位移旋量

5.5 有限位移旋量的组合运算

有限位移旋量的组合运算需要运用群的运算. 在矩阵群中, 这种运算按矩阵运算规则进行, 可以利用前几节所示的有限位移旋量与矩阵的映射关联关系. 因此有限位移旋量的旋量表示与姿态平移表示可以利用旋量三角形法则, 或者利用这种矩阵群映射的运算进行. 虽然本节的组合运算基于姿态平移表示法, 但该过程适用于所有旋量表示法.

在串联机器人中, 各铰链运动副引起的末端执行器的运动可用一系列有序的有限位移旋量的运算表示. 其顺序为, 从串联运动链的最后一个铰链运动副起, 从后向前顺次考虑, 直到基础铰链运动副. 经过上述过程, 可以得到描述末端执行器当前位姿的有限位移旋量, 其中, 当前位姿是相对基准位姿而言的. 该过程称为运动组合, 其逆过程称为运动分解. 有限位移旋量 Y_2 作用后, 再施加 Y_1 的作用, 得到的有限位移旋量有序组合可表示为

$$Y = Y_1 \circ Y_2 \quad (5.63)$$

式中, “ \circ ” 表示两个有限位移旋量的有序组合. 通过 5.4 节, 上述有限位移旋量可映射为矩阵, 由此上式可表示为矩阵表达形式, 为

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 \quad (5.64)$$

式中, \mathbf{N}_1 和 \mathbf{N}_2 为式 (5.3) 所示的 6×6 旋量矩阵, 分别描述与末端执行器相邻的第一个铰链运动副和第二个铰链运动副相对于前一杆件的有限运动. 需注意, 由 \mathbf{N} 描述的矩阵的同样的结构形式能够实现转动副 (R)、移动副 (P) 以及任意形式的螺旋副 (H) 的运动. 机器人各铰链运动副变量为零时所处的位姿称为初始位姿, 通常以初始位姿为参考可以给出描述机器人末端执行器的有限位移旋量. 然而, 初始位姿只与人为设定的铰链运动副变量的零点有关, 与机械结构无关. 因此, 参考位姿的选取较为灵活, 甚至末端执行器不能到达的位姿, 也可以作为参考位姿. 对于图 5.3 由转动副构成的两铰链运动副平面机器人, 应灵活选取参考位姿使运算与其表述更为简便. 该参考位姿为, 末端执行器的参考点 E 选在坐标原点, 姿态为沿 Ox 轴线方向. 可以看到, 在该参考位姿下, 末端执行器运动的有限位移旋量的副部与参考点 E 的位置向量等价. 由此, 可以描述两个从不同参照位姿引出的映射空间的关系. 相对于初始位姿的有限位移旋量可用 6×6 矩阵 \mathbf{N} 描述. 对 \mathbf{N} 右乘平移变换矩阵 \mathbf{N}_t , 可得

$$\mathbf{N}_o = \mathbf{N} \mathbf{N}_t \quad (5.65)$$

式中, \mathbf{N} 为相对初始位姿的变换; \mathbf{N}_o 为相对原点参考位姿的变换. 上述三个矩阵都可以在图 5.3 表示, 平移变换矩阵 \mathbf{N}_t 完成 x 轴线平移, 复合旋转矩阵 \mathbf{N} 完成姿态变化, 旋转—平移组合矩阵 \mathbf{N}_o 完成全部机构的位姿变化.

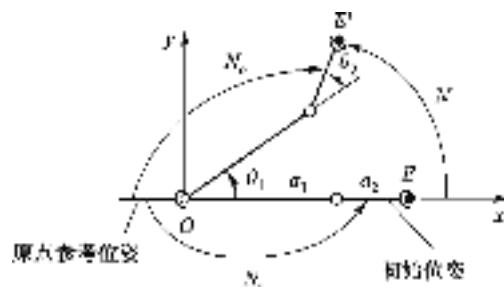


图 5.3 有限位移旋量矩阵与串联机器人位移的关系

将运动前与原点重合的点按向量 t 作平移, 可得到平移矩阵 N_t , 其中, 向量 t 为关节变量为零时机构全部杆件对应的向量的和. 因此, 有

$$N_t = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_t & I \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

式中, \mathbf{A}_t 为反对称矩阵, 由向量 $t = a_1 + a_2$ 的分量构成. 因此, 式 (5.65) 所示的组合矩阵可写为

$$\begin{aligned} N_o = NN_t &= \begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ (\mathbf{A}_r - R\mathbf{A}_rR^T)R & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_t & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ (\mathbf{A}_r - R\mathbf{A}_rR^T)R + R\mathbf{A}_t & R \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R & \mathbf{0} \\ (\mathbf{A}_r - R\mathbf{A}_rR^T + R\mathbf{A}_tR^T)R & R \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.67)$$

由式中的矩阵 N_o , 可得出基于原点参考位姿的有限位移旋量表示 Y_o , 为

$$Y_o = \begin{pmatrix} \theta s \\ (\mathbf{I} - R)r + Rt \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

有限位移旋量的主部与式 (5.62) 所示的相对初始位姿的有限位移旋量相同. 在有限运动旋量副部加上旋转后的向量 t , 可得末端执行器的位姿向量, 如图 5.3 所示. 因此, 随着向量 t 的改变, 有限位移旋量副部给出的位置向量可以描述杆件上的任意点.

应该注意到, 有限位移旋量的映射空间是齐次空间或拓扑空间, 而非线性向量空间. 所有有限位移旋量的运算均要通过矩阵群进行.

定义 5.10 在李群理论中, 齐次空间是非空流形, 也是群 G 连续性地与传递性地作用的拓扑空间 X , 该非空集 X 也称 G 空间.

5.6 李群表示论与有限位移螺旋运动

通过上节分析可知, 有限位移旋量与李群 $SE(3)$ 的有限位移旋量矩阵的特征旋量具有一致性. 旋量矩阵的特征旋量包含了“连续运动”的全部参数. 有限位移旋量是李群的六维向量表示. 李群也可用四元数或矩阵形式表示, 其主部为式 (4.34) 所示的 Rodrigues 向量.

5.6.1 李群表示

3.9 节给出了李代数表示的向量形式与矩阵表示形式. 与之类似, 李群表示也具有向量形式和矩阵形式.

1. 向量形式

在向量形式中, 一般采用单位四元数作为特殊正交群 $SO(3)$ 的表示, 采用有限位移旋量作为特殊欧氏群 $SE(3)$ 的表示 (见 5.4 节). 单位四元数与有限位移旋量包含了“连续运动”的全部参量, 从而保证了对整个运动过程的完整描述.

2. 矩阵表示

定义 5.11 对有限群的任意元素, 存在可逆运算元 $D(g)$, 以完成对向量空间 \mathbb{R}^n 的同构映射

$$D(g) : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$$

其中 $D(g)$ 可以由 $n \times n$ 矩阵描述. 由此, 产生李群的矩阵表示.

在矩阵形式中, 李群的表示即为群的伴随表示. 一般情况下, $SO(3)$ 的伴随表示为 3×3 正交矩阵, $SE(3)$ 的标准表示和伴随表示则有三种形式: 分别为式 (5.1) 所示的 3×3 对偶正交矩阵, 式 (4.7) 所示的 4×4 仿射变换矩阵或齐次变换矩阵的标准表示以及式 (5.3) 所示的 6×6 伴随矩阵. $SO(3)$ 的伴随表示及 $SO(3)$ 的矩阵群可用来描述刚体相对于初始状态的姿态, 同时向量空间 \mathbb{R}^3 上的平移群 $T(3)$ 可用来描述刚体相对于初始状态的位置.

5.6.2 有限螺旋运动

有限位移旋量与旋量矩阵的特征旋量具有一致性, 包含了连续运动的全部参量. 其变换可用来生成一系列位移矩阵, 以描述刚体的有限螺旋运动.

有限位移旋量的轴线可由式 (5.61) 所示的有限位移旋量矩阵的特征旋量确定. 基于式 (5.61) 给出的旋量的轴线, 可以得到由有限螺旋运动引起的位移、旋转角 [见式 (5.44)] 和平移距离 [见式 (5.47)]. 式 (5.44) 和式 (5.47) 均与有限位移旋量矩阵的迹有关, 由旋量矩阵的分解推导而来, 也可从特征旋量得到. 总之, 有限位移旋量的轴线与特征旋量的轴线相同, 进而可通过有限位移旋量矩阵求得其参数. 反之亦成立, 有限位移旋量的指数映射可生成

有限螺旋运动; 即特征旋量的指数映射生成沿有限位移旋量轴线的有限螺旋运动.

5.7 李群运算及其对李代数 $se(3)$ 的伴随作用

5.7.1 李群运算与对自身的伴随作用

群运算一般通过矩阵运算进行. 有限位移旋量的运算遵循旋量三角形法则 (Bottema 和 Roth, 1979). 与矩阵运算相对应, 群运算还遵循合成法则与分解法则 (Dai、Holland 和 Kerr, 1995).

定义 5.12 若群 G 中存在元素 g 使得下式成立:

$$a = gb g^{-1} \quad (5.69)$$

称群 G 中元素 a 与 b 共轭.

注释 5.4 在线性代数中, 共轭即为矩阵的相似变换, 即

$$B = P^{-1}AP \quad (5.70)$$

两矩阵 A 与 B 相似表示不同基上的相同的线性变换, 其中 P 为变基矩阵.

定义 5.13 在李群中, 共轭运算为群的作用, 记为

$$geg^{-1} \quad (5.71)$$

式中, $e \in SE(3)$, $g \in SE(3)$. 共轭也可视为同态, 即

$$h_g(e_1)h_g(e_2) = ge_1g^{-1}ge_2g^{-1} = ge_1e_2g^{-1} = h_g(e_1e_2) \quad (5.72)$$

在线性代数中, 式 (5.71) 同于 5.2.1 节给出的相似变换. 对于有限位移旋量的四元数表示, 单位四元数是李群的平滑映射, 如式 (4.66).

5.7.2 基于有限位移旋量的李群对李代数伴随作用的共轭运算

3.9.4 节给出了李代数的矩阵表示, 此时, 李群对李代数的伴随作用可以共轭运算表示.

1. 共轭运算

李群作用于李代数相当于任意旋转和平移的作用. 当李代数采用 3.9 节给出的矩阵表示时, 李群对李代数的伴随作用可采用**共轭运算**表示为

$$\text{Ad}(g)\mathbf{U} = g(\text{ad}(\mathbf{S}))g^{-1} \quad (5.73)$$

式中, $\text{ad}(\mathbf{S}) = \mathbf{U} \in se(3)$, $\text{Ad}(g) \in SE(3)$, 且为 3.9 节式 (3.103) 所示的 $se(3)$ 的伴随表示 (此共轭运算在矩阵论中为相似变换). 无论李代数元素的形式是 4×4 标准表示形式还是 6×6 伴随表示形式, 上式均适用, 下面将给出详细介绍.

2. 李代数 4×4 矩阵表示的共轭运算

对于李代数的 4×4 标准矩阵表示, 共轭运算下的李群作用可写为

$$\mathbf{E}' = \mathbf{H}\mathbf{E}\mathbf{H}^{-1} \quad (5.74)$$

式中, \mathbf{H} 是式 (4.7) 给出的群元素的标准 4×4 矩阵表示, \mathbf{E} 是式 (3.101) 给出的李代数的 4×4 标准表示. 以 4×4 标准表示作为李代数元素的速度旋量, 经过以 4×4 标准表示的有限位移旋量的李群作用后, 生成新的李代数元素, 为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' = \mathbf{H}\mathbf{E}\mathbf{H}^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [s \times] & s_0 \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}[s \times] & \mathbf{R}s_0 \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{d} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}[s \times] \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}[s \times] \mathbf{R}^T \mathbf{d} + \mathbf{R}s_0 \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.75)$$

经过 5.2.1 节给出的相似变换, 上式可简化为

$$\mathbf{E}' = \mathbf{H}\mathbf{E}\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}s \times] & \mathbf{d} \times \mathbf{R}s + \mathbf{R}s_0 \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

若将 6×6 有限位移旋量矩阵作用于李代数速度旋量的向量形式, 如式 (5.4) 所示, 上式仍成立.

3. 李代数 6×6 伴随表示的共轭运算

定理 5.4 李群对李代数矩阵向量空间 6×6 元素的共轭运算等价于其对李代数六维向量形式元素的左作用.

证明 对于 3.9 节的式 (3.103) 所示的李代数的伴随表示, 李群对李代数元素 S 的 6×6 伴随表示 $U = \text{ad}(S)$ 的伴随作用可用以下形式表示:

$$\begin{aligned}
 \text{Ad}(N)\text{ad}(S) &= N\text{ad}(S)N^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{AR} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{s}\times] & \mathbf{0} \\ [\mathbf{s}_0\times] & [\mathbf{s}\times] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}^T\mathbf{A} & \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}[\mathbf{s}\times] & \mathbf{0} \\ \mathbf{AR}[\mathbf{s}\times] + \mathbf{R}[\mathbf{s}_0\times] & \mathbf{R}[\mathbf{s}\times] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}^T\mathbf{A} & \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}[\mathbf{s}\times]\mathbf{R}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{AR}[\mathbf{s}\times]\mathbf{R}^T - \mathbf{R}[\mathbf{s}\times]\mathbf{R}^T\mathbf{A} + \mathbf{R}[\mathbf{s}_0\times]\mathbf{R}^T & \mathbf{R}[\mathbf{s}\times]\mathbf{R}^T \end{bmatrix} \quad (5.77)
 \end{aligned}$$

由 5.2.1 节给出的相似变换以及式 (5.2), 矩阵的副部即上式分块矩阵中的非对角线矩阵可简化为

$$[\mathbf{d}\times][\mathbf{R}\mathbf{s}\times] - [\mathbf{R}\mathbf{s}\times][\mathbf{d}\times] + [\mathbf{R}\mathbf{s}_0\times] \quad (5.78)$$

根据附录 A, 上式可改写为

$$[[\mathbf{d}\times\mathbf{R}\mathbf{s}\times] + [\mathbf{R}\mathbf{s}_0\times]] \quad (5.79)$$

因此, 式 (5.77) 可写为

$$\text{Ad}(N)\text{ad}(S) = U' = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}\mathbf{s}\times] & \mathbf{0} \\ [[\mathbf{d}\times\mathbf{R}\mathbf{s}\times] + [\mathbf{R}\mathbf{s}_0\times]] & [\mathbf{R}\mathbf{s}\times] \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

上式与式 (5.4) 同构, 其变换后与有限位移旋量一致. 证毕.

推论 5.1 基于李代数 6×6 伴随表示的李群共轭运算结果与基于李代数 4×4 标准表示的李群共轭运算结果一致.

这可由式 (5.80) 与式 (5.76) 的同构证明.

推论 5.2 李群对李代数矩阵空间 3×3 元素的共轭运算等价于其对李代数三维向量形式元素的左作用.

4. 共轭运算与伴随作用的关系

由 5.2.1 节可知, 上述伴随作用的共轭运算具有下述性质:

$$NUN^{-1} = [N\mathbf{S}\times] \quad (5.81)$$

上式将李群对李代数元素的伴随表示 U 的共轭运算转化为李群对李代数元素的向量表示 S 的左作用. 这就引出了下面的 5.7.3 节.

5.7.3 对李代数 $se(3)$ 向量形式的左作用

3.9.3 节给出了李代数的六维向量形式. 对这种向量形式的李代数, 李群的伴随作用为左作用, 采用 6×6 伴随表示为

$$S' = \text{Ad}(N)S = NS \quad (5.82)$$

式中, 矩阵 N 由式 (5.5) 给定, 上式的运算结果为

$$S' = \begin{bmatrix} R & 0 \\ AR & R \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s \\ s_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rs \\ ARs + Rs_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Rs \\ d \times Rs + Rs_0 \end{pmatrix} \quad (5.83)$$

由于矩阵 A 如式 (5.2) 是由向量 d 的分量构成的反对称矩阵, 上式的结果与式 (5.76) 和式 (5.80) 给出的李群对李代数的矩阵表示的伴随作用结果一致.

注释 5.5 李群作用随着李代数表示形式不同而不同, 其运算方法也不同. 当李代数元素采用纯四元数形式时, 李群作用采用李群的单位四元数形式作共轭运算; 当李代数元素采用矩阵表示时, 李群作用采用矩阵李群作共轭运算, 类似于线性代数中的相似变换; 当李代数元素采用向量形式时, 李群作用采用对李代数元素的左作用运算, 即矩阵李群左乘运算. 但不同形式的李群对李代数作用的结果是一致的.

5.8 有限位移旋量矩阵的微分与李代数 $se(3)$ 的瞬时旋量

5.8.1 有限位移旋量矩阵的微分

从 5.3 节与 5.4 节可知, 式 (5.3) 所示李群 $SE(3)$ 的有限位移旋量矩阵可通过特征旋量和迹映射为式 (5.61) 所示的 Chasles 运动的轴线, 其微分为无穷小位移旋量, 也称瞬时旋量.

将有限位移旋量矩阵对时间求导数, 得

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(\Delta t + t) - N(t)}{\Delta t} \quad (5.84)$$

上式可改写为

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(\Delta\theta + \Delta t) - I}{\Delta t} N(t) \quad (5.85)$$

写成矩阵形式为

$$N(\Delta\theta + \Delta\iota) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\Delta\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}(\Delta\mathbf{r} + \Delta\iota)\mathbf{R}(\Delta\theta) & \mathbf{R}(\Delta\theta) \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

由式 (5.29), 有限位移旋量矩阵的副部可表示为

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}(\Delta\mathbf{r} + \Delta\iota)\mathbf{R}(\Delta\theta) \\ &= \mathbf{A}_r(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})\mathbf{R}(\Delta\theta) - \mathbf{R}(\Delta\theta)\mathbf{A}_r(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) + \mathbf{A}_s(\Delta\iota)\mathbf{R}(\Delta\theta) \end{aligned} \quad (5.87)$$

式中

$$\mathbf{A}_r(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 0 & -r_z - \Delta r_z & r_y + \Delta r_y \\ r_z + \Delta r_z & 0 & -r_x - \Delta r_x \\ -r_y - \Delta r_y & r_x + \Delta r_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

当考虑无穷小位移时, 有 $\Delta\theta \rightarrow 0$, 则 $\sin \Delta\theta = \Delta\theta$, $\cos \Delta\theta = 1$. 进而由式 (4.22) 所示的 Rodrigues 公式, 用式 (4.6) 中的 \mathbf{A}_s 表示轴线的旋转矩阵可以给出

$$\mathbf{R}(\Delta\theta) = \mathbf{I} + \Delta\theta\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} 1 & -n\Delta\theta & m\Delta\theta \\ n\Delta\theta & 1 & -l\Delta\theta \\ -m\Delta\theta & l\Delta\theta & 1 \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

将式 (5.88) 与式 (5.89) 所示的两个矩阵代入式 (5.87) 右边的前两项, 并且忽略二阶无穷小项, 得

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_r(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})\mathbf{R}(\Delta\theta) - \mathbf{R}(\Delta\theta)\mathbf{A}_r(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & (r_y l - r_x m)\Delta\theta & (r_z l - r_x n)\Delta\theta \\ (r_x m - r_y l)\Delta\theta & 0 & (r_z m - r_y n)\Delta\theta \\ (r_x n - r_z l)\Delta\theta & (r_y n - r_z m)\Delta\theta & 0 \end{bmatrix} \\ &= \Delta\theta[[\mathbf{r} \times \mathbf{s}] \times] \end{aligned} \quad (5.90)$$

对式 (5.87) 右边第三项的轴向平移取微分, 可得

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_s(\Delta\iota)\mathbf{R}(\Delta\theta) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -n\Delta\iota & m\Delta\iota \\ n\Delta\iota & 0 & -l\Delta\iota \\ -m\Delta\iota & l\Delta\iota & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -n\Delta\theta & m\Delta\theta \\ n\Delta\theta & 1 & -l\Delta\theta \\ -m\Delta\theta & l\Delta\theta & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.91)$$

忽略二阶无穷小项, 则

$$\mathbf{A}_i(\Delta t)\mathbf{R}(\Delta\theta) = \begin{bmatrix} 0 & -n\Delta t & m\Delta t \\ n\Delta t & 0 & -l\Delta t \\ -m\Delta t & l\Delta t & 0 \end{bmatrix} = \Delta t\mathbf{A}_s \quad (5.92)$$

因此, 式 (5.87) 可写为

$$\mathbf{A}(\Delta\mathbf{r} + \Delta t)\mathbf{R}(\Delta\theta) = \Delta\theta[[\mathbf{r} \times \mathbf{s}] \times] + \Delta t\mathbf{A}_s \quad (5.93)$$

将上式及式 (5.89) 代入式 (5.86), 即得增量值, 再将其代入式 (5.85) 得

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{N}}{dt} &= \begin{bmatrix} \dot{\theta}\mathbf{A}_s & \mathbf{0} \\ \dot{\theta}[[\mathbf{r} \times \mathbf{s}] \times] + i\mathbf{A}_s & \dot{\theta}\mathbf{A}_s \end{bmatrix} \mathbf{N} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \times & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega}_0 \times & \boldsymbol{\omega} \times \end{bmatrix} \mathbf{N} \end{aligned} \quad (5.94)$$

式中, $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{s}$, $\boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\theta}\mathbf{r} \times \mathbf{s} + i\mathbf{s}$. 至此, 可以得到有限位移旋量矩阵的微分, 即无穷小位移旋量或瞬时旋量, 为

$$\mathbf{T} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{r} \times \mathbf{s} + \frac{i}{\dot{\theta}}\mathbf{s} \end{pmatrix} = \frac{d\mathbf{N}}{dt}\mathbf{N}^{-1} \quad (5.95)$$

上式为与特殊欧氏群 $SE(3)$ 上的轨迹相切的瞬时旋量.

注释 5.6 瞬时旋量是射影李代数 $se(3)$ 的元素, 可表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \times & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega}_0 \times & \boldsymbol{\omega} \times \end{bmatrix} = \frac{d\mathbf{N}}{dt}\mathbf{N}^{-1} \quad (5.96)$$

瞬时旋量携带速度幅值, 即成为速度旋量, 可用于研究机构与机器人运动. 对于具有两个活动度的串联机器人, 速度旋量可用有序组合的位移旋量的导数表示, 即为

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{d(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)}{dt}(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2)^{-1} \\ &= \left(\frac{d\mathbf{N}_1}{dt}\right)\mathbf{N}_2\mathbf{N}_2^{-1}\mathbf{N}_1^{-1} + \mathbf{N}_1\left(\frac{d\mathbf{N}_2}{dt}\right)\mathbf{N}_2^{-1}\mathbf{N}_1^{-1} \\ &= \left(\frac{d\mathbf{N}_1}{dt}\right)\mathbf{N}_1^{-1} + \mathbf{N}_1\left(\frac{d\mathbf{N}_2}{dt}\right)\mathbf{N}_2^{-1}\mathbf{N}_1^{-1} \\ &= \mathbf{S}_1 + \mathbf{N}_1\bar{\mathbf{N}}_2\mathbf{N}_1^{-1} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \end{aligned} \quad (5.97)$$

上述可推广至多活动度串联机械臂的研究, 即

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= \frac{d(\mathbf{N}_1 \cdots \mathbf{N}_n)}{dt} (\mathbf{N}_1 \cdots \mathbf{N}_n)^{-1} \\
 &= \left(\frac{d\mathbf{N}_1}{dt} \right) \cdots \mathbf{N}_n \mathbf{N}_n^{-1} \cdots \mathbf{N}_1^{-1} + \cdots + \mathbf{N}_1 \cdots \left(\frac{d\mathbf{N}_n}{dt} \right) \mathbf{N}_n^{-1} \cdots \mathbf{N}_1^{-1} \\
 &= \left(\frac{d\mathbf{N}_1}{dt} \right) \mathbf{N}_1 + \cdots + \mathbf{N}_1 \cdots \mathbf{N}_n \left(\frac{d\mathbf{N}_n}{dt} \right) \mathbf{N}_n^{-1} \mathbf{N}_n^{-1} \cdots \mathbf{N}_1^{-1} \\
 &= \mathbf{S}_1 + \cdots + \mathbf{N}_1 \cdots \mathbf{N}_n \bar{\mathbf{N}}_n \mathbf{N}_n^{-1} \cdots \mathbf{N}_1^{-1} = \mathbf{S}_1 + \cdots + \mathbf{S}_n \quad (5.98)
 \end{aligned}$$

5.8.2 se(3) 到 SE(3) 的指数映射

对应于 4.4.3 节, 本节给出了 se(3) 到 SE(3) 的指数映射. 采用式 (3.101) 李代数 4×4 标准矩阵表示, 其指数映射为

$$e^{\theta \mathbf{E}} = e^{\begin{bmatrix} \theta \mathbf{A}_s & \theta \mathbf{s}_0 \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{\theta \mathbf{A}_s} & \mathbf{V} \mathbf{s}_0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

式中

$$e^{\theta \mathbf{A}_s} = \mathbf{I} + \sin \theta \mathbf{A}_s + (1 - \cos \theta) \mathbf{A}_s^2 \quad (5.100)$$

$$\mathbf{V} = \theta \mathbf{I} + (1 - \cos \theta) \mathbf{A}_s + (\theta - \sin \theta) \mathbf{A}_s^2 \quad (5.101)$$

式 (5.100) 给出了第四章的 Rodrigues 公式. 李代数元素的指数映射给出了相应的李群的矩阵表示. 当一般运动为纯平移时, 式 (5.99) 为

$$e^{\theta \mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \theta \mathbf{s}_0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (5.102)$$

注释 5.7 在矩阵指数的运算中, 传统的指数加法规律只在满足下述条件下成立:

$$e^{\mathbf{E}_1} e^{\mathbf{E}_2} = e^{\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2}, \text{ 当且仅当 } [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2] = 0 \quad (5.103)$$

式中, $[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2]$ 为 3.10 节定义的李括号. 通过指数映射以及式 (5.97) 所示的串联机构的速度旋量可推导出两活动度机械臂的末端位移, 为

$$\mathbf{N} = e^{\theta_1 \mathbf{E}_1} e^{\theta_2 \mathbf{E}_2} \quad (5.104)$$

对于多活动度串联机构, 则有

$$\mathbf{N} = e^{\theta_1 \mathbf{E}_1} e^{\theta_2 \mathbf{E}_2} \cdots e^{\theta_n \mathbf{E}_n} \quad (5.105)$$

5.9 有限位移旋量表示的 Chasles 运动分解

下面通过实例验证本章前面内容给出的定理与公式. 该实例先给出式 (5.15) 中的纯旋转矩阵与平移矩阵的实现过程; 然后通过有限位移旋量矩阵的分解, 用 Chasles 运动阐述李群作用. 分解中第一部分表示绕任意旋量轴线的纯转动以及轴线偏离原点的影响; 分解中第二部分是平移矩阵, 表示沿轴向的平移.

本实例第一部分通过式 (5.3) 所示的常用 6×6 有限位移旋量矩阵给定一个运动. 该运算的实际意义如式 (5.15) 所示, 表示绕过原点的轴线的旋转以及沿轴线方向的平移. 由此, 实例的第一部分给出有限位移旋量矩阵 N , 并且施加位移算子 A 得到了刚体最终到达的位置.

本实例的第二部分从矩阵算子中导出有限位移旋量的几何量, 包括旋转轴线的方向和位置、旋转角及轴向平移量. 第三部分阐述基于 Chasles 运动的矩阵分解及刚体的 Chasles 运动. 矩阵分解将平移分成两部分, 即旋转轴线 s 偏离原点引起的等效平移和 Chasles 平移. 该部分采用分解得到的有限位移旋量的几何量以执行 Chasles 运动, 并用分解后按照 Chasles 运动组装的矩阵实现刚体位移, 从而得到刚体的最终位姿, 与本实例第一部分采用常规矩阵运算得到的最终位姿相同.

5.9.1 实现刚体位移的伴随作用

例 5.3 给定刚体上的某一直线为

$$\mathbf{L} = (0.707, 0.500, 0.500, 0.500, -1.000, 0.293)^T \quad (5.106)$$

在本节中, 刚体的一般运动分为两个步骤完成, 即绕旋转作用轴线的旋转和该轴线方向的平移. 本实例中, 给定刚体旋转角为 80° , 绕下述过原点的旋转轴线 s 运动:

$$\mathbf{s} = (-0.129, 0.224, 0.966)^T \quad (5.107)$$

旋转运动之后, 刚体沿平移向量 \mathbf{d} 进行平移

$$\mathbf{d} = (1.723, -0.030, 0.756)^T \quad (5.108)$$

上述过程可用式 (5.15) 所示算子表示为

$$\text{Ad}(g) = \mathbf{N} = \mathbf{N}_t \mathbf{N}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{AR} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (5.109)$$

式中, \mathbf{R} 由式 (4.22) 所示的 Rodrigues 公式构造而来, 公式中轴线向量的反对称矩阵 \mathbf{A}_s 可根据式 (4.6) 计算得出, 为

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} 0 & -0.966 & 0.224 \\ 0.966 & 0 & 0.129 \\ -0.224 & -0.129 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.110)$$

由此, 旋转矩阵的计算结果为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.188 & -0.975 & 0.117 \\ 0.927 & 0.215 & 0.305 \\ -0.324 & 0.051 & 0.944 \end{bmatrix} \quad (5.111)$$

此为有限位移旋量矩阵的主部, 同时由式 (5.108), 可得式 (5.2) 所示的矩阵 \mathbf{A} 为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -0.756 & -0.030 \\ 0.756 & 0 & -1.723 \\ 0.030 & 1.723 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.112)$$

因此, 有限位移旋量矩阵的副部为

$$\mathbf{AR} = \begin{bmatrix} -0.691 & -0.164 & -0.259 \\ 0.700 & -0.825 & -1.538 \\ 1.603 & 0.341 & 0.529 \end{bmatrix} \quad (5.113)$$

将线矢量 \mathbf{L} 视为李代数 $se(3)$ 的元素, 李群 $SE(3)$ 对 $se(3)$ 的作用可表示为

$$\mathbf{L}'' = \text{Ad}(g)\mathbf{L} = \mathbf{NL} \quad (5.114)$$

刚体上的直线 \mathbf{L} 经过旋转矩阵 \mathbf{N}_R [见式 (5.109)] 作用后的结果为

$$\mathbf{L}' = (-0.296, 0.916, 0.269, 1.103, 0.338, 0.063)^T \quad (5.115)$$

经过平移矩阵 \mathbf{N}_t 作用后最终的位姿为

$$\mathbf{L}'' = (-0.296, 0.916, 0.269, 0.403, -0.349, 1.633)^T \quad (5.116)$$

5.9.2 有限位移旋量算子的几何量

下文实例承接实例 5.3, 将旋量矩阵算子映射为 Chasles 运动的有限位移旋量, 此处的 Chasles 运动包含绕有限位移旋量轴线的旋转和沿该轴线的平移. 由 5.4 节可知, 当旋量矩阵特征值 $\lambda = 1$ 时, 可得出其特征旋量, 进而生成 Chasles 运动的轴线.

例 5.4 由式 (5.111), 其特征旋量的主部为

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1.902 & 0.441 \\ 1.902 & 0 & 0.254 \\ -0.441 & -0.254 & 0 \end{bmatrix} = 2 \sin \theta [\mathbf{s} \times] \quad (5.117)$$

副部可由下式先获得一部分:

$$(\mathbf{A}\mathbf{R})^T = \begin{bmatrix} -0.691 & 0.700 & 1.603 \\ -0.164 & -0.825 & 0.341 \\ -0.259 & -1.538 & 0.529 \end{bmatrix} \quad (5.118)$$

由式 (5.53) 与式 (5.56) 得到副部为

$$\mathbf{A}\mathbf{R} - (\mathbf{A}\mathbf{R})^T = \begin{bmatrix} 0 & -0.864 & -1.863 \\ 0.864 & 0 & -1.880 \\ 1.863 & 1.880 & 0 \end{bmatrix} = 2 \sin \theta [\mathbf{s}_0 \times] \quad (5.119)$$

由此, Chasles 运动的特征旋量为

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{2 \sin \theta} (-0.254, 0.441, 1.902, 1.879, -1.862, 0.864)^T \\ &= (-0.129, 0.224, 0.966, 0.955, -0.946, 0.439)^T \end{aligned} \quad (5.120)$$

上式所示结果中, 前三个分量构成的向量表示有限位移旋量的轴线. 同时由式 (2.13), 该轴线的正交位置向量为

$$\mathbf{r}_0 = (1.012, 0.979, -0.092)^T \quad (5.121)$$

上式表明, 有限位移旋量的轴线由位置向量 r_0 给定, 偏离原点. 由式 (4.17), 旋转角为 $\theta = 80^\circ$. 由旋量矩阵副部的迹可推导出轴向平移的模长, 如式 (5.50) 所示, 即

$$\iota = \frac{\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{R})}{-2 \sin \theta} = \frac{-0.985}{-2 \sin \theta} = 0.5 \quad (5.122)$$

由此, 5.9.1 节给出的刚体的位移可映射为 Chasles 运动的有限位移旋量, 其轴线由式 (5.120) 给出, 轴线对应的正交位置向量由式 (5.121) 给出, 旋转角 θ 为 80° , 轴向平移分量模长为 $\iota = 0.5$.

5.9.3 有限位移旋量表示的 Chasles 运动执行过程

5.9.2 节内容通过 5.9.1 节给出的旋量矩阵的特征旋量构造了 Chasles 运动的有限位移旋量. 本节将在此基础上构建如式 (5.28) 所示的 Chasles 分解, 并用于执行对刚体上直线 L 的 Chasles 运动. 该运动包含绕偏离原点且位置向量为 \mathbf{r}_0 的有限位移旋量轴线 \mathbf{s} 的旋转和沿该轴线且模长为 ι 的平移.

若由式 (5.120) 给定有限位移旋量, 加之得出的 $\theta = 80^\circ$ 的旋转角, 以及式 (5.122) 给出的轴向平移分量模长 $\iota = 0.5$, 则可根据式 (5.28) 所示的有限位移旋量矩阵的 Chasles 分解得到分解后的基于 Chasles 运动的旋量矩阵. 由此, 式 (5.3) 的算子可分解为绕偏离原点且位置向量为 \mathbf{r}_0 的有限位移旋量轴线 \mathbf{s} 的旋转以及沿该轴线且模长为 ι 的平移 [见式 (5.28)].

Chasles 运动的第一步由式 (5.28) 所示的矩阵 \mathbf{N}_c 执行, 即将式 (5.106) 所示刚体上的线矢量 L 绕式 (5.120) 中的有限位移旋量轴线旋转. 其中, 矩阵 \mathbf{N}_c 中的矩阵 \mathbf{R} 由式 (4.22) 所示的 Rodrigues 公式得出, 计算结果如式 (5.111) 所示. Chasles 运动的第二步将在例 5.5 中给出.

例 5.5 例 5.1 给出的 Chasles 旋转中由于旋转轴线偏离原点引起的等效平移分量可由式 (5.23) 得出

$$\mathbf{r}_e = (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{r}_0 = (1.788, -0.142, 0.273)^T \quad (5.123)$$

因此, 式 (4.6) 所示的旋量轴线矩阵可由式 (5.120) 给出的有限位移旋量得出. 不难看出, 其结果与式 (5.110) 相同. 至此, Chasles 平移可由 $\iota\mathbf{A}_s$ 执行. 再考虑上述由旋转轴线偏离原点引起的等效平移, 由式 (5.27), 得

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [\mathbf{r}_e \times] + \iota\mathbf{A}_s \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -0.273 & -0.142 \\ 0.273 & 0 & -1.788 \\ 0.142 & 1.788 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0.483 & 0.112 \\ 0.483 & 0 & 0.065 \\ -0.112 & -0.065 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -0.756 & -0.030 \\ 0.756 & 0 & -1.723 \\ 0.030 & 1.723 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.124)$$

上述过程是 5.9.1 节内容的反向推导, 式 (5.124) 所示的结果与式 (5.112) 给出的平移矩阵 \mathbf{A} 相同, 进而证明了 5.2 节的矩阵分解的正确性.

例 5.6 将采用该 Chasles 运动分解后的矩阵, 展示 Chasles 运动的旋转和平移作用.

例 5.6 采用式 (5.28) 对 Chasles 分解得出的矩阵 \mathbf{N}_c 将 Chasles 旋转作用于刚体上的直线 \mathbf{L} , 将直线绕式 (5.120) 所示的偏离原点的旋量轴线旋转, 其旋量轴线的位置向量 \mathbf{r}_0 如式 (5.121) 所示, 结果为

$$\mathbf{L}' = (-0.296, 0.916, 0.269, 0.815, -0.223, 1.659)^T$$

尽管上式所示的结果与 5.9.1 节中式 (5.115) 使用两步分解法的结果的前三个分量相同, 但是其副部即后三个分量是不同的. 造成这种不同的原因在于上述 Chasles 运动的真实轴线偏离原点.

Chasles 运动作用的第二步是 Chasles 平移, 即将从 Chasles 分解得到式 (5.28) 的平移矩阵算子 \mathbf{N}_t 作用于旋转得到的直线 \mathbf{L}' , 得

$$\mathbf{L}'' = (-0.296, 0.916, 0.269, 0.403, -0.349, 1.633)^T$$

上述结果与式 (5.116) 所示的采用常规矩阵运算得出的结果相同. 由此, 采用 Chasles 分解与常规矩阵的运算等效. 尽管中间运算过程不同, 但对于刚体位移的最终结果是相同的. 这就证实了有限位移旋量矩阵及其 Chasles 分解的相关理论与规律的正确性, 阐明了其实际意义. 本节同时说明了如何用有限位移旋量来完成刚体位移, 并通过有限位移旋量算子施加并完成 Chasles 运动.

5.10 旋量代数、李群与李代数的关联论

在上面的分析中, 有限位移旋量具有与李群一致的向量表示, 可以用来描述刚体运动的全周运动, 其与瞬时旋量的关系由 5.8 节论述. 由第三章可知, 瞬时旋量是射影李代数的元素, 速度旋量是李代数的元素, 而力旋量是对偶李代数的元素.

5.10.1 旋量代数、李群与李代数、有限位移旋量、四元数代数的关联

定义 5.14 在抽象代数中, 代数结构是指包含集合以及对集合内元素具有封闭性的运算的代数系统, 其中集合可为群、环、域、格等. 在代数结构 (A, \circ) 与 $(B, \bar{\circ})$ 中, A 与 B 分别表示两代数结构的集合, “ \circ ” 为集合 A 上的二元运算, “ $\bar{\circ}$ ” 为集合 B 上的二元运算, 此二元运算满足结合律、交换律和分配律. 对于任意 $a, b \in A$, 若存在同态映射

$$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \bar{\circ} \varphi(b)$$

则映射 φ 使代数结构 (A, \circ) 对代数结构 $(B, \bar{\circ})$ 产生了同态映射. 此时称映射 φ 构造了一个从代数结构 (A, \circ) 到代数结构 $(B, \bar{\circ})$ 的**关联**, 也称代数结构 (A, \circ) 与代数结构 $(B, \bar{\circ})$ **关联**.

注释 5.8 向量空间或拓扑流形也为代数结构.

注释 5.9 若 φ 是单射同态, 称两代数结构为单同态关联; 若 φ 是满射同态, 称两代数结构为满同态关联; 若 φ 是双射同态, 称两代数结构为同构关联.

注释 5.10 在本书中, 旋量代数、李群、李代数、四元数代数等均可视为代数结构, 并且都具有同向量代数及其矩阵运算的**关联**.

注释 5.11 在第三章、第四章与本章中, 向量代数、旋量代数、李群、李代数、四元数代数等代数结构之间存在多个关联, 这些关联的同态映射一般通过李群与李代数表示论以及李群、李代数、四元数、对偶四元数的共轭作用、左作用或李括号实现, 也可通过向量空间之间的同构映射以及叉积与双线性型运算实现.

3.1 节、3.2 节与 3.3 节阐述了旋量的六维向量表示与对偶向量表示, 定义了旋量空间上具有封闭性的运算. 因此, 上述章节给出了旋量代数与向量代数同向量代数之间的**关联**.

3.9 节与 3.10 节提出了李代数的旋量形式 [如式 (3.2)]、向量形式以及矩阵表示 [如式 (3.101)], 并推导了李代数的左作用 [如式 (3.116)] 与李括号 [如式 (3.107)], 给出了等效定理及其证明. 因此该章节定义了李代数与旋量代数、向量代数之间的**关联**.

4.6 节与 4.7 节提出了李群的四元数表示 [如式 (4.63)]、对偶四元数表示 [如式 (4.81)] 以及李代数的纯四元数 [如式 (4.67)] 表示, 并推导证明出, 李群的四元数表示能够完成对李代数纯四元数表示的共轭作用 [如式 (4.68)], 并且同李群元素对向量空间元素的左作用 [如式 (4.71)] 等效. 因此, 该章节定义了李群、李代数以及四元数代数之间的关联.

5.2 节、5.6 节、5.7 节给出了李群的矩阵表示 [如式 (5.5)] 以及有限位移旋量 [如式 (5.61)] 表示, 推导了李群对自身的共轭作用 [如式 (5.71)] 以及对李代数矩阵表示与旋量形式的共轭作用 [如式 (5.75)] 与左作用 [如式 (5.82)], 并给出了等价定理 (推论 3.6、推论 5.1、推论 5.2) 及其证明. 因此, 该章节定义了李群、李代数以及旋量代数之间的关联.

5.10.2 李群、李代数与有限位移旋量、瞬时旋量关联图

李代数与李群的各种表示形式已在 3.9 节与 5.6 节给出, 它们与有限位移旋量及瞬时旋量的关系由本章给出. 图 1.1 给出了有限位移旋量与李群以及对应的瞬时旋量与李代数表示论的关联关系, 图 5.4 揭示了这些理论的关联关系以及对其阐述的章节.



图 5.4 李群、李代数与有限位移旋量、瞬时旋量关联图

图 5.4 中, 李群 $SE(3)$ 与有限位移旋量的关联关系见 5.4 节与 5.6 节, 有限位移旋量与瞬时旋量以及李群与李代数的关联关系见本章相关章节.

5.10.1 节以及图 5.4 给出下列关联论的定义.

定义 5.15 向量代数、旋量代数、李群、李代数、四元数代数等多种代数结构之间诸多关联涵盖的表示论、相关运算与作用及其推导、原理与证

明统称为旋量代数、李群与李代数、四元数代数的关联论,也可称为代数关联论.

5.10.3 有限位移旋量、瞬时旋量、李群及李代数发展史

以上小节提出的关联论可以在这些理论的历史发展中体现. 有限位移旋量、瞬时旋量、李群及李代数四大理论的发展历史见表 5.1.

表 5.1 有限位移旋量、瞬时旋量、李群及李代数的发展历史

	瞬时旋量	有限位移旋量	李群	李代数
1763	Mozzi 瞬轴 (3.4 节)			
1806	Poinsot 中心轴 (3.5 节)			
1830		Chasles 分解定理 [式 (5.28)]		
1840			Galois: 群论	
1845s		Rodrigues 参数 [式 (4.33)]		
		Rodrigues 公式 [式 (4.50)]		
		Hamilton 四元数 [式 (4.62)]		
		Cayley 旋转公式 [式 (4.57)]		
1860—1865	Cayley 直线坐标, Plücker 坐标			
1871—1872	Klein 互易旋量, Ball 互易旋量 [式 (3.11)]		Klein Erlangen 纲领	
1872—1873	Clifford 表格 (表 3.2)	Clifford 对偶四元数 [式 (4.81)]		
1871—1876	Ball 旋量理论			
1880	Killing 型 [(式 3.23)]			Killing 型
1888—1893			Lie 和 Engle: 李群	
1900	Ball 旋量理论的著作			
1901	Study 对偶角 [式 (3.24) 和式 (3.25)], 四元数群			
1902—1930			Weyli 黎曼群, 拓扑群	
1924	von Mises's 矩量运算			
1930s				Cartan 子代数
1946—1947	Brand 对偶向量与矩量代数 (见第三章)		Cherallay, 第一部关于李群与李代数的著作	
1958	Blaschke 旋量算子			
1948—1965	Dimentberg 复向量代数 (见第三章)			
1964	Yang 和 Freudeastein: 对偶四元数形式的旋量算子			

续表

	瞬时旋量	有限位移旋量	李群	李代数
1967		Roth: 旋量三角形		
1978	Hunt 旋量系		Hervé: 连杆机构李群理论	
1979	Bottema 和 Roth 理论: 运动学			
1984	Phillip: 一般螺旋运动			
1990	McCarthy 理论: 运动学介绍			
1994	Murry, Li 和 Sastry: 李群与刚体运动结合			
1996	Duffy: 平面机构运动学			
2004	Selig: 计算机科学与机器人学数学基础			

参考文献

- Altmann, S.L. (1986) *Rotations, Quaternions and Double Groups*, Clarendon Press, Oxford.
- Aspragathos, N.A. and Dimitros, J.K. (1998) A comparative study of three methods for robot kinematics, *IEEE Trans Syst Man Cybern B Cybern.*, **28**(2): 135-145.
- Ayres, F. (1974) *Theory and Problems of Matrices*, Schaum's Outline Series, McGraw Hill, NY.
- Baker, A. (2002) *Matrix Groups: An Introduction to Lie Group Theory*, Springer, London.
- Ball, R.S. (1900) *A Treatise on the Theory of Screws*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Bottema, O. and Roth, B. (1979) *Theoretical Kinematics*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, North-Holland, Amsterdam, Holland.
- Chasles, M. (1830) Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entr'eux et places d'une manière quelconque dans l'espace; et sur le déplacement fini ou infiniment petit d'un corps solide libre, *Bull. Sci. Mach.*, **14**: 321-326.
- Chen, C. (2010) Mobility analysis of parallel manipulators and pattern of transform matrix, *ASME J. Mech. Rob.*, **2**(4): 041003.
- Chirikjian, G.S. and Kyatkin, A.B. (2001) *Engineering Applications of Noncommutative Harmonic Analysis*, CRC Press, Florida.
- Chirikjian, G.S. (2011) *Stochastic Models, Information Theory, and Lie Groups, Volume 2: Analytic Methods and Modern Applications*, Birkhäuser, Boston.
- Coolidge, J.L. (1963) *A History of Geometrical Methods*, Oxford University Press, London.

- Dai, J.S. (1993) Chapter 3: New look at properties of screws and screw system, *Screw Image Space and Its Application to Robotic Grasping*, PhD Dissertation, University of Salford, Manchester.
- Dai, J.S., Akhtar, M. and Kerr, D.R. (1995), Modeling of orientation and dexterity, *EPSRC project report*, University of Salford, Manchester.
- Dai, J.S. (2006) A historical review of the theoretical development of rigid body displacements from rodrigues parameters to the finite twist, *Mech. Mach. Theory*, **41**(1): 41-52.
- Dai, J.S. (2012) Finite displacement screw operators with embedded Chasles' motion, *ASME J. Mech. Rob.*, **4**(4): 041002.
- Dai, J.S. (2014) *Screw Algebra and Kinematics Approaches for Mechanisms and Robotics*, Springer, London.
- Dai, J.S., Holland, N. and Kerr, D.R. (1995) Finite twist mapping and its application to planar serial manipulators with revolute joints, *J. Mec. Eng. Sci.*, **209**(C3): 263-271.
- Dai, J.S., Huang, Z. and Lipkin, H. (2006) Mobility of overconstrained parallel mechanisms, *ASME J. Mech. Des.*, **128**(1): 220-229.
- Denavit, J. and Hartenberg, R.S. (1955) A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices, *ASME J. Appl. Mech.*, **77**(2): 215-221.
- Dimentberg, F.M. (1948) A general method of investigation of finite displacements of three-dimensional mechanisms, and certain cases of passive couplings, *Trudi Semin. po. Teor. Mash. Mekh.*, **5**(17): 5-39.
- Dimentberg, F.M. (1965) *The Screw Calculus and its Applications to Mechanics*, Foreign Technology Division, Wright-Paterson Air Force Base, Ohio.
- Dimentberg, F.M. and Kislytsyn, S.G. (1960) Application of screw calculus to the analysis of three-dimensional mechanisms, *Trudy II Vsesoyuznogo soveshchaniya po problemam dinamiki mashin*.
- Gan, D., Dai, J.S. and Caldwell, D.G. (2011) Constraint-based limb synthesis and mobility-change aimed mechanism construction, *ASME J. Mech. Des.*, **133**(5): 051001.
- Gan, D., Dai, J.S. and Liao, Q.Z. (2010) Constraint analysis on mobility change of a novel metamorphic parallel mechanism, *Mech. Mach. Theory*, **45**(12): 1864-1876.
- Gilbert, W.J. (1976) *Modern Algebra with Applications*, John Wiley & Sons.
- Hervé, J.M. (1978) Analyse structurelle des mécanismes par groupe des déplacements (in French), *Mech. Mach. Theory*, **13**(4): 437-450.
- Huang, C., Kuo, W. and Ravani, B. (2010) On the regulus associated with the general displacement of a line and its application in determining displacementscrews, *ASME J. Mech. Rob.*, **2**(4): 041013-041018.

- Huang, C. and Roth, B. (1994) Analytic expressions for the finite screw systems, *Mech. Mach. Theory*, **29**(2): 207-222.
- Hunt, K.H. and Parkin, I.A. (1995) Finite displacements of points, planes, and lines via screw theory, *Mech. Mach. Theory*, **30**(2): 177-192.
- Lee, C.-C. and Hervé, J.M. (2011) Isoconstrained parallel generators of shoeflies motion, *ASME J. Mech. Rob.*, **3**(2): 021006.
- Lee, K., Wang, Y. and Chirikjian, G.S. (2007) $O(n)$ mass matrix inversion for serial manipulators and polypeptide chains using Lie derivatives. *Robotica*, **25**(06): 739-750.
- Liu, H., Huang, T. and Chetwynd, D.G. (2011) A general approach for geometric error modeling of lower mobility parallel manipulators, *ASME J. Mech. Rob.*, **3**(2): 021013.
- McCarthy, J.M. (1986) Dual orthogonal matrices in manipulator kinematics, *Int. J. Robot. Res.*, **5**(2): 45-51.
- McCarthy, J.M. (1990) *An Introduction to Theoretical Kinematics*, The MIT Press, London.
- Murray, R.M., Li, Z. and Sastry, S.S. (1994) *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press, New York.
- Müller, A. (2011) On the manifold property of the set of singularities of kinematic mappings: Modeling, classification and genericity, *ASME J. Mech. Rob.*, **3**(1): 011006.
- Müller, A. (2012) On the manifold property of the set of singularities of kinematic mappings: Genericity conditions, *ASME J. Mech. Rob.*, **4**(1): 011006.
- Müller, A. and Terze, Z. (2009) Lie group modeling and forward dynamics simulation of multibody systems, part 1: Topology and kinematics, *Trans. FAMENA*, **33**(2): 1-14.
- Parkin, I.A. (1997) Unifying the geometry of finite displacement screws and orthogonal matrix transformations, *Mech. Mach. Theory*, **32**(8): 975-991.
- Pennock, G.R. and Yang, A.T. (1985) Application of dual-number matrices to the inverse kinematics problem of robot manipulators, *ASME J. Mech.*, **107**(2): 201-208.
- Perez-Gracia, A. (2011) Synthesis of spatial RPRP closed linkage for a given screw system, *ASME J. Mech. Rob.*, **3**(2): 021009.
- Ravani, B. and Roth, B. (1984) Mappings of spatial kinematics, *ASME J. Mech. Trans. Auto. Design*, **106**(3): 341-347.
- Rooney, J. (1977) A survey of representations of spatial rotation about a fixed point, *Environment and Planning B*, **4**(2): 185-210.
- Rooney, J. (1978) A comparison of representations of general spatial screw displacement, *Environment and Planning B*, **5**: 45-88.

- Samuel, A.E., McAree, R.R. and Hunt, K.H. (1991) Unifying screw geometry and matrix transformations, *Int. J. Robot. Res.*, **10**(5): 454-472.
- Selig, J.M. (2005) *Geometric Fundamentals of Robotics*, Spriger, New York.
- Smith, G. (1998) *Introductory Mathematics: Algebra and Analysis*, Springer, London.
- Su, H. J. (2011) Mobility analysis of flexure mechanisms via screw algebra, *ASME J. Mech. Rob.*, **3**(4): 041010.
- Suleyman, D. (2007) Matrix realization of dual quaternionic electromagnetism, *Central European Journal of Physics*, **5**(4): 487-506.
- Weyl, H. (1934) Harmonics of homogeneous manifolds, *Math. Ann.*, **35**(3): 486-499.
- Woo, L. and Freudenstein, F. (1970) Application of line geometry to theoretical kinematics and the kinematic analysis of mechanical systems, *J. Mechanisms*, **5**(3): 417-460.
- Yang, A.T. and Freudenstein, F. (1964) Application of dual-number quaternion algebra to the analysis of spatial mechanisms, *ASME J. Appl. Mech.*, **86**(2): 300-309.
- Yu, J., Li, S., Su, H.J. and Culpepper, M.L. (2011) Screw theory based methodology for the deterministic type synthesis of flexure mechanisms, *ASME J. Mech. Rob.*, **3**(3): 031008.
- Yuan, M.S.C. and Freudenstein, F. (1971) Kinematics analysis of spatial mechanisms by means of screw coordinates, Part I: Screw coordinates, *ASME J. Eng. Ind.*, **93**(B): 61-66.
- Zarrouk, D. and Shoham, M. (2011) A note on the screw triangle, *ASME J. Mech. Rob.*, **3**(1): 014502.
- Zhang, K., Dai, J.S. and Fang, Y. (2010) Topology and constraint analysis of phase change in the metamorphic chain and its evolved mechanism, *ASME J. Mech. Des.*, **132**(2): 121001.
- 刘绍学, 章璞 (2010) 近世代数导引, 高等教育出版社, 北京.
- 张禾瑞 (1978) 近世代数基础, 高等教育出版社, 北京.

第六章 互易性与旋量系

旋量系是旋量的集合, 依赖于一组线性无关的旋量并构成李代数 $se(3)$ 的向量子空间. 旋量系理论与具有一定自由度的刚体的运动特性分析密切相关, 同时与作用在刚体上的力系及其反作用力的特性密切相关. 速度旋量系与相应的约束旋量系构成互易关系. 因此, 旋量系的理论基础是线性相关性和互易性. 长期以来, 对旋量系及其在运动学和动力学方面的理论与应用研究一直吸引着数学家和理论运动学家的研究兴趣.

Ball (1900) 以刚体的螺旋运动为实例, 给出了 n 阶旋量系, 该旋量系中所有旋量能使刚体在约束允许下绕该组独立旋量的轴线相继旋转. Ball 还对拟圆柱面进行了研究, 奠定了二阶旋量系分类的基础. Dimentberg (1965) 研究了互易旋量系的结构. Hunt (1967) 通过线性线丛及其与空间机构与可动性之间的关系对旋量系进行了详尽的研究.

本章介绍了旋量互易性的几何特性和物理意义, 展示了旋量间的相关性, 从线性角度出发, 提出了充分必要条件以及旋量相关的几何条件, 对旋量系的组合进行了深入研究. 在此基础上, 推导出了旋量组合转化为线矢量的充分必要条件的通用公式. 本章揭示了互易性和相关性的代数本质, 展现了旋量代数与射影几何的关联, 为第七章研究旋量系的关联关系理论奠定了基础.

6.1 旋量的互易性

6.1.1 几何特性与物理含义

旋量的互易性是旋量系理论的基础. Klein (1871) 提出了互易旋量的基本概念和五维射影空间中的超二次曲面. 几乎是同一时间, Ball 对互易旋量进行了研究, Ball 对互易性的定义为: 当虚拟系数即互矩为零时, 两旋量互易 (见 3.2.1 节). 1924 年, 这一互易积被 von Mises (1924 年) 定义为旋量标量积. 此后 Dimentberg (1965) 和 Brand (1947) 用此定义来识别互易旋量. 1965 年, Dimentberg (1965) 进一步揭示了互易性的几何意义, 并通过六条弹性吊索束缚刚体产生的一维移动来展示这一原理. 1978 年, Hunt (1978) 进一步采用互易运动副及其连接来解释互易性. 一对包括两个垂直轴线的串联铰链与锁住一转动而演变为两活动度的球副互为互易运动副. 在这一对互易运动副中, 其中一个运动副的活动度为另一个运动副的约束度.

如 3.7 节所述, 若两旋量 S_1 和 S_2 的互矩或虚系数为零, 称两旋量互易.

从几何角度考虑, 若两旋量的旋距为零 ($h_1 = h_2 = 0$), 即旋量退化为线矢量, 两旋量互易的几何条件为相交或平行, 此为第一类情况.

若一旋量旋距为零, 另一旋量旋距为有限值, 互易的几何条件为正交或满足式 (3.15) 的一般情况, 此为第二类情况.

第三类情况为, 当两旋量具有有限旋距时, 则互易的空间相互位姿又有五种情形. 第一种是两旋量轴线不仅相交且为正交; 第二种是两旋量轴线相交且旋距之和为零; 第三种是两旋量轴线平行且旋距之和为零; 第四种是两旋量轴线共线且旋距之和为零; 第五种是其他满足式 (3.15) 的情况.

第四类情况为, 当两旋量旋距一个为无穷大, 另一个为零或有限值时, 互易的几何条件是无穷大旋距的旋量位于与有限旋量轴线垂直的平面内.

第五类情况为, 两旋量都具有无穷大旋距, 此时两旋量在任意情况下都互易.

互易旋量的分类请见表 6.1.

从物理学角度考虑, 刚体在力旋量作用下沿某一轴线方向运动, 若力旋量对刚体做功为零, 则力旋量与该运动旋量¹互易. 如图 6.1, 力旋量与速度

¹运动旋量涵盖速度旋量以及有限位移旋量.

旋量的单位旋量 S_1 和 S_2 可分别表示为

$$S_1 = (1, 0, 0, h_1, 0, 0)^T \quad (6.1)$$

$$S_2 = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0, h_2 \cos \varphi - d \sin \varphi, h_2 \sin \varphi + d \cos \varphi, 0)^T \quad (6.2)$$

表 6.1 两旋量互易的几何关系分类

类别	旋量 S_1 的旋距	旋量 S_2 的旋距	互易的几何条件
第一类	0	0	(a) 相交; (b) 平行
第二类	0	h	(a) 正交; (b) 其他满足 $h \cos \varphi = d \sin \varphi$ 的一般条件
第三类	h_1	h_2	(a) 正交; (b) 相交且 $h_1 + h_2 = 0$; (c) 平行且 $h_1 + h_2 = 0$; (d) 共线且 $h_1 + h_2 = 0$; (e) 其他满足 $(h_1 + h_2) \cos \varphi = d \sin \varphi$ 的一般条件
第四类	0 或 h	∞	垂直
第五类	∞	∞	任何条件

注: h, h_1, h_2 表示旋量的旋距且为有限值.

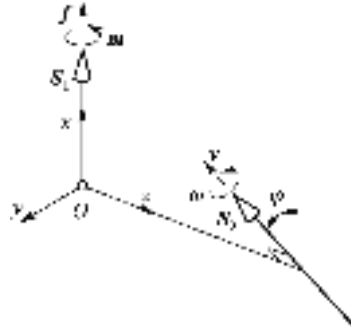


图 6.1 速度旋量与力旋量的几何解释

赋予幅值 f , 则作用在单位旋量 S_1 上的力旋量可表示为

$$W = \begin{pmatrix} f \\ m \end{pmatrix} = f(1, 0, 0, h_1, 0, 0)^T$$

同理, 赋予速度幅值 ω , 则作用在单位旋量 S_2 上的运动旋量可表示为

$$T = \begin{pmatrix} \omega \\ v \end{pmatrix} = \omega(\cos \varphi, \sin \varphi, 0, h_2 \cos \varphi - d \sin \varphi, h_2 \sin \varphi + d \cos \varphi, 0)^T$$

据式 (3.12), 由以上两旋量互易积可得式 (3.15). 从前述的几何条件分析可知, 如果上述两旋量满足式 (3.88) 给出的旋量互易条件, 上述力旋量与速度旋量互易, 即力旋量在该速度旋量轴线方向上不做功. 两旋量互易的物理含义可分为以下几种情况: 若力旋量表示纯力, 且与刚体绕转动副运动的速度旋量轴线同轴或平行, 则该力旋量对刚体不做功; 若刚体绕接触法线旋转且不计摩擦, 则力旋量在该法线方向不做功; 若力旋量表示纯力偶, 且刚体沿移动副平移, 则该力偶对刚体不做功.

定义 6.1 运动旋量包含速度旋量、有限位移旋量以及从属于有限位移旋量但强调微小位移的微小位移旋量.

6.1.2 运动与约束中的互易关联

互易性既表征了两旋量空间位姿的相互关系, 又展示了力旋量和运动旋量的物理意义. 互易性的几何和物理解释引出了运动旋量和约束力旋量之间的一种基本关联关系, 第七章将对此作详细阐述.

机构基本运动副 (以转动副为例) 中包含许多旋量互易性及其关联关系的实例. 如图 6.2a, 若作用于转动副上表示纯力的力旋量 \mathbf{W} 与运动旋量 \mathbf{T} 共线, 则该力旋量不做功, 二者互易. 不难看出, 该力旋量与运动旋量线性相关. 如图 6.2b, 将力旋量平移至 \mathbf{W}' , 可以发现该力旋量仍不做功, 仍与运动旋量 \mathbf{T} 互易, 但此时二者线性无关. 因此, 运动旋量与力旋量对应的单位旋量间互易性与线性相关性的关系, 即旋量关联关系是值得研究的.

如图 6.2c, 力旋量 \mathbf{W} 作用在串联机器人的最后一个杆件上, 并且与运动旋量 \mathbf{T}_1 、 \mathbf{T}_2 及 \mathbf{T}_3 平行. 显然, 力旋量 \mathbf{W} 对三个运动旋量不做功, 即力旋

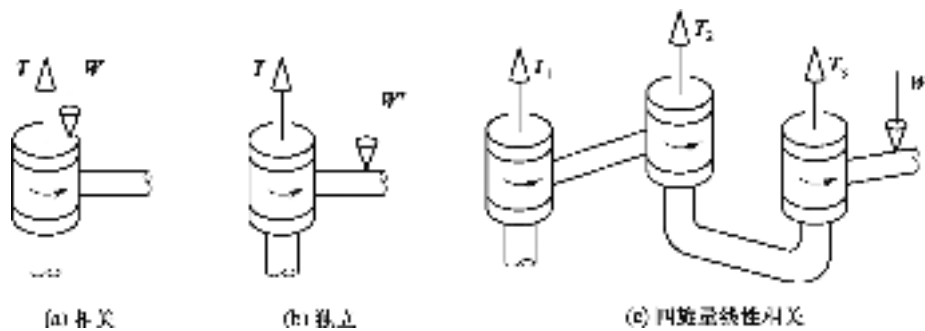


图 6.2 互易性与相关性

量 \mathbf{W} 与运动旋量 T_1 、 T_2 及 T_3 构成的旋量系互易. 通过研究不难发现, 力旋量 \mathbf{W} 与运动旋量 T_1 、 T_2 及 T_3 线性相关 (Dai, 1993). 若空间四个旋量交于一点, 情况亦如此. 诸如此类的旋量间互易性与线性相关性的关联关系理论将在第七章作深入阐述.

6.2 旋量的相关性

本节从向量代数角度出发, 给出旋量线性相关的定义, 由此推出旋量相关性充分必要条件, 导出 2 ~ 6 个旋量线性相关的几何条件.

定义 6.2 若存在一组不全为零的系数 $\lambda_i = (1, 2, \dots, k)$, 使得 k 个旋量满足下式:

$$\lambda_1 \mathbf{S}_1 + \lambda_2 \mathbf{S}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{S}_k = \mathbf{0} \quad (6.3)$$

则称旋量 $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_k$ 线性相关.

引理 6.1 旋量相关性可以按照旋量的主部与副部定义为两部分, 即

$$\lambda_1 \mathbf{s}_1 + \lambda_2 \mathbf{s}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{s}_k = \mathbf{0} \quad (6.4)$$

和

$$\lambda_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{s}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{s}_k + \lambda_1 h_1 \mathbf{s}_1 + \lambda_2 h_2 \mathbf{s}_2 + \dots + \lambda_k h_k \mathbf{s}_k = \mathbf{0} \quad (6.5)$$

注释 6.1 引理 6.1 所述的旋量相关性对旋量轴线、位置向量及旋距均有要求. 例如, 两自由向量平行或者共线, 二者即线性相关; 但对于两旋量, 若二者平行或共轴, 未必线性相关, 判断平行或共轴旋量的相关性仍需考察旋距的影响. 总而言之, 一组旋量只有同时满足式 (6.4) 与式 (6.5) 时才线性相关.

6.2.1 旋量相关的充分必要条件

定理 6.1 对于 k 个旋量 $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_k$, 将引理 6.1 给出的旋量相关性的两个定义式重新组合, 得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \dots & \mathbf{s}_k \\ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{s}_1 + h_1 \mathbf{s}_1 & \mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_2 + h_2 \mathbf{s}_2 & \dots & \mathbf{r}_k \times \mathbf{s}_k + h_k \mathbf{s}_k \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (6.6)$$

可简化为

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (6.7)$$

考虑三维空间中, 旋量维数 $n = 6$, 若 $k > 6$, 则 k 个旋量线性相关; 最大线性无关的个数由 $6 \times k$ 矩阵 \mathbf{J} 的秩 $\text{rank } \mathbf{J}$ 确定. 若 $k < 6$, 且 $\text{rank } \mathbf{J} < k$, 则 k 个旋量线性相关; 可通过检验矩阵 \mathbf{J} 的所有小于或等于 k 阶子式是否为零来确定 $\text{rank } \mathbf{J}$, 从而决定最大线性无关的个数. 若 $k = 6$, 且 $\text{rank } \mathbf{J} = k$, 则 k 个旋量线性无关.

推论 6.1 k 个旋量最大线性无关数由 $6 \times k$ 矩阵 \mathbf{J} 的秩 $\text{rank } \mathbf{J}$ 确定. 如果 $\text{rank } \mathbf{J} < k$, 则 k 个旋量线性相关.

推论 6.2 若 n 个旋量在特殊几何条件下线性相关, 则满足该条件的 $n + k$ 个旋量也线性相关.

定理 6.2 k 个旋量线性相关的必要条件为

$$\det(\mathbf{J}^T \Delta \mathbf{J}) = 0 \quad (6.8)$$

式中

$$\mathbf{J}^T \Delta \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2 & \cdots & \mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_k \\ \mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_2 & \cdots & \mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{S}_k \circ \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_k \circ \mathbf{S}_2 & \cdots & \mathbf{S}_k \circ \mathbf{S}_k \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

其中, Δ 是对偶算子的矩阵形式, 见式 (2.55).

证明 由式 (3.11) 的互易积, 可得

$$\mathbf{J}^T \Delta \mathbf{J} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (6.10)$$

公式 $\text{rank } \mathbf{J}^T = \text{rank } \mathbf{J}$, $\text{rank}(\mathbf{J}^T \Delta \mathbf{J}) \leq \text{rank } \mathbf{J}$ 成立. 由推论 6.1, 若 k 个旋量线性相关, 则 $\text{rank } \mathbf{J} < k$. 从前式可知 $\text{rank}(\mathbf{J}^T \Delta \mathbf{J}) < k$, 由此 $\det(\mathbf{J}^T \Delta \mathbf{J}) = 0$. 定理得证.

对于旋距为零的旋量, 即线矢量, 式 (6.9) 退化为

$$\mathbf{J}^T \Delta \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2 & \cdots & \mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_k \\ \mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_1 & 0 & \cdots & \mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{S}_k \circ \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_k \circ \mathbf{S}_2 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

定理 6.3 k 个旋量线性相关的充分必要条件是称矩阵 $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ 的行列式为零, 即

$$\det(\mathbf{J}^T \mathbf{J}) = 0 \quad (6.12)$$

证明 必要性证明可参考定理 6.2, 下面给出充分性证明.

对 $\mathbf{J}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ 两边乘以 $\boldsymbol{\lambda}^T$, 得 $\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{J}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\lambda} = 0$, 即 $(\mathbf{J} \boldsymbol{\lambda})^T \mathbf{J} \boldsymbol{\lambda} = 0$. 由此, $\mathbf{J} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$. 所以方程组 $\mathbf{J}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{J} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ 同解, 则 $\text{rank}(\mathbf{J}^T \mathbf{J}) = \text{rank} \mathbf{J}$. 因为 $\det(\mathbf{J}^T \mathbf{J}) = 0$, 即 $\text{rank}(\mathbf{J}^T \mathbf{J}) < k$, 所以, $\text{rank}(\mathbf{J}) < k$. 因而, k 个旋量线性相关.

这里引用了内积的概念 (Sugimoto 和 Duffy, 1982; Kerr 和 Sanger, 1989; Duffy, 1990), 内积保持了矩阵 \mathbf{J} 的秩, 是不随原点的变化而改变的不变量.

6.2.2 两个旋量的相关性

推论 6.3 两旋量线性相关的充分必要条件是轴线共线且旋距相同.

证明 首先证明充分性. 设旋量 \mathbf{S}_1 与 \mathbf{S}_2 为

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{s}_1 + h_1 \mathbf{s}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_2 + h_2 \mathbf{s}_2 \end{pmatrix}$$

若旋量 \mathbf{S}_1 与 \mathbf{S}_2 的轴线共线, 设其公共轴线为 \mathbf{s} , 则 $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{s} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}$. 由于旋距相同, $h_1 = h_2$, 由此可知两旋量线性相关.

再证明必要性. 若旋量 \mathbf{S}_1 与 \mathbf{S}_2 线性相关, 即 $\mathbf{S}_2 = \lambda_1 \mathbf{S}_1$, 可得

$$\begin{cases} \mathbf{s}_2 = \lambda_1 \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_2 + h_2 \mathbf{s}_2 = \lambda_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{s}_1 + \lambda_1 h_1 \mathbf{s}_1 \end{cases} \quad (6.13)$$

由上式可得

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{s}_1 = (h_1 - h_2) \mathbf{s}_1 \quad (6.14)$$

式 (6.14) 两边分别右点积 \mathbf{s}_1 得

$$0 = (h_2 - h_1) \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_1$$

可知 $h_1 = h_2$, 代入式 (6.14) 得

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{s}_1 = \mathbf{0}$$

从而可知两旋量共轴线, 证毕.

6.2.3 具有相同旋距的三个旋量的相关性

若三个旋量旋距相同, 则式 (6.6) 可变为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{s}_1 + h\mathbf{s}_1 & \mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_2 + h\mathbf{s}_2 & \mathbf{r}_3 \times \mathbf{s}_3 + h\mathbf{s}_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (6.15)$$

如果三个旋量线性相关, 至少要求上式中由 \mathbf{s}_1 、 \mathbf{s}_2 和 \mathbf{s}_3 构成的矩阵的任意三阶子式为零, 即这些旋量的轴线共面或平行.

推论 6.4 具有相同旋距的三个旋量线性相关的必要条件是它们轴线共面.

将位置向量 \mathbf{r}_i 分解为两部分, 即由上述三轴线构成的平面外任意参考点指向该平面上一点的向量 $\boldsymbol{\rho}$ 和该点到旋量轴线 \mathbf{s}_i 某一点的位置向量 \mathbf{r}'_i (见图 6.3). 由此, \mathbf{r}'_2 和 \mathbf{r}'_3 可由 \mathbf{r}'_1 表示为

$$\mathbf{r}'_2 = \beta_2 \mathbf{r}'_1 \quad (6.16)$$

和

$$\mathbf{r}'_3 = \beta_3 \mathbf{r}'_1 \quad (6.17)$$

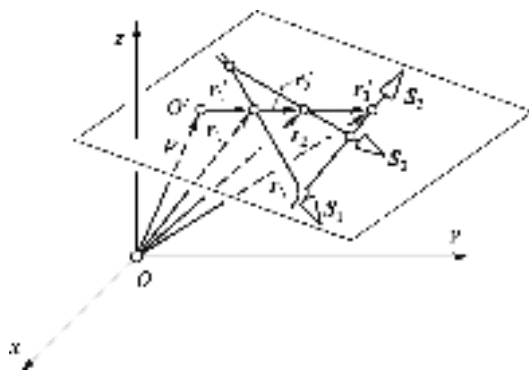


图 6.3 三旋量共面的几何表示

因此, 式 (6.15) 可变换为下式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ h\mathbf{I} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_1 & \beta_2 \mathbf{s}_2 & \beta_3 \mathbf{s}_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (6.18)$$

式中, $h\mathbf{I}$ 是 5.2.3 节中式 (5.34) 给出的改变旋量旋距矩阵的非对角线分块矩阵. 选择 $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}$, 矩阵 \mathbf{A} 可表示为反对称矩阵, 即

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

该矩阵可实现向量 \mathbf{r} 与其他向量的叉积. 向量 \mathbf{r} 可表示为

$$\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)^T \quad (6.20)$$

因此, 式 (6.18) 可以写为

$$N\mathbf{M}_3\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (6.21)$$

式中, \mathbf{M}_3 是旋量 \mathbf{S}_1 、 \mathbf{S}_2 、 \mathbf{S}_3 的蜕变矩阵. 应用拉普拉斯展开, 得到 $\text{rank } N = 5$. 由此, 因 $\text{rank}(N\mathbf{M}_3) \leq \min(\text{rank } N, \text{rank } \mathbf{M}_3)$, 旋量线性相关性可以通过旋量蜕变矩阵 \mathbf{M}_3 的秩判断.

定理 6.4 若具有相同旋距的三旋量共面共点或共面平行, 则三旋量线性相关.

证明 若三旋量共面共点, 选取相同的位置向量, 即 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}$ 和 $\beta_2 = \beta_3 = 1$, 易知 \mathbf{M}_3 的秩退化为 2. 若三旋量共面平行, 且具有相同旋距, 容易看出, 当 $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_3$ 时, 矩阵 \mathbf{M}_3 的秩小于 3, 因此三旋量线性相关. 若三旋量共面且具有相同旋距, 其中两个共线, 根据矩阵 \mathbf{M}_3 的秩仍可判断出三旋量线性相关. 不失一般性, 令 $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2$, 则 $\beta_2 = 1$, 即 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, 矩阵 \mathbf{M}_3 可写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_1 & \beta_3\mathbf{s}_3 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

显然, 矩阵 \mathbf{M}_3 的秩小于 3, 三旋量线性相关. 应该注意的是, 当三个旋量共面, 但没有指明其他限定条件时, 它们不一定线性无关.

6.2.4 具有相同旋距的四个、五个与六个旋量的相关性

定理 6.5 任意四个具有相同旋距的共点旋量线性相关.

证明 四旋量在空间共点 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$, 叉积运算可用与旋量副部的位置向量对应的反对称矩阵 $[\mathbf{r} \times]$ 进行, 如式 (6.19) 所示. 若四旋量有相同的旋距 h , 式 (6.6) 可以写成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ h\mathbf{I} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 & \mathbf{s}_4 \\ \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \mathbf{s}_3 & \mathbf{s}_4 \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (6.23)$$

该式给出旋量 \mathbf{S}_1 、 \mathbf{S}_2 、 \mathbf{S}_3 、 \mathbf{S}_4 的蜕变矩阵 \mathbf{M}_4 . 正如 6.2.1 节所述, 矩阵 $\mathbf{J}'_4 = \mathbf{N}\mathbf{M}_4$ 是关键. 由上式可知矩阵 \mathbf{M}_4 的秩小于 4, 因此, 任何四个具有相同旋距的共点旋量都是线性相关的. 定理得证.

定理 6.6 任意四个具有相同旋距的平行旋量线性相关.

证明 若四个具有相同旋距的旋量相互平行, 式 (6.4) 和式 (6.5) 可以写成

$$(1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \mathbf{s}_1 = \mathbf{0} \quad (6.24)$$

和

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{s}_1 + h\mathbf{s}_1, \alpha_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_1 + h\alpha_2 \mathbf{s}_1, \alpha_3 \mathbf{r}_3 \times \mathbf{s}_1 + h\alpha_3 \mathbf{s}_1, \alpha_4 \mathbf{r}_4 \times \mathbf{s}_1 + h\alpha_4 \mathbf{s}_1) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.25)$$

通过以上两个公式, 可以得到

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ h\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \alpha_2 \mathbf{s}_1 & \alpha_3 \mathbf{s}_1 & \alpha_4 \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{s}_1 & \alpha_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_1 & \alpha_3 \mathbf{r}_3 \times \mathbf{s}_1 & \alpha_4 \mathbf{r}_4 \times \mathbf{s}_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.26)$$

由于四旋量是平行的, 位置向量 \mathbf{r}_i 可用平面线丛表示, 即

$$\mathbf{r}_3 = \mu_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 \mathbf{r}_2 \quad (6.27)$$

$$\mathbf{r}_4 = \delta_1 \mathbf{r}_1 + \delta_2 \mathbf{r}_2 \quad (6.28)$$

将式 (6.27) 和式 (6.28) 代入式 (6.26), 得到

$$\mathbf{N}' \mathbf{J}_4 \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (6.29)$$

式中, \mathbf{J}_4 为 6×4 矩阵

$$\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \alpha_2 \mathbf{s}_1 & \alpha_3 \mathbf{s}_1 & \alpha_4 \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{r}_1 \times \mathbf{s}_1 & \alpha_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_1 & \alpha_3 (\mu_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 \mathbf{r}_2) \times \mathbf{s}_1 & \alpha_4 (\delta_1 \mathbf{r}_1 + \delta_2 \mathbf{r}_2) \times \mathbf{s}_1 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

由上可见, 任何包含上述矩阵 \mathbf{J}_4 的前三行中任两行的四阶子式为零. 因此, 通过研究包含矩阵 \mathbf{J}_4 后三行的四阶子式的奇异性, 可以判断旋量的相关性. 可知, 任何包含最后三行的四阶子式为零. 因此, 可以看出矩阵 \mathbf{J}_4 的秩小于 4. 因此, 在式 (6.26) 存在一组解, 其中至少有一个 λ_i 为非零数. 由此而知, 四个具有相同旋距的平行旋量是相关的. 定理得证.

定理 6.7 任意四个旋距相同且轴线共面的旋量线性相关.

证明 1 如果四旋量共面, 则它们的轴线线性相关. 任取两个线性无关的轴线为基, 而不失一般性, 可取 \mathbf{s}_1 和 \mathbf{s}_2 为基, 另外两个旋量轴线可以表示为

$$\mathbf{s}_3 = \alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_2 \mathbf{s}_2 \quad (6.31)$$

$$\mathbf{s}_4 = \beta_1 \mathbf{s}_1 + \beta_2 \mathbf{s}_2 \quad (6.32)$$

式 (6.4) 可写成

$$\lambda_1 \mathbf{s}_1 + \lambda_2 \mathbf{s}_2 + \lambda_3 \mathbf{s}_3 + \lambda_4 \mathbf{s}_4 = (\lambda_1 + \lambda_3 \alpha_1 + \lambda_4 \beta_1) \mathbf{s}_1 + (\lambda_2 + \lambda_3 \alpha_2 + \lambda_4 \beta_2) \mathbf{s}_2 = \mathbf{0} \quad (6.33)$$

同时, 位置向量 \mathbf{r}_i 可以在同一平面内表示, 在选择基 \mathbf{s}_1 和 \mathbf{s}_2 上也是线性相关的, 可以写成

$$\mathbf{r}_1 = {}^1\delta_1 \mathbf{s}_1 + {}^1\delta_2 \mathbf{s}_2 \quad (6.34)$$

$$\mathbf{r}_2 = {}^2\delta_1 \mathbf{s}_1 + {}^2\delta_2 \mathbf{s}_2 \quad (6.35)$$

$$\mathbf{r}_3 = {}^3\delta_1 \mathbf{s}_1 + {}^3\delta_2 \mathbf{s}_2 \quad (6.36)$$

$$\mathbf{r}_4 = {}^4\delta_1 \mathbf{s}_1 + {}^4\delta_2 \mathbf{s}_2 \quad (6.37)$$

将式 (6.31)、式 (6.32) 和式 (6.34) ~ 式 (6.37) 代入式 (6.6), 得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ h\mathbf{I} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_2 \mathbf{s}_2 & \beta_1 \mathbf{s}_1 + \beta_2 \mathbf{s}_2 \\ \eta_1 \mathbf{s}_2 & \eta_2 \mathbf{s}_2 & \eta_3 \mathbf{s}_2 & \eta_4 \mathbf{s}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{M}_4 \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (6.38)$$

式中

$$\mathbf{A}_1 = [\mathbf{s}_1 \times] \begin{bmatrix} 0 & -n_1 & m_1 \\ n_1 & 0 & l_1 \\ m_1 & l_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

$$\eta_1 = -{}^1\delta_2, \eta_2 = {}^2\delta_1, \eta_3 = {}^3\delta_1\alpha_2 - {}^3\delta_2\alpha_1, \eta_4 = {}^4\delta_1\beta_2 - {}^4\delta_2\beta_1$$

上述矩阵 $N\mathbf{M}_4$ 与式 (6.30) 同构, 可以证明秩为 3. 因此任意四个旋距相同且轴线共面的旋量是线性相关的. 定理得证.

下面用另一种方法来证明四个共面的线矢量是线性相关的.

证明 2 用 \mathbf{s}_2 与式 (6.33) 作叉积, 得到

$$(1, 0, \alpha_1, \beta_1) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \mathbf{0} \quad (6.40)$$

用 \mathbf{s}_1 与式 (6.33) 作叉积, 得到

$$(0, 1, \alpha_2, \beta_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \mathbf{0} \quad (6.41)$$

将式 (6.34) ~ 式 (6.37) 代入式 (6.5), 得

$$(-{}^1\delta_2, {}^2\delta_1, {}^3\delta_1\alpha_2 - {}^3\delta_2\alpha_1, {}^4\delta_1\beta_2 - {}^4\delta_2\beta_1) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \mathbf{0} \quad (6.42)$$

由于 \mathbf{s}_1 和 \mathbf{s}_2 分别为两个不同旋量的轴线向量, 式 (6.40) ~ 式 (6.42) 还满足下式:

$$\begin{bmatrix} -{}^1\delta_2 & {}^2\delta_1 & {}^3\delta_1\alpha_2 - {}^3\delta_2\alpha_1 & {}^4\delta_1\beta_2 - {}^4\delta_2\beta_1 \\ 1 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (6.43)$$

容易看出, 上式中 λ_i 存在不为零的解, 且同时满足式 (6.38). 因此, 任何四个旋距相等且轴线共面的旋量线性相关. 定理得证.

推论 6.5 任意具有相同旋距的五个旋量线性相关的条件是它们的轴线包含于两个线性线丛组成的线汇中 (Woods, 1922).

推论 6.6 任意六个具有相同旋距的旋量的轴线在同一个线性线丛时, 它们是线性相关的.

6.2.5 旋量算子的不变性

旋量的线性相关性与矩阵 \mathbf{J} 的秩有关, 可以证明, 旋量的线性相关性不随原点和单位的改变而改变. 原点变化和坐标系姿态的变化可由旋转矩阵 \mathbf{R} 与反对称矩阵 \mathbf{A} 表示, 详见 4.4.2 节和 4.4.3 节. 单位变化和旋距变化在 5.2.3 节进行了介绍.

本节推导过程表明, 旋量的相关性不仅仅可以抽象为一种代数结构, 也体现为一种几何结构, 旋量相关性的代数结构和几何形态之间具有的关联证明了旋量的代数内涵与几何含义之间的统一性.

6.3 旋量系、基本集与张成多重集

6.3.1 旋量系

定义 6.3 旋量系 \mathbb{S} 是可用 n 个线性无关旋量的线性组合表示的所有旋量的集合. 其中 n 个线性无关的旋量称为旋量系的基, n 为旋量系的阶数. 旋量系可用矩阵 \mathbf{J} 表示为

$$\lambda_1 \mathbf{S}_1 + \lambda_2 \mathbf{S}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{S}_n = [\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \cdots, \mathbf{S}_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \mathbf{J}\boldsymbol{\lambda} \quad (6.44)$$

式中, \mathbf{S}_i 构成旋量系 \mathbb{S} 的一组基.

定义 6.4 给定一个由 n 个旋量组成的集合

$$\mathbb{S} = \{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \cdots, \mathbf{S}_n\} \quad (6.45)$$

如果任意旋量都不能由余下的 $n-1$ 个旋量线性组合表示, 即

$$\mathbf{S}_i \neq \lambda_1 \mathbf{S}_1 + \lambda_2 \mathbf{S}_2 + \cdots + \lambda_{i-1} \mathbf{S}_{i-1} + \lambda_{i+1} \mathbf{S}_{i+1} + \cdots + \lambda_{n-1} \mathbf{S}_{n-1} \quad (6.46)$$

则该集合中的 n 个旋量线性无关.

旋量系可以分为一阶旋量系、二阶旋量系, 直至五阶旋量系. 其中, 基于旋量系的互易性, 四阶和五阶旋量系可由二阶和一阶旋量系定义. Klein 型是旋量系的主要分类准则.

一阶旋量系的基包含一个旋量, 构成一维向量子空间. 一阶旋量系有三种类型, 即非零旋距的有限定位旋量、零旋距的有限定位旋量和无穷旋距的无限定位旋量. 二阶旋量系包含两个线性无关的旋量, 可被赋予无穷多个旋距, 构成二维向量子空间. n 阶旋量系包含 n 个线性无关的旋量.

从物理角度分析, 旋量系可以由一组线性独立的力旋量或瞬时速度旋量集合而成. 表示机构运动副的旋量系可用来描述该运动副所允许的所有运动, 该旋量系的阶数与运动副所允许的运动自由度数等同. 转动副所允许的运动可用一阶旋量系描述. 虎克铰所允许的运动可用旋距为零且轴线过运动副中心的旋量构成的二阶旋量系描述. 值得注意的是, 相互独立且旋距为零的共点旋量的合成旋量的旋距仍为零. 同样, 球铰链运动副所允许的运动可用三阶旋量系描述. 移动副所允许的运动则对应于与移动副轴线平行且旋距无穷大的一阶旋量系.

以机构运动链中的运动副引出的旋量系代表了在给定位姿运动链所允许的所有运动. 旋量系的阶数与该运动链所允许的运动自由度数等同.

在机器人学中, 机构的约束旋量系表示机构可通过力传递作用平衡掉的所有外力的集合. 抓持旋量系由刚体的约束力旋量系构成, 无摩擦接触构成一阶力旋量系, 有摩擦接触形成三阶力旋量系.

机构运动旋量系的互易旋量系由所有限制该运动副或运动链剩余运动的力旋量构成. 这就形成了约束力旋量系. 本书后面章节将基于旋量系互易性和约束旋量系的分解与分析, 以及本章定理与定义所构建的旋量系理论, 展示其在机构学与机器人学中的应用. 第七章将详细阐述这些旋量系的关联关系, 第八章将阐述旋量系的零空间, 第九章提出旋量系的对偶性.

6.3.2 旋量系的集合运算

集合论的基本理论直到 19 世纪末才得以创立. 集合是集合论的研究对象, 是现代数学的一个重要基本概念, 有如下定义.

定义 6.5 集合是一组已定义的不同实体或几何体的组合. 若 x 是集合 A 的元素, 记作 $x \in A$; 若 B 是 A 的子集, 记作 $B \subseteq A$.

定义 6.6 与旋量系 \mathbb{S} 中所有旋量均互易的全部旋量的集合构成旋量系 \mathbb{S} 的互易旋量系 \mathbb{S}^r , 表示为

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^r \equiv \{ & \mathbf{S}_1^r, \dots, \mathbf{S}_{6-n}^r | ((\mathbf{S}_i^r \circ \mathbf{S}_j = 0, j = 1, \dots, n), i = 1, \dots, 6-n) \\ & \forall \mathbf{S}_j, j = 1, \dots, n \in \mathbb{S} \} \end{aligned} \quad (6.47)$$

引理 6.2 旋量系及其互易旋量系的阶数有下列关系:

$$\dim \mathbb{S} + \dim \mathbb{S}^r = 6 \quad (6.48)$$

式中, $\dim \mathbb{S}$ 是旋量系 \mathbb{S} 的阶数.

旋量系间的并和交分别表示为 $\mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2$ 和 $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$. 其相应子空间的并的等价术语是线性和或张成, 表示为 $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$. 如果两旋量系 \mathbb{S}_1 、 \mathbb{S}_2 不相交, 即 $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 = \emptyset$, 则其和称为直和, 表示为 $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$. 直和是线性和在两子空间不相交情况下的特殊形式.

定义 6.7 设 \mathbb{S}_1 与 \mathbb{S}_2 是 \mathbb{S} 的两个线性子空间, 对于任意元素 $\alpha \in \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$, 若

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_i \in \mathbb{S}_i, i = 1, 2$$

是唯一的, 则称 $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$ 为 \mathbb{S}_1 与 \mathbb{S}_2 的直和, 记为 $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$.

注释 6.2 直和是由群的集合而来, 这里应用到抽象代数, 推广到向量空间和其他结构的直和.

定理 6.8 设 \mathbb{S}_1 与 \mathbb{S}_2 是 \mathbb{S} 的线性子空间, 则下列的结论等价:

- (1) $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$ 是直和;
- (2) $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 = \emptyset$;
- (3) $\dim(\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2) = \dim \mathbb{S}_1 + \dim \mathbb{S}_2$.

6.3.3 旋量系转换定理与阶数定律

定理 6.9 旋量系并集的互易旋量系可以转换为互易旋量系的交集

$$(\mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2 \cup \cdots \cup \mathbb{S}_n)^r = (\mathbb{S}_1^r \cap \mathbb{S}_2^r \cap \cdots \cap \mathbb{S}_n^r) \quad (6.49)$$

旋量系交集的互易旋量系可以转换为互易旋量系的并集

$$(\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 \cap \cdots \cap \mathbb{S}_n)^r = (\mathbb{S}_1^r \cup \mathbb{S}_2^r \cup \cdots \cup \mathbb{S}_n^r) \quad (6.50)$$

上述内容为**旋量系转换定理**, 可以从 **DeMorgan 定理** 中导出. DeMorgan 定理由英国数学家和逻辑学家 Augustus DeMorgan 提出 (Birkhoff 和 MacLane, 1997), 该定理包含并、交与分配运算. Dai、Huang 和 Lipkin (2006) 对其进行了扩展, 其中互易取代了 DeMorgan 定理中的逆特性. 逆特性是一对与逻辑算子有关的法则, 允许通过彼此求反表达联合和分离.

定理 6.10 两旋量系的阶数满足下述关系:

$$\dim(\mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2) = \dim \mathbb{S}_1 + \dim \mathbb{S}_2 - \dim(\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2) \quad (6.51)$$

上式称为**阶数定律**.

6.3.4 基本集

定义 6.8 基数是描述集合元素数目的自然数, 可表示为 $\text{card}(\cdot)$.

定义 6.9 旋量系 \mathbb{S} 的**基本集**是由一组可以张成旋量系 \mathbb{S} 的线性无关的旋量构成的集合. 旋量系基本集的旋量数目称为旋量系的基数, 记为 $\text{card}\{\mathbb{S}\}$. 旋量系的基本集的基数与旋量系阶数相等, 即 $\text{card}\{\mathbb{S}\} = \dim \mathbb{S}$.

定义 6.10 旋量系逻辑运算为通常的集合运算.

必须注意, 集合的并与交与向量空间的并与交不同. 例如, 如果两组完全不同的基分别张成同样的子空间, 它们各自的子空间是全交的, 但它们各自的基元素的集合不相交.

6.3.5 张成多重集

定义 6.11 **多重集** (mset) 是一般化的集合, 可包含重复元素 (Knuth, 1981), 也称“袋”, 记为 $\langle \cdot \rangle$.

对于不含重合元素的集合², 采用大括号 $\{\cdot\}$ 表示.

定义 6.12 张成多重集 $\langle S \rangle$ 是旋量系 S 的所有旋量的集合, 其旋量数目为基数, 表示为 $\text{card} \langle S \rangle$.

张成多重集的基数总大于或等于对应旋量系的阶数, 表示为 $\text{card} \langle S \rangle \geq \dim S$. 在一个张成的多重集中, 旋量可以是重复的或线性相关的. 因此, 基本集是张成多重集的特例, 为 $\text{card} \langle S \rangle > \text{card} \{S\}$. 当张成多重集不含重复元素时, 多重集即为普通的集合, 为 $\text{card} \langle S \rangle = \text{card} \{S\}$.

定义 6.13 多重集并运算 \uplus 是将两个多重集中的所有元素简单地合并, 形成一个新的多重集, 如

$$\langle 2, 2, 3 \rangle \uplus \langle 1, 2, 3, 3 \rangle = \langle 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 \rangle \quad (6.52)$$

若没有元素重复, 多重集即为普通的集合, 多重集并运算 \uplus 转换为通常的集合运算.

推论 6.7 给定多重集 $\langle S_1 \rangle$ 和 $\langle S_2 \rangle$, 如果旋量 S 在 $\langle S_1 \rangle$ 中出现 n_1 次, 在 $\langle S_2 \rangle$ 中出现 n_2 次, 则旋量 S 将:

- (1) 在 $\langle S_1 \rangle \uplus \langle S_2 \rangle$ 中出现 $n_1 + n_2$ 次;
- (2) 在 $\langle S_1 \rangle \cup \langle S_2 \rangle$ 中出现 $\max(n_1, n_2)$ 次;
- (3) 在 $\langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle$ 中出现 $\min(n_1, n_2)$ 次;
- (4) 在 $\langle S_1 \rangle - \langle S_2 \rangle$ 中出现 $\max(n_1 - n_2, 0)$ 次.

6.4 旋量系的组合

在上节中, 式 (6.44) 给出了旋量系的定义以及旋量线性组合的代数表示. 本节在此基础上研究合成旋量在何种条件下能成为具有零旋距的旋量, 即合成线矢量.

²目前对于具有重复元素的集合有两种定义. 本书采用最新和最明晰的定义, 即集合中没有重复元素, 这就避免了与具有重复元素的多重集的混淆. 在较含蓄的一些老教材中, 集合中会含有重复元素, 但它们的重复性可以忽略, 如 $\{1, 1, 2\} = \{1, 2\}$.

6.4.1 合成旋量为线矢量的条件

定理 6.11 n 个旋量的合成旋量为线矢量的充分必要条件是

$$\begin{aligned} h_{nu} = & \frac{\alpha_1^2}{2} \mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_1 + \frac{\alpha_2^2}{2} \mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_2 + \cdots + \frac{\alpha_n^2}{2} \mathbf{S}_n \circ \mathbf{S}_n \\ & + \alpha_1 \alpha_2 \mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2 + \cdots + \alpha_1 \alpha_n \mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_n + \alpha_2 \alpha_3 \mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_3 + \cdots \\ & + \alpha_{(n-1)} \alpha_n \mathbf{S}_{(n-1)} \circ \mathbf{S}_n = 0 \end{aligned} \quad (6.53)$$

式中, α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 是 n 个旋量的组合系数, 为

$$\mathbf{S} = \alpha_1 \mathbf{S}_1 + \alpha_2 \mathbf{S}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{S}_n \quad (6.54)$$

证明 设有一旋量系为

$$\mathbf{S}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_i \\ \mathbf{s}_{i0} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n \quad (6.55)$$

它们的组合为式 (6.54), 合成旋量的旋距为

$$h = \frac{(\alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_2 \mathbf{s}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{s}_n) \cdot (\alpha_1 \mathbf{s}_{10} + \alpha_2 \mathbf{s}_{20} + \cdots + \alpha_n \mathbf{s}_{n0})}{(\alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_2 \mathbf{s}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{s}_n) \cdot (\alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_2 \mathbf{s}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{s}_n)} \quad (6.56)$$

该旋距的分子为

$$\begin{aligned} h_{nu} = & (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T \\ \mathbf{s}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{s}_n^T \end{bmatrix} [\mathbf{s}_{10}, \mathbf{s}_{20}, \dots, \mathbf{s}_{n0}] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \\ = & (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_{10} & \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_{20} & \cdots & \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_{n0} \\ \mathbf{s}_2^T \mathbf{s}_{10} & \mathbf{s}_2^T \mathbf{s}_{20} & \cdots & \mathbf{s}_2^T \mathbf{s}_{n0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{s}_n^T \mathbf{s}_{10} & \mathbf{s}_n^T \mathbf{s}_{20} & \cdots & \mathbf{s}_n^T \mathbf{s}_{n0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.57)$$

令上式为零, 即式 (6.53) 成立, 则合成旋量即为线矢量. 由此, 充分性得证. 若合成旋量为线矢量, 则式 (6.57) 为零从而得到式 (6.53). 必要性得证.

定理 6.12 若由一组相互互易旋量构成的协互易系中所有旋量均退化为线矢量, 则该组旋量合成后仍为线矢量.

证明 1 若 n 个旋量为协互易旋量系, 即旋量间互易, 式 (6.53) 可写为

$$\begin{aligned} h_{nu} &= \frac{\alpha_1^2}{2} \mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_1 + \frac{\alpha_2^2}{2} \mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_2 + \cdots + \frac{\alpha_n^2}{2} \mathbf{S}_n \circ \mathbf{S}_n \\ &= \alpha_1^2 h_1 + \alpha_2^2 h_2 + \cdots + \alpha_n^2 h_n \end{aligned} \quad (6.58)$$

若所有的旋量均退化为线矢量, 则这几个旋量自互易, 旋距均为零, 可得合成旋量旋距的分子 $h_{nu} = 0$, 即合成后得到线矢量. 定理得证.

证明 2 若旋量系中的所有旋量均退化为线矢量, 则式 (6.57) 可以表示为

$$h_{nu} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_{20} & \cdots & \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_{n0} \\ \mathbf{s}_2^T \mathbf{s}_{10} & 0 & \cdots & \mathbf{s}_2^T \mathbf{s}_{n0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{s}_n^T \mathbf{s}_{10} & \mathbf{s}_n^T \mathbf{s}_{20} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

合成旋量旋距的分子可以简化为

$$h_{nu} = \alpha_1 \alpha_2 \mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2 + \cdots + \alpha_1 \alpha_n \mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_n + \alpha_2 \alpha_3 \mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_3 + \cdots + \alpha_{(n-1)} \alpha_n \mathbf{S}_{(n-1)} \circ \mathbf{S}_n \quad (6.59)$$

由于它们各自互易并相互互易, 上式为零, 其合成旋量即为线矢量. 定理得证.

6.4.2 二阶旋量系的组合

定理 6.13 两相交的旋量组合为线矢量的充分条件是两旋量的旋距互为相反数, 组合系数满足 $\alpha_1 = \pm \alpha_2$.

证明 给定两个旋量 \mathbf{S}_1 和 \mathbf{S}_2 , 旋量的组合可以写为

$$\mathbf{S} = \alpha_1 \mathbf{S}_1 + \alpha_2 \mathbf{S}_2 \quad (6.60)$$

合成旋量 \mathbf{S} 的旋距为

$$h = \frac{(\alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_2 \mathbf{s}_2) \cdot (\alpha_1 \mathbf{s}_{10} + \alpha_2 \mathbf{s}_{20})}{(\alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_2 \mathbf{s}_2) \cdot (\alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_2 \mathbf{s}_2)} \quad (6.61)$$

合成旋量的旋距的分母为

$$h_d = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 \quad (6.62)$$

由于两旋量相交不平行, 可知 $|\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2| \neq 1$, 从而 $h_d \neq 0$. 合成旋量的旋距的分子可以由二者的组合得到

$$h_{nu} = (\alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_2 \mathbf{s}_2) \cdot (\alpha_1 \mathbf{s}_{10} + \alpha_2 \mathbf{s}_{20}) = \alpha_1^2 h_1 + \alpha_2^2 h_2 + \alpha_1 \alpha_2 (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_{20} + \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_{10}) \quad (6.63)$$

若两旋量的旋距互为相反数, 可得两旋量的互易积为

$$\mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2 = \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_{20} + \mathbf{s}_2 \mathbf{s}_{10} = (h_1 + h_2) \cos \varphi - d \sin \varphi = 0$$

此时式 (6.63) 退化为

$$h_{nu} = \alpha_1^2 h_1 + \alpha_2^2 h_2 \quad (6.64)$$

由此两旋量的旋距互为相反数, 且满足 $\alpha_1 = \pm \alpha_2$, 可知 $\alpha_1^2 h_1 + \alpha_2^2 h_2 = 0$, 故合成旋量的分子 $h_{nu} = 0$, 从而两旋量合成为线矢量. 定理得证.

6.4.3 零旋距的三阶旋量系的组合

给定三个线性无关的线矢量, 式 (6.54) 给出了由它们的组合构成的合成旋量, 其旋距的分子为

$$\begin{aligned} h_{nu} &= (\alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_2 \mathbf{s}_2 + \alpha_3 \mathbf{s}_3) \cdot (\alpha_1 \mathbf{s}_{10} + \alpha_2 \mathbf{s}_{20} + \alpha_3 \mathbf{s}_{30}) \\ &= \alpha_1 \alpha_2 \mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2 + \alpha_1 \alpha_3 \mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_3 + \alpha_2 \alpha_3 \mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_3 \\ &= -\alpha_1 \alpha_2 d_{12} \sin \theta_{12} - \alpha_1 \alpha_3 d_{13} \sin \theta_{13} - \alpha_2 \alpha_3 d_{23} \sin \theta_{23} \end{aligned} \quad (6.65)$$

式中, d_{ij} 表示两个旋量 \mathbf{S}_i 和 \mathbf{S}_j 轴线的垂直距离; θ_{ij} 表示两个轴线的夹角. 上式说明如果三个线矢量协互易, 则以这些线矢量为基的合成旋量也是线矢量. 当旋量均具有零旋距时, 即得到该情况, 见定理 6.12.

定理 6.14 三个线矢量的合成旋量具有零旋距的充分条件是三个线矢量协互易, 或者共面, 或者共点.

证明 1 假设三个线矢量中任意两个线矢量相交, 不失一般性, 设 $\mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2 = 0$, 可得到下式:

$$h_{nu} = \alpha_1 \alpha_3 \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_3 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + \alpha_2 \alpha_3 \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_3 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \quad (6.66)$$

由于 \mathbf{S}_1 和 \mathbf{S}_2 相交, 则可选择相同的位置向量为 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 , 因而上式可以写为

$$h_{nu} = \mathbf{s}_3 (\alpha_1 \alpha_3 \mathbf{s}_1 + \alpha_2 \alpha_3 \mathbf{s}_2) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \quad (6.67)$$

因此, 若三个线矢量共点, 则 \mathbf{r}_3 和 \mathbf{r}_2 相等, $h_{nu} = 0$, 合成旋量成为线矢量; 若三个线矢量共面, 则向量 \mathbf{r}_3 、 $\alpha_1\alpha_3\mathbf{s}_1 + \alpha_2\alpha_3\mathbf{s}_2$ 与向量 $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$ 共面, 混合积为零, 所以 $h_{nu} = 0$, 合成旋量亦成为线矢量; 若三个旋量相互平行, 则式 (6.66) 依然成立, 可改写为

$$h_{nu} = \alpha_1\alpha_3\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_3 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + \alpha_2\alpha_3\mathbf{s}_2 \times \mathbf{s}_3 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)$$

易知 $h_{nu} = 0$; 当三个线矢量协互易时, 由式 (6.65) 易知合成旋量的旋距为零. 所以, 三个线矢量的合成旋量具有零旋距的条件是三个线矢量互易, 或者共面, 或者共点 (这里, 相互平行等同于在无穷远处共点). 定理得证.

证明 2 可进一步证明该定理, 如下所示. 给定三个不同的具有零旋距的旋量, 合成旋量的旋距为

$$h_{nu} = (\alpha_1\mathbf{s}_1 + \alpha_2\mathbf{s}_2 + \alpha_3\mathbf{s}_3) \cdot (\alpha_1\mathbf{s}_{10} + \alpha_2\mathbf{s}_{20} + \alpha_3\mathbf{s}_{30}) \quad (6.68)$$

假设其中两个共面, 不失一般性, 设 \mathbf{S}_1 和 \mathbf{S}_2 共面, 则上式变为

$$h_{nu} = \alpha_1\alpha_3\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_3 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + \alpha_2\alpha_3\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_3 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \quad (6.69)$$

假设三个位置矢量共线且有下列关系:

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 \quad (6.70)$$

这就给出了下式:

$$h_{nu} = (\alpha_1\alpha_3\mathbf{s}_1 + \alpha_2\alpha_3\mathbf{s}_2) \cdot \mathbf{s}_3 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) = \alpha_3(\alpha_1\mathbf{s}_1 + \alpha_2\mathbf{s}_2) \cdot \mathbf{s}_3 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \quad (6.71)$$

上式为零的条件是: $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3$, 或三个旋量共面.

6.4.4 零旋距的四阶旋量系的组合

定理 6.15 四个线矢量合成为线矢量的充分条件是四线矢量共点, 或者共面, 或者平行.

证明 给定四个线性无关的线矢量 \mathbf{S}_i ($i = 1, 2, \dots, 4$), 其合成旋量的旋距的分子为

$$\begin{aligned} h_{nu} = & \alpha_1\alpha_2\mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_2 + \alpha_1\alpha_3\mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_3 + \alpha_1\alpha_4\mathbf{S}_1 \circ \mathbf{S}_4 + \alpha_2\alpha_3\mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_3 \\ & + \alpha_2\alpha_4\mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_4 + \alpha_3\alpha_4\mathbf{S}_3 \circ \mathbf{S}_4 \end{aligned} \quad (6.72)$$

假设四个线矢量中有一对相交. 不失一般性, 令旋量 \mathbf{S}_3 和 \mathbf{S}_4 相交, 即 $\mathbf{S}_3 \circ \mathbf{S}_4 = 0$. 为了进一步简化论述, 将原点变换到 \mathbf{S}_3 与 \mathbf{S}_4 的交点, 即 $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_4 = \mathbf{0}$, 上述旋距的分子可写为

$$h_{nu} = \alpha_1(\alpha_2 \mathbf{s}_2 + \alpha_3 \mathbf{s}_3 + \alpha_4 \mathbf{s}_4) \cdot \mathbf{r}_1 \times \mathbf{s}_1 + \alpha_2(\alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_3 \mathbf{s}_3 + \alpha_4 \mathbf{s}_4) \cdot \mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_2 \quad (6.73)$$

因而 $h_{nu} = 0$ 的解的分析如下:

(1) 当四个线矢量共点时, 易知 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$, 此时 $h_{nu} = 0$.

(2) 当四个线矢量共面时, 易知混合积 $(\alpha_2 \mathbf{s}_2 + \alpha_3 \mathbf{s}_3 + \alpha_4 \mathbf{s}_4) \cdot \mathbf{r}_1 \times \mathbf{s}_1$ 与 $(\alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_3 \mathbf{s}_3 + \alpha_4 \mathbf{s}_4) \cdot \mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_2$ 为零, 从而 $h_{nu} = 0$

(3) 当四个线矢量相互平行时, 式 (6.73) 可改写为

$$h_{nu} = \alpha_1 \mathbf{s}_1 \times (\alpha_2 \mathbf{s}_2 + \alpha_3 \mathbf{s}_3 + \alpha_4 \mathbf{s}_4) \cdot \mathbf{r}_1 + \alpha_2 \mathbf{s}_2 \times (\alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_3 \mathbf{s}_3 + \alpha_4 \mathbf{s}_4) \cdot \mathbf{r}_2$$

易知 $\mathbf{s}_1 \times (\alpha_2 \mathbf{s}_2 + \alpha_3 \mathbf{s}_3 + \alpha_4 \mathbf{s}_4) = \mathbf{0}$ 且 $\mathbf{s}_2 \times (\alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_3 \mathbf{s}_3 + \alpha_4 \mathbf{s}_4) = \mathbf{0}$, 从而 $h_{nu} = 0$.

综上, 定理得证.

进一步, 当 $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{s}_1 = -\mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_2$ 、 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ 以及 $\mathbf{s}_1 = -\mathbf{s}_2$ 时, 四阶旋量系退化为三阶旋量系. 上面的结论也可以从假设 \mathbf{S}_1 和 \mathbf{S}_2 相交得出. 这也同样引出下列条件, 即 $\mathbf{r}_3 \times \mathbf{s}_3 = -\mathbf{r}_4 \times \mathbf{s}_4$ 、 $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_4$ 以及 $\mathbf{s}_3 = -\mathbf{s}_4$. 定理得证.

综上所述, 两个线矢量合成为线矢量的充分条件是相交或者平行; 三个线矢量为基的旋量系合成为线矢量的充分条件是共面或者共点; 四个线矢量为基的旋量系合成为线矢量的充分条件是共点、共面或者平行.

6.4.5 广义方程与合成线矢量的构造

该问题可概括如下. 假设合成线矢量 $\mathbf{S} = (\mathbf{s}, \mathbf{r} \times \mathbf{s})$ 可以从 n 个具有零旋距的旋量中获得, 则式 (6.54) 可以写为

$$\mathbf{s} = \mathbf{J}_u \boldsymbol{\alpha} \quad (6.74)$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{s} = \mathbf{J}_d \boldsymbol{\alpha} \quad (6.75)$$

式中

$$\mathbf{J}_u = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \cdots, \mathbf{s}_n] \quad (6.76)$$

$$\mathbf{J}_d = [\mathbf{s}_{10}, \mathbf{s}_{20}, \cdots, \mathbf{s}_{n0}] \quad (6.77)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)^T \quad (6.78)$$

将式 (6.74) 表示的 s 代入式 (6.75), 得

$$(\mathbf{A}\mathbf{J}_u - \mathbf{J}_d)\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \quad (6.79)$$

式中, \mathbf{A} 由式 (6.19) 给定. 上式可以视为确定合成旋量是否为线矢量的准则. 如果 \boldsymbol{r} 无解, 则从给定的一组旋量中不可能获得合成线矢量. 这就提出了构造合成线矢量的广义方程.

如果 \boldsymbol{r} 有如下解:

$$\boldsymbol{r} = f(\boldsymbol{\alpha}) \quad (6.80)$$

则该旋量系的组合就是具有零旋距的旋量即线矢量. 式 (6.79) 给出了合成线矢量与组合系数的关系, 式 (6.80) 说明, 具有零旋距的合成旋量的位置向量 \boldsymbol{r} 与组合系数 α_i 有关. 若 $\text{rank } \mathbf{J}_u = 3$, 可以得到下式:

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}_d \boldsymbol{\alpha} (\mathbf{J}_u \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{J}_u^T)^{-1} \quad (6.81)$$

例 6.1 如图 6.4 所示, 给定两个具有零旋距的旋量, $\mathbf{S}_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 1)^T$, $\mathbf{S}_2 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$, 可得下式:

$$\mathbf{S} = \alpha_1 \mathbf{S}_1 + \alpha_2 \mathbf{S}_2 \quad (6.82)$$

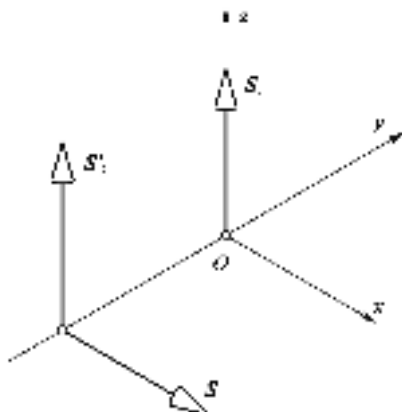


图 6.4 具有零旋距的两旋量合成的几何解释

由式 (6.79), 可得

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 r_y \\ \alpha_1 r_z - \alpha_2 r_x \\ -\alpha_1 r_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (6.83)$$

因此, \mathbf{r} 无解. 从上述由旋量 \mathbf{S}_1 和 \mathbf{S}_2 构造的二阶旋量系中获得的合成旋量是非零旋距的旋量. 用 $\mathbf{S}'_2 = (0, 0, 1, -1, 0, 0)^T$ 代替图 6.4 中的 \mathbf{S}_2 , 可得

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 r_y \\ \alpha_1 r_z - \alpha_2 r_x \\ -\alpha_1 r_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (6.84)$$

二阶旋量系的合成线矢量的位置向量 \mathbf{r} 为

$$\mathbf{r} = (0, -1, 0)^T \quad (6.85)$$

因此, 由 \mathbf{S}_1 和 \mathbf{S}'_2 形成的合成旋量只要通过位置向量 \mathbf{r} , 就是线矢量, 其主部是两旋量主部的组合. 因此, 合成旋量表示如下:

$$\mathbf{S} = \mathbf{s} + \varepsilon \mathbf{r} \times \mathbf{s} \quad (6.86)$$

式中

$$\mathbf{s} = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{k} \quad (6.87)$$

上述求解的几何解释如图 6.4 所示. 由此, 以上理论可用来确定具有零旋距的旋量系的合成旋量是否为线矢量. 若合成旋量为线矢量, 则可进一步通过上述理论获得该合成线矢量.

参考文献

- Ayres, F. (1974) *Theory and Problems of Matrices*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, NY.
- Ball, R.S. (1871) The theory of screws, a geometrical study of the kinematics, equilibrium, and small oscillations of a rigid body, *Transactions of the Royal Irish Academy*, **25**: 137-217.
- Ball, R.S. (1900) *A Treatise on the Theory of Screws*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Birkhoff, G. and MacLane, S.M. (1997) *A Survey of Modern Algebra*, 4th Edition, Macmillan Publishing Co., Inc., New York, Collier Macmillan Publishers, London.
- Brand, L. (1947) *Vector and Tensor Analysis*, Wiley, New York.
- Dai, J.S. (1993) Chapter 3: New look at properties of screws and screw systems, *Screw Image Space and Its Applications to Robotics*, PhD Dissertation, University of Salford, Manchester.

- Dai, J.S. (2014) *Screw Algebra and Kinematics Approaches for Mechanisms and Robotics*, Springer, London.
- Dai, J.S., Huang, Z. and Lipkin, H. (2004) Screw system analysis of parallel mechanisms and applications to constraint and mobility study, *Proc of the 28th Biennial Mechanisms and Robotics Conference*, Sept. 28-Oct. 2, Salt Lake City.
- Dai, J.S., Huang, Z. and Lipkin, H. (2006) Mobility of overconstrained parallel mechanisms, *ASME J. Mech. Des.*, **128**(1): 220-229.
- Dimentberg, F.M. (1965) *The Screw Calculus and Its Application to Mechanics* (in Russian), Izdat. Nauka, Moscow.
- Duffy, J. (1990) The fallacy of modern hybrid control theory that is based on 'orthogonal complements' of twist and wrench spaces, *J. Robot. Syst.*, **7**(2): 139-144.
- Hunt, K.H. (1967) Screw axes and mobility in spatial mechanisms via the linear complex, *J. Mechanisms*, **2**(3): 307-327.
- Hunt, K.H. (1978) *Kinematic geometry of mechanisms*, Oxford University Press, London.
- Kerr, D.R. and Sanger, D.J. (1989) The inner product in the evaluation of reciprocal screws, *Mech. Mach. Theory*, **24**(2): 87-92.
- Klein, F. (1871) Notiz betreffend den Zusammenhang der Linien-geometrie mit der Mechanik starrer Körper, *Math. Ann*, **IV**: 403-415.
- Knuth, D.E. (1981) *The Art of Computer Programming*, Vol. 2 (Seminumerical Algorithms), 2nd Edition, Addison-Wesley, Reading Mass.
- Mises, R.V. (1924) Motorrechnung: Ein neues hilfsmittel in der mechanik, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **4**(2): 155-181. Trans: Baker, E.J., and Wolhart, K. (1996) *Motor Calculus: A New Theoretical Device for Mechanics*, Institute for Mechanics, University of Technology, Graz, Austria.
- Sugimoto, K. and Duffy, J. (1982) Application of linear algebro to screw systems, *Mech. Mach. Theory*, **17**(1): 73-83.
- Woods, F.S. (1922) *Higher Geometry*, ginn and company, Reprinted at Dover Publ., 1961.

第七章 旋量系关联关系理论

旋量系理论在研究机构运动学与静力学及向量空间方面起着重要的作用。旋量系间的关联关系是研究旋量系的集合与子空间运算的基础,也是在串联机构与并联机构综合以及运动与力分析中求解互易旋量系的基础。Ball (1900) 研究了两旋量系的共有旋量, Waldron (1966) 则从接触几何学的角度探索了两旋量系间的特殊关系。Gibson 和 Hunt (1990a, b) 以及 Rico Martinez 和 Duffy (1992) 通过检验每个旋量系的互易基列举了旋量系与其互易旋量系的关联关系。Dai 和 Rees Jones (2001) 提出了旋量系关联关系理论以揭示旋量系与对应的互易旋量系之间的关联特性。

本章基于集合论讨论了旋量系与对应的互易旋量系的关联关系,提出了旋量系间关联关系的引理、定理及推论。该理论可应用于一阶、二阶与三阶旋量系及其对应的五阶、四阶与三阶互易旋量系。该理论也可用来预测互易旋量系以及与所依存的旋量系的关联关系,并通过选择旋量来设计系统,以获得旋量系与其互易旋量系之间所希望的交集。

7.1 旋量系关联关系定理

7.1.1 旋量系与互易旋量系

旋量系 \mathcal{S} 是可用一组线性无关的旋量的线性组合表示的所有旋量的集

合,也可表述为所有与一组线性无关旋量线性相关的旋量的集合.互易旋量系是所有与其依托的旋量系互易的旋量的集合.

引理 7.1 给定 n 阶旋量系 S_A , 所有与该旋量系互易的旋量组成 $6-n$ 阶旋量系 S_B . 反之, 所有与旋量系 S_B 互易的旋量形成旋量系 S_A .

引理 7.2 旋量成为旋量系与其互易旋量系的交集的必要条件是具有零旋距或无穷大旋距, 此时该旋量为 Klein 二次曲面上的点.

该条件可以用来进一步推断该交集的特性, 并推导出 7.1.2 节关于旋量系与其互易旋量系交集的充分必要条件.

引理 7.3 满足 Klein 型的二次型为零, 并与其所在旋量系的其他旋量互易的旋量, 与该旋量系的互易旋量系是线性相关的, 即该旋量属于其所在旋量系与其互易旋量系的交集.

定义 7.1 协互易旋量系由 k 个线性无关旋量 $S_i (i = 1, 2, \dots, k \leq 6)$ 组成的旋量系, 当该 k 个旋量相互互易时, 该旋量系称为协互易旋量系.

推论 7.1 在协互易旋量系中, 如所有旋量为自互易, 即所有旋量 Klein 型的二次型为零, 则该协互易旋量系与其互易旋量系全交.

为了确定两个旋量系之间的关联关系, 必须首先确定两个旋量系的并集与交集以及其阶数.

7.1.2 旋量系交集定理

在本书中, 旋量系表示为 $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, 其中 n 个旋量线性无关. 其互易旋量系表示为 $S^r = \{S_1^r, S_2^r, \dots, S_{6-n}^r\}$, 其中上标 r 表示与初始旋量系互易的旋量.

Ball (1900) 指出, 旋量系及其互易旋量系的阶数理论可以用来判别某一旋量是否属于其所在旋量系或该系的互易旋量系. 基于此, 定理 7.1 表述如下.

定理 7.1 旋量与旋量系关联关系定理: n 阶旋量系 S 的 n 个线性无关旋量的集合可用矩阵形式表示为

$$J_S = [S_1, S_2, \dots, S_n] \quad (7.1)$$

与其互易的 $6-n$ 阶旋量系 \mathbb{S}^r 的矩阵形式为

$$\mathbf{J}_{\mathbb{S}^r} = [\mathbf{S}_1^r, \mathbf{S}_2^r, \dots, \mathbf{S}_{6-n}^r] \quad (7.2)$$

由此旋量与旋量系及其互易旋量系的三个命题始终成立.

(1) 与旋量系 \mathbb{S} 互易的旋量与互易旋量系 \mathbb{S}^r 线性相关, 反之亦然. 这可以表述为: 对旋量 \mathbf{S} , 存在下式:

$$\text{当且仅当 } \mathbf{S}^T \Delta \mathbf{J}_{\mathbb{S}} = \mathbf{0}^T \text{ 时, } \mathbf{S} \in \mathbb{S}^r \quad (7.3)$$

(2) 与互易旋量系 \mathbb{S}^r 互易的旋量与旋量系 \mathbb{S} 线性相关, 反之亦然. 这可以表述为: 对旋量 \mathbf{S} , 存在下式:

$$\text{当且仅当 } \mathbf{S}^T \Delta \mathbf{J}_{\mathbb{S}^r} = \mathbf{0}^T \text{ 时, } \mathbf{S} \in \mathbb{S} \quad (7.4)$$

(3) 旋量属于两旋量系交集的充分必要条件是旋量与两旋量系均互易. 这可以表述为, 对旋量 \mathbf{S} , 存在下式:

$$\text{当且仅当 } \mathbf{S}^T \Delta \mathbf{J}_{\mathbb{S}} = \mathbf{0}^T, \mathbf{S}^T \Delta \mathbf{J}_{\mathbb{S}^r} = \mathbf{0}^T \text{ 时, } \mathbb{S} \cap \mathbb{S}^r = \{\mathbf{S} | \mathbf{S} \in \mathbb{S}, \mathbf{S} \in \mathbb{S}^r\} \quad (7.5)$$

式中, Δ 为对偶算子, 由式(2.55) 给出, 其作用是对旋量主部和副部进行交换.

定理 7.1 中的命题 (1) 与 (2) 可根据旋量互易与互易旋量系的定义证明, 下面仅给出定理 7.1 中命题 (3) 的证明.

证明 如果旋量 \mathbf{S} 与旋量系 \mathbb{S} 及其互易旋量系 \mathbb{S}^r 旋量系均互易, 即 $\mathbf{S}^T \Delta \mathbf{J}_{\mathbb{S}} = \mathbf{0}^T, \mathbf{S}^T \Delta \mathbf{J}_{\mathbb{S}^r} = \mathbf{0}^T$. 由 $\mathbf{S}^T \Delta \mathbf{J}_{\mathbb{S}} = \mathbf{0}^T$, 可知 $\mathbf{S} \in \mathbb{S}^r$; 同样由 $\mathbf{S}^T \Delta \mathbf{J}_{\mathbb{S}^r} = \mathbf{0}^T$, 可知 $\mathbf{S} \in \mathbb{S}$. 所以 $\mathbf{S} \in \mathbb{S}^r$ 且 $\mathbf{S} \in \mathbb{S}$, 即

$$\mathbf{S} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{S}^r \quad (7.6)$$

充分性得证.

下面证明必要性. 如果旋量 $\mathbf{S} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{S}^r$, 则 $\mathbf{S} \in \mathbb{S}$ 且 $\mathbf{S} \in \mathbb{S}^r$. 由 $\mathbf{S} \in \mathbb{S}$ 可知旋量 \mathbf{S} 与旋量系 \mathbb{S}^r 互易, 由 $\mathbf{S} \in \mathbb{S}^r$ 可知旋量 \mathbf{S} 与旋量系 \mathbb{S} 互易. 所以旋量 \mathbf{S} 与旋量系 \mathbb{S} 与 \mathbb{S}^r 均互易, 从而可得 $\mathbf{S}^T \Delta \mathbf{J}_{\mathbb{S}} = \mathbf{0}^T, \mathbf{S}^T \Delta \mathbf{J}_{\mathbb{S}^r} = \mathbf{0}^T$. 综上, 定理得证.

推论 7.2 f 阶旋量系为 n 阶旋量系与 $6-n$ 阶互易旋量系交集的必要条件是 f 阶旋量系为由自互易旋量组成的协互易旋量系.

证明 设 f 阶旋量系由 f 个线性无关旋量 $S_i (i = 1, 2, 3)$ 组成. 由于 f 阶旋量系为 n 阶旋量系与 $6-n$ 阶互易旋量系交集, 不失一般性, 设 f 阶旋量系为 n 阶旋量系的子集. 先检查 S_1 , 由定理 7.1 可知, S_1 与 n 阶旋量系和 $6-n$ 阶互易旋量系均互易, 且易知 S_1 为自互易旋量. 由此, 旋量 S_1 与 f 阶旋量系中的 $f-1$ 个旋量互易并自互易. 同理, 旋量 S_i 与 f 阶旋量系中的 $f-1$ 个旋量互易, 并自互易. 综上可得, f 阶旋量系中 f 个线性无关旋量 S 为自互易旋量, 并相互互易, 即为协互易旋量系且所有旋量自互易. 定理得证.

7.1.3 旋量系关联关系定理

如果一个旋量是两个旋量系的交集, 那么两旋量系并集的阶数需要从各旋量系的阶数和中减去该交集的阶数, 如式 (6.51). 基于此, 本书进一步提出旋量系关联关系定理.

定理 7.2 旋量系关联关系定理 对于一个 n 阶旋量系 S 与其 $6-n$ 阶互易旋量系 S^r , 有下列三个命题成立.

(1) 若旋量系的基中不存在与该旋量系中所有旋量均互易的旋量 (含自身), 则两旋量系不相交, 交集是空集, 即

$$S \cap S^r = \emptyset \quad (7.7)$$

且并集的阶数是 6 (空交集).

(2) 若旋量系的基中存在一个旋量与该旋量系中所有旋量互易 (含自身), 则该旋量张成的一阶旋量系 ${}^1S ({}^1S \subseteq S)$ 为相应旋量系与其互易旋量系的交集, 即

$$S \cap S^r = {}^1S \quad (7.8)$$

且两旋量系并集的阶数减少一维 (一维交集).

(3) 若旋量系的基中存在 f 个旋量 $S_i (i = 1, 2, 3)$ 与该旋量系中所有旋量互易 (含自身), 则该 f 个旋量张成的 f 阶旋量系 fS 为相应旋量系与其互易旋量系的交集, 即

$$S \cap S^r = {}^fS = \{S_1, S_2, \dots, S_f | S_1, S_2, \dots, S_f \in S, S_1, S_2, \dots, S_f \in S^r\} \quad (7.9)$$

且两旋量系并集的阶数减少 f 维 (多维交集).

该关联关系定理适用于有限和无穷大旋距的旋量系. 可以通过研究一个旋量系或者其互易旋量系中的旋量结构确定两个旋量系之间的关联关系. 为简单起见, 我们通常研究两旋量系中阶数较小的旋量系. 该定理按交集类型分为三部分, 即空交集、一维交集与多维交集. 下面进行分别阐述和证明.

1. 空交集

证明 假设下述命题成立: 即存在旋量 $\mathbf{S} \in \mathbb{S}$ 与所属旋量系所有旋量互易, 且交集为空集, 有下式:

$$\mathbf{S}^T \Delta \mathbf{J}_S = \mathbf{0}^T \quad (7.10)$$

由定理 7.1 中的命题 (3) 给出的充分必要条件可知 \mathbf{S} 为两旋量的交集, 表示为

$$\mathbf{S} \in \mathbb{S}, \quad \mathbf{S} \in \mathbb{S}^r$$

不难看出, 交集不为空集, 这与假设命题矛盾. 所以, 原命题为真. 定理得证. 因此, 式 (7.7) 成立, 两旋量系交集为空集. 同时由式 (6.51) 可知, 两个旋量系并集的阶数为

$$\dim(\mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B) = n + (6 - n) - 0 = 6 \quad (7.11)$$

至此, 如图 7.1a 所示, 两旋量系的关联关系为

$$\mathbb{S} \cup \mathbb{S}^r = \mathbb{R}^6 \quad (7.12)$$

定理第一部分得证.

2. 一维交集

证明 设旋量系的基中仅存在一个旋量 \mathbf{S} 与该旋量系中所有旋量互易, \mathbf{S}_i 为由旋量 \mathbf{S} 张成的一阶旋量系 ${}^1\mathbb{S}$ 中的任意一个旋量, 则 \mathbf{S}_i 可表示为 $\lambda\mathbf{S}$, 因为 \mathbf{S} 与旋量系 \mathbb{S} 中所有旋量互易, 则 \mathbf{S}_i 与旋量系 \mathbb{S} 中所有旋量互易, 有

$$\mathbf{S}_i^T \Delta \mathbf{J}_S = \mathbf{0}^T$$

由定理 7.1 中的命题 (1) 可得 $\mathbf{S}_i \in \mathbb{S}^r$, 从而 ${}^1\mathbb{S} \subseteq \mathbb{S}^r$. 又因为 ${}^1\mathbb{S} \subseteq \mathbb{S}$, 因此, ${}^1\mathbb{S}$ 为两旋量的交集. 同时由式 (6.51) 可知, 两个旋量系并集的阶数为

$$\dim(\mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B) = n + (6 - n) - 1 = 5 \quad (7.13)$$

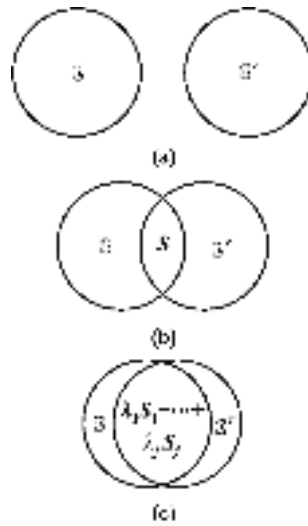


图 7.1 旋量系的关联关系

如图 7.1b 所示, 两旋量系的关系为

$$S \cup S' = \mathbb{R}^5 \tag{7.14}$$

定理第二部分得证.

注释 7.1 一维交集情况下, 上述旋量 S 为自互易旋量.

3. 多维交集

证明 不失一般性, 对旋量 $S_i (i = 1, \dots, f \leq 3)$ 有下式:

$$S_i^T \Delta J_S = \mathbf{0}^T, (i = 1, \dots, f \leq 3)$$

设旋量 S 为 f 阶旋量系 fS 中的任意一个旋量, 则 S 可表示为

$$S = \lambda_1 S_1 + \dots + \lambda_f S_f$$

进一步可得

$$\begin{aligned} S^T \Delta J_S &= (\lambda_1 S_1 + \dots + \lambda_f S_f) \Delta J_S \\ &= \lambda_1 S_1 \Delta J_S + \dots + \lambda_f S_f \Delta J_S \\ &= \mathbf{0}^T \end{aligned} \tag{7.15}$$

由定理 7.1 中的命题 (1) 可得 $\mathcal{S} \in \mathcal{S}^r$, 从而 ${}^f\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}^r$. 又因为 ${}^f\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$, 由此 ${}^f\mathcal{S}$ 为两旋量系的交集. 同时由式 (6.51) 可知, 两个旋量系并集的阶数为

$$\dim(\mathcal{S}_A \cup \mathcal{S}_B) = n + (6 - n) - f = 6 - f \quad (7.16)$$

如图 7.1c 所示, 两旋量系的关联关系为

$$\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^r = \mathbb{R}^{6-f} \quad (7.17)$$

定理第三部分得证.

注释 7.2 多维交集情况下, 上述 f 个旋量 $\mathcal{S}_i (i = 1, \dots, f \leq 3)$ 为自互易旋量.

7.2 一阶旋量系与其互易旋量系

7.2.1 一阶旋量系关联关系

推论 7.3 一阶旋量系成为其五阶互易旋量系子集的充分必要条件是
一阶旋量系为自互易旋量系.

证明 考虑由 \mathcal{S}_1 张成的一阶旋量系 ${}^1\mathcal{S}$, 其互易旋量系 ${}^1\mathcal{S}^r$ 为五阶旋量系, 由 $\mathcal{S}_1^r, \mathcal{S}_2^r, \mathcal{S}_3^r, \mathcal{S}_4^r$ 和 \mathcal{S}_5^r 张成, 即 ${}^1\mathcal{S}^r = {}^5\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_1^r, \mathcal{S}_2^r, \mathcal{S}_3^r, \mathcal{S}_4^r, \mathcal{S}_5^r\}$. 如果 \mathcal{S}_1 是自互易旋量, 则它与 ${}^1\mathcal{S}$ 和 ${}^1\mathcal{S}^r$ 均互易, 即 $\mathcal{S}_1^T \Delta \mathcal{J}_S = \mathbf{0}^T$ 且 $\mathcal{S}_1^T \Delta \mathcal{J}_{S^r} = \mathbf{0}^T$, 从而可知其同时也属于五阶互易旋量系, 即 $\{{}^1\mathcal{S} | \mathcal{S}_1 \in {}^1\mathcal{S}\} \subset {}^1\mathcal{S}^r$, 由此充分性得证. 进一步可知, 该旋量为两旋量系的交集, 这两旋量系的并集的阶数是 5, 其关联关系有如下形式:

$${}^1\mathcal{S} \cap {}^1\mathcal{S}^r = \{\mathcal{S}_1 | \mathcal{S}_1 \in {}^1\mathcal{S}, \mathcal{S}_1 \in {}^1\mathcal{S}^r\} \quad (7.18)$$

因此

$${}^1\mathcal{S} \cup {}^1\mathcal{S}^r = \mathbb{R}^5 \quad (7.19)$$

反之, 如果 \mathcal{S}_1 不是自互易旋量, 则一阶旋量系 ${}^1\mathcal{S}$ 就与其互易旋量系不相交. 两旋量系的交集是空集, 并集的阶数是 6, 关系式如下:

$${}^1\mathcal{S} \cap {}^1\mathcal{S}^r = \emptyset \quad (7.20)$$

和

$${}^1\mathbb{S} \cup {}^1\mathbb{S}^r = \mathbb{R}^6 \quad (7.21)$$

下面证明必要性, 若 ${}^1\mathbb{S}$ 为其互易旋量系 ${}^1\mathbb{S}^r$ 的子集, 由定理 7.1, 则 \mathbf{S}_1 与旋量系 ${}^1\mathbb{S}$ 和 ${}^1\mathbb{S}^r$ 均互易, 即 \mathbf{S}_1 为自互易旋量, 从而 ${}^1\mathbb{S}$ 为自互易旋量系, 必要性得证. 综上, 推论得证.

7.2.2 关联关系的识别

一阶旋量系与其五阶互易旋量系的关联关系一般由一阶旋量系的旋量特性推导出, 这种作法往往比从五阶旋量系出发推导简洁.

例 7.1 图 7.2 中给出了一个受约束的立方体, 其五阶约束力旋量系可表示为

$${}^5\mathbb{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}_1 = (1, 0, 0, 0, 1, 1)^T \\ \mathbf{W}_2 = (0, 0, -1, 1, -1, 0)^T \\ \mathbf{W}_3 = (0, -1, 0, -1, 0, -1)^T \\ \mathbf{W}_4 = (-1, 0, 0, 0, 1, 1)^T \\ \mathbf{W}_5 = (0, 0, 1, 1, -1, 0)^T \end{array} \right. \quad (7.22)$$

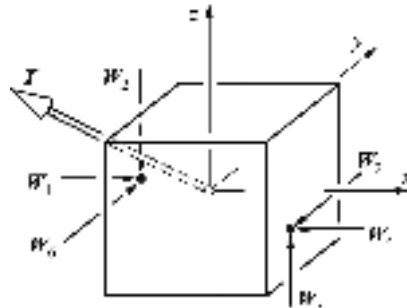


图 7.2 刚体抓持的约束与自由运动

为了完成五个力旋量的约束, 需添加下列反方向的合力以达到力封闭

$$\mathbf{W}_6 = (0, 1, 0, -1, 0, -1)^T \quad (7.23)$$

在这一约束下, 剩余自由运动旋量可表示为

$$\mathbf{T} = (-0.577, -0.577, 0.577, 0, 0, 0)^T \quad (7.24)$$

这形成了一阶旋量系,与上述五阶力旋量系互易.力旋量和运动旋量都采用射线坐标,该坐标系由 2.5 节中所述的空间射线坐标组成.根据前述理论,可以从一阶旋量系中识别这两个旋量系的关联关系.由于运动旋量是自互易的,从推论 7.3 中可知,该运动旋量对应的一阶旋量系是五阶约束力旋量系的子集.从代数运算角度容易证实该结论. Duffy(1990) 阐明了约束力旋量和自由运动旋量并不总是占据整个六维向量空间.

旋量系间的关联关系可进一步通过具有非零旋距的旋量系得到检验.在上述式 (7.22) 中的五阶旋量系中,如果前两个旋量改为具有非零旋距的旋量,其表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{W}'_1 = (1, 0, 0, 1, 1, 1)^T \\ \mathbf{W}'_2 = (1, 0, -1, 1, -1, 0)^T \end{cases} \quad (7.25)$$

保持其余的力旋量相同,由此与该变更后的旋量系互易的旋量为

$$\mathbf{T} = (4, 3, -5, -2, 1, -1)^T \quad (7.26)$$

由推论 7.3 可知,由于旋量 \mathbf{T} 是自互易的,因此构成其五阶旋量系的子集.此外,该结论可通过由所有五个力旋量和运动旋量组成的矩阵的秩的代数运算来证明.

例 7.2 图 7.3 所示的 RPPRR 型串联机器人.每个转动副 R 或移动副 P (Hunt, 1978) 都由一旋量表示.因此,运动副轴线的五个旋量可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{S}_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T \\ \mathbf{S}_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T \\ \mathbf{S}_3 = (0, 0, 0, \cos \theta, \sin \theta, 0)^T \\ \mathbf{S}_4 = (\cos \theta, \sin \theta, 0, 0, 0, 0)^T \\ \mathbf{S}_5 = (-\sin \theta \cos \gamma, \cos \theta \cos \gamma, \sin \gamma, x \sin \theta \sin \gamma, -x \cos \theta \sin \gamma, x \cos \gamma)^T \end{cases} \quad (7.27)$$

这五个旋量线性无关构成了五阶旋量系.与该五阶旋量系互易的力旋量表示为

$$\mathbf{S} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0, -x \sin \theta \tan \gamma, x \cos \theta \tan \gamma, 0)^T \quad (7.28)$$

这就形成了与五阶旋量系互易的一阶旋量系.因为具有旋距 $x \tan \gamma$ (当 $x \neq 0$ 和 $\tan \gamma \neq 0$),从推论 7.3 中可知,该一阶旋量系显然与五阶旋量系不相交.这也可由上述六个旋量组成的矩阵非奇异进行验证.

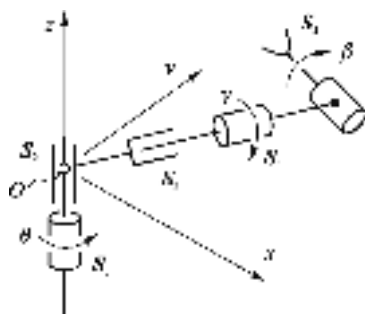


图 7.3 机器人中的五阶旋量系

7.3 二阶旋量系与其互易旋量系

考虑二阶旋量系 ${}^2\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2\}$, 与该旋量系中的旋量互易的旋量形成四阶旋量系, 表示为 ${}^4\mathcal{S} = {}^2\mathcal{S}^r = \{\mathcal{S}_1^r, \mathcal{S}_2^r, \mathcal{S}_3^r, \mathcal{S}_4^r\}$. 两个旋量系的相互关系取决于任意一个旋量系中旋量的特征. 为简单起见, 我们检验二阶旋量系中旋量的特征.

如定理 7.2 所示, 二阶旋量系存在三种情况, 即二阶旋量系的基中无旋量、一个旋量或两个旋量与所在旋量系互易.

7.3.1 空交集

若二阶旋量系的基中不存在与该旋量系中所有旋量互易的旋量, 由定理 7.2, 两旋量系的交集为空集, 即该二阶旋量系与其互易旋量系不相交, 其关联关系式表示如下:

$${}^2\mathcal{S} \cap {}^2\mathcal{S}^r = \emptyset \quad (7.29)$$

$${}^2\mathcal{S} \cup {}^2\mathcal{S}^r = \mathbb{R}^6 \quad (7.30)$$

例 7.3 Rico Martinez 和 Duffy (1992b) 使用下列旋量系来表示一种旋量系类型与其互易旋量系间的关联关系, 这一特殊二阶旋量系为

$${}^2\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}_1 = (1, 0, 0, h_f, 0, 0)^T \\ \mathcal{S}_2 = (0, 1, 0, 0, h_f, 0)^T \end{array} \right\} \quad (7.31)$$

该二阶旋量系与其对应的四阶互易旋量系 ${}^2\mathcal{S}^r$ 的关联关系可以通过定理 7.2 得到. 尽管这两个旋量互易, 但并不自互易, 即 $\mathcal{S}_1^T \Delta \mathcal{J}_S \neq \mathbf{0}^T$ 和 $\mathcal{S}_2^T \Delta \mathcal{J}_S \neq$

$\mathbf{0}^T$. 因此, 两旋量系 ${}^2\mathcal{S}$ 和 ${}^2\mathcal{S}^r$ 不相交.

例 7.4 图 7.4 给出了圆柱副 C 的约束与自由度, 其约束力旋量形成了一个四阶旋量系, 表示为

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T \\ \mathbf{W}_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T \\ \mathbf{W}_3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T \\ \mathbf{W}_4 = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T \end{array} \right\} \quad (7.32)$$

与上述旋量系互易的两个运动旋量形成了二阶旋量系, 表示为

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T \\ \mathbf{T}_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T \end{array} \right\} \quad (7.33)$$

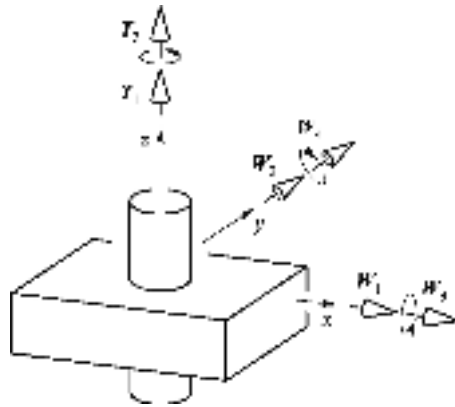


图 7.4 四阶约束力旋量系与互易的二阶运动旋量系

尽管这两个运动旋量自互易, 但相互之间不存在互易关系, 因此该二阶运动旋量系与四阶约束力旋量系不相交. 两旋量系并集的阶数是 6.

7.3.2 部分交集

本小节研究二阶旋量系的基中包含一个与该旋量系中其他旋量均互易的自互易旋量的情况. 不失一般性, 假设旋量 \mathbf{S}_1 与该旋量系其他旋量互易, 且自互易, 由定理 7.2 可知, \mathbf{S}_1 与两旋量系同时互易, 即 \mathbf{S}_1 为两旋量系的交集, 其关联关系式表示如下:

$${}^2\mathcal{S} \cap {}^2\mathcal{S}^r = \{\mathbf{S}_1 | \mathbf{S}_1 \in {}^2\mathcal{S}, \mathbf{S}_1 \in {}^2\mathcal{S}^r\} \quad (7.34)$$

$${}^2\mathbb{S} \cup {}^2\mathbb{S}^r = \mathbb{R}^5 \quad (7.35)$$

例 7.5 将 7.3.1 节式 (7.31) 中旋距为 h_f 的旋量 \mathbf{S}_2 改为 $\mathbf{S}_{2'} = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$. 此时由 \mathbf{S}_1 和 $\mathbf{S}_{2'}$ 组成的二阶旋量系 ${}^2\mathbb{S}$ 与其互易的四阶旋量系 ${}^2\mathbb{S}^r$ 的关联关系也发生改变. 由于修改后的 $\mathbf{S}_{2'}$ 为自互易旋量, 且与 \mathbf{S}_1 互易, 因此 $\mathbf{S}_{2'}^T \Delta \mathbf{J}_S = \mathbf{0}^T$. 由定理 7.2, $\mathbf{S}_{2'}$ 为两旋量系的交集. 由此两旋量系 ${}^2\mathbb{S}$ 和 ${}^2\mathbb{S}^r$ 并集的阶数是 5, 关系式如下:

$${}^2\mathbb{S} \cap {}^2\mathbb{S}^r = \{\mathbf{S}_{2'} | \mathbf{S}_{2'} \in {}^2\mathbb{S}, \mathbf{S}_{2'} \in {}^2\mathbb{S}^r\} \quad (7.36)$$

$${}^2\mathbb{S} \cup {}^2\mathbb{S}^r = \mathbb{R}^5 \quad (7.37)$$

与 Rico Martinez 和 Duffy (1992b) 对每一旋量系逐一得出的交并集结论比较, 上述由定理 7.2 得出的交并集结论具有统一性.

7.3.3 全交集

全相交为二阶旋量系自身特性的第三种情况. 在这种情况下, 二阶旋量系 ${}^2\mathbb{S}$ 是协互易旋量系. 该旋量系中有两个线性无关的旋量彼此互易且自互易, 即 $\mathbf{S}_1^T \Delta \mathbf{J}_S = \mathbf{0}^T$ 且 $\mathbf{S}_2^T \Delta \mathbf{J}_S = \mathbf{0}^T$, 则

$${}^2\mathbb{S} \cap {}^2\mathbb{S}^r = \{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 | \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \in {}^2\mathbb{S}, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \in {}^2\mathbb{S}^r\} = {}^2\mathbb{S} \quad (7.38)$$

因而旋量并集是

$${}^2\mathbb{S} \cup {}^2\mathbb{S}^r = \mathbb{R}^4 \quad (7.39)$$

这种关联关系在互易旋量出现之前就得到了预测. 下面给出一个约束与自由运动分析的例子.

例 7.6 如图 7.5 所示, 一个圆柱体受到由三个力旋量构成的二阶旋量系的约束作用.

这三个力旋量为

$$\begin{cases} \mathbf{W}_1 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T \\ \mathbf{W}_2 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T \end{cases} \quad (7.40)$$

和

$$\mathbf{W}_3 = \lambda_1 \mathbf{W}_1 + \lambda_2 \mathbf{W}_2 \quad (7.41)$$

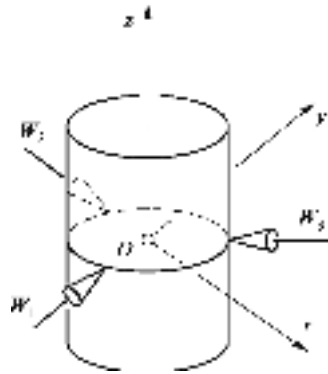


图 7.5 圆柱体的二阶约束旋量系

式中, 力旋量 \mathbf{W}_3 是力旋量 \mathbf{W}_1 和 \mathbf{W}_2 的线性组合. 与三个力旋量构成的二阶旋量系互易的运动旋量形成了四阶旋量系. 因为该二阶旋量系中的力旋量 \mathbf{W}_1 和 \mathbf{W}_2 彼此互易且自互易, 所以从定理 7.2 可推断出, 这两个力旋量形成的旋量系是它的四阶互易运动旋量系的子集. 这可通过下面的与其互易的运动旋量证明, 四个互易运动旋量为

$$\begin{cases} \mathbf{T}_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T \\ \mathbf{T}_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T \\ \mathbf{T}_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T \\ \mathbf{T}_4 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T \end{cases} \quad (7.42)$$

显然, 前述三个力旋量构成的二阶旋量系是上述由四个运动旋量构成的四阶旋量系的子集, 同时为两旋量系交集.

7.3.4 协互易旋量系

7.3.3 节给出的例子说明一个四阶旋量系可以包含一个与其互易二阶旋量系. 该结论可以拓展如下.

推论 7.4 关于协互易旋量系与其互易旋量系, 有以下命题成立:

- (1) 由自互易旋量组成的协互易旋量系与其互易旋量系全交;
- (2) 若由自互易旋量组成的协互易旋量系的阶数为 3, 则其对应的互易旋量系也是协互易旋量系.

证明 给定一个由自互易旋量组成的协互易旋量系 $\mathbb{S}_{co} = \{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_f\}$, 其互易旋量系为 $\mathbb{S}_{co}^r = \{\mathbf{S}_1^r, \mathbf{S}_2^r, \dots, \mathbf{S}_{6-f}^r\}$. 不失一般性, 假设 $f \leq 3$. 从协互易旋量系的特征可知 $\mathbf{J}_{\mathbb{S}_{co}}^T \Delta \mathbf{J}_{\mathbb{S}_{co}} = \mathbf{0}$, 又由 $\mathbf{J}_{\mathbb{S}_{co}}^T \Delta \mathbf{J}_{\mathbb{S}_{co}^r} = \mathbf{0}$, 由定理 7.2 可得 $\mathbb{S}_{co} \cap \mathbb{S}_{co}^r = \mathbb{S}_{co}$. 推论第一部分得证.

当 $n = 3$ 时, 两旋量系全交. 假设推论 7.4 中第二部分关于 3 阶协互易旋量系的陈述为假命题, 即在互易旋量系中存在旋量不与该旋量系互易. 不失一般性, 假设该旋量是 \mathbf{S}_1^r , 则 $\mathbf{S}_1^{rT} \Delta \mathbf{J}_{\mathbb{S}_{co}^r} \neq \mathbf{0}^T$, 即 $\mathbf{S}_1^r \notin \mathbb{S}_{co}$, 从而 $\mathbf{S}_1^r \notin \mathbb{S}_{co} \cap \mathbb{S}_{co}^r$, 这与推论第一部分关于两个旋量系全交集的陈述矛盾. 因此, 在对应的互易旋量系中, 任意旋量均与该旋量系互易, 即对应的互易旋量系为协互易旋量系. 由此, 推论第二部分得证.

以上关联关系理论可以用来指导所有旋量系与其对应的互易旋量系的关联关系. 由该理论得出的旋量系关联关系与 Gibson 和 Hunt (1990a, b) 列举的每一个旋量系交集与并集的陈述是一致的.

7.4 三阶旋量系与其互易旋量系

与三阶旋量系 ${}^3\mathbb{S} = \{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3\}$ 互易的旋量可构成另一个三阶旋量系 ${}^3\mathbb{S}^r = \{\mathbf{S}_1^r, \mathbf{S}_2^r, \mathbf{S}_3^r\}$. 根据三阶旋量系自身特性的不同, 两个旋量系关联关系可分为下述四种情况.

7.4.1 空交集

若三阶旋量系 ${}^3\mathbb{S}$ 中不存在与该旋量系中其他旋量互易并自互易的旋量, 则交集为空集, 即旋量系 ${}^3\mathbb{S}$ 与互易旋量系 ${}^3\mathbb{S}^r$ 不相交. 由此, 两旋量系的并集的阶数为 6, 其关联关系式可表示为

$${}^3\mathbb{S} \cap {}^3\mathbb{S}^r = \emptyset \quad (7.43)$$

$${}^3\mathbb{S} \cup {}^3\mathbb{S}^r = \mathbb{R}^6 \quad (7.44)$$

7.4.2 一维交集

若三阶旋量系 ${}^3\mathbb{S}$ 的基中存在一个自互易旋量与该旋量系中其他旋量互易. 不失一般性, 假设旋量 \mathbf{S}_1 与 \mathbf{S}_2 和 \mathbf{S}_3 互易而且自互易, 则它与整个

旋量系 ${}^3\mathbb{S}$ 互易. 由定理 7.1 可知, 旋量 \mathbf{S}_1 也与 ${}^3\mathbb{S}^r$ 互易. 因此, 它与两旋量系 ${}^3\mathbb{S}$ 和 ${}^3\mathbb{S}^r$ 都线性相关, 是两旋量系的交集, 其关联关系式表示如下:

$${}^3\mathbb{S} \cap {}^3\mathbb{S}^r = \{\mathbf{S}_1 | \mathbf{S}_1 \in {}^3\mathbb{S}, \mathbf{S}_1 \in {}^3\mathbb{S}^r\} \quad (7.45)$$

$${}^3\mathbb{S} \cup {}^3\mathbb{S}^r = \mathbb{R}^5 \quad (7.46)$$

下面给出一个例子说明应用定理 7.1 寻找一个旋量来构造上述三阶旋量系.

例 7.7 本例的基本依据为 Gibson 和 Hunt(1990b) 给出的正则三阶旋量系. 从给定的两个正则旋量 $\mathbf{S}_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ 和 $\mathbf{S}_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$, 要求产生第三个旋量, 以保证该旋量系与其互易旋量系的交集为一维向量空间, 从而使得两旋量系并集的阶数为 5. 旋量 \mathbf{S}_1 和 \mathbf{S}_2 为协互易旋量且自互易, 由此第三个旋量除满足与 \mathbf{S}_1 及 \mathbf{S}_2 线性无关的条件外, 还只能与其中一个旋量互易. 这样产生的第三正则旋量有以下两种可能:

$$\mathbf{S}_3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T \quad (7.47)$$

$$\mathbf{S}_{3'} = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T \quad (7.48)$$

上述两种可能都满足下列条件: 形成一个三阶旋量系并产生两个旋量系的交集. 如果选取旋量 \mathbf{S}_3 为第三个旋量, 则 \mathbf{S}_2 成为该旋量系与其互易旋量系的交集, 两旋量系并集的阶数是 5. 如果选取旋量 $\mathbf{S}_{3'}$ 为第三个旋量, 则 \mathbf{S}_1 是两旋量系的交集, 其并集的阶数是 5.

7.4.3 多维交集

第三种情况, 三阶旋量系 ${}^3\mathbb{S}$ 中存在两个线性无关的旋量与该旋量系互易. 不失一般性, 假设旋量 \mathbf{S}_1 和 \mathbf{S}_2 彼此互易且自互易, 也与旋量 \mathbf{S}_3 互易. 此时旋量 \mathbf{S}_1 和 \mathbf{S}_2 构成两旋量系的交集, 两旋量关联关系表示如下:

$${}^3\mathbb{S} \cap {}^3\mathbb{S}^r = \{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 | \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \in {}^3\mathbb{S}, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \in {}^3\mathbb{S}^r\} \quad (7.49)$$

$${}^3\mathbb{S} \cup {}^3\mathbb{S}^r = \mathbb{R}^4 \quad (7.50)$$

7.4.4 全交集

第四种情况, 旋量系 ${}^3\mathbb{S}$ 中存在三个线性无关的旋量, 相互互易并且自互易, 则该旋量系为协互易旋量系. 假设三个旋量 \mathbf{S}_1 、 \mathbf{S}_2 和 \mathbf{S}_3 是自互易旋量, 又是相互互易的旋量. 由此, 两旋量系产生全交集. 由推论 7.4 可给出两旋量系关联关系, 其表达式为

$${}^3\mathbb{S} \cap {}^3\mathbb{S}^r = {}^3\mathbb{S} \quad (7.51)$$

$${}^3\mathbb{S} \cup {}^3\mathbb{S}^r = \mathbb{R}^3 \quad (7.52)$$

例 7.8 如图 7.6, 由在 z 轴方向的力和在 $x-y$ 平面内的两个力偶施加的约束力旋量为

$$\begin{cases} \mathbf{W}_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T \\ \mathbf{W}_2 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T \\ \mathbf{W}_3 = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T \end{cases} \quad (7.53)$$

上述旋量形成一个三阶旋量系. 与上述旋量互易的运动旋量为

$$\begin{cases} \mathbf{T}_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T \\ \mathbf{T}_2 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T \\ \mathbf{T}_3 = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T \end{cases} \quad (7.54)$$

显然, 因为三阶力旋量系是一个协互易基, 两个旋量系全交, 其并集阶数为三.

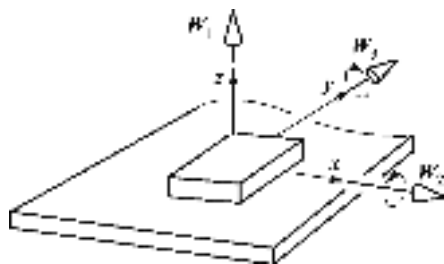


图 7.6 约束与运动旋量系的全交集

7.5 具有协互易基的旋量系

旋量系与其互易旋量系的关联关系理论给出了一种由已知旋量系获得其互易旋量系的新方法. 给定一个 n 阶旋量系, 如果在其互易旋量系中存

在 $6-n$ 个线性无关的旋量, 彼此相互互易且满足 Klein 型的二次型为零, 则该旋量系构成全交集. 因此, 基于上述线性无关的 $6-n$ 个旋量的其他旋量均可以选作互易旋量, 这样就可以避免用较为复杂的代数法计算互易旋量.

特别地, 对于一个协互易旋量系, 如推论 7.4 所述, 由于两旋量系全交, 其互易旋量系可以直接从协互易旋量系中获得.

例 7.9 图 7.7 中给出了一组由三个线性无关的旋量来表示的串联机器人.

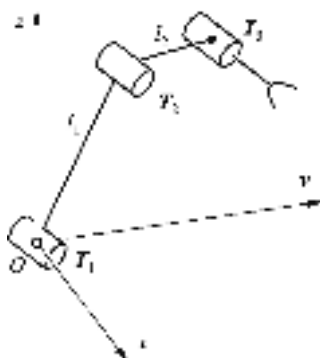


图 7.7 协互易旋量系的物理解释

三个运动旋量表示为

$$\begin{cases} \mathbf{T}_1 = (\cos \theta, \sin \theta, 0, 0, 0, 0)^T \\ \mathbf{T}_2 = (\cos \theta, \sin \theta, 0, -l_1 \cos \varphi \sin \theta, l_1 \cos \varphi \cos \theta, 0)^T \\ \mathbf{T}_3 = (\cos \theta, \sin \theta, 0, -(l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \xi) \sin \theta, (l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \xi) \cos \theta, 0)^T \end{cases} \quad (7.55)$$

这三个运动旋量相互平行, 形成一个三阶旋量系. 该旋量系是一个协互易旋量系且每个旋量自互易. 大多数情况需要计算得出与该旋量系互易的力旋量系. 从推论 7.4 中可知, 与由自互易旋量组成的协互易运动旋量系互易的力旋量系与该三阶旋量系全交. 由此运动旋量系与其互易的力旋量系并集的阶数是 3. 因而, 与上述运动旋量互易的力旋量可以采用上述三阶旋量系中旋量的组合得到, 唯一的要求是三个具有力幅值的旋量必须是线性无关

的. 因而这三个力旋量可写为

$$\begin{cases} \mathbf{W}_1 = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0, -l_1 \cos \varphi \sin \theta, l_1 \cos \varphi \cos \theta, l_1 \sin \varphi)^T \\ \mathbf{W}_2 = (3 \cos \theta, 3 \sin \theta, 0, 0, 0, 0)^T \\ \mathbf{W}_3 = (\cos \theta, \sin \theta, 0, -(l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \xi) \sin \theta, (l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \xi) \cos \theta, 0)^T \end{cases} \quad (7.56)$$

这两个旋量系是协互易旋量系并且全交.

参考文献

- Ball, R.S. (1900) *A Treatise on the Theory of Screws*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Blyth, T.S. (1975) *Set Theory and Abstract Algebra*, Longman, London and New York.
- Dai, J.S. (1993) Chapter 3: New look at properties of screws and screw system, *Screw Image Space and Its Application to Robotic Grasping*, PhD Dissertation, University of Salford, Manchester.
- Dai, J.S. and Rees Jones, J. (2001) Interrelationship between screw systems and corresponding reciprocal systems and applications, *Mech. Mach. Theory*, **36**(5): 633-651.
- Dai, J.S. (2014) *Screw Algebra and Kinematic Approaches for Mechanisms and Robotics*, Springer, London.
- Dimentberg, F.M. (1965) *The Screw Calculus and Its Application to Mechanics* (in Russian), Izdat. Nauka, Moscow.
- Duffy, J. (1990) The fallacy of modern hybrid control theory that is based on 'orthogonal complements' of twist and wrench spaces, *J. Robot. Syst.* **7**(2): 139-144.
- Gibson, C.G. and Hunt, K.H. (1990a) Geometry of screw systems-1, screws: Genesis and geometry, *Mech. Mach. Theory*, **25**(1): 1-10.
- Gibson, C.G. and Hunt, K.H. (1990b) Geometry of screw systems-2: Classification of screw systems, *Mech. Mach. Theory*, **25**(1): 11-27.
- Hunt, K.H. (1978) *Kinematic geometry of mechanisms*, Clarendon Press, Oxford.
- Rico Martinez, J.M. and Duffy, J. (1992a) Orthogonal spaces and screw systems, *Mech. Mach. Theory*, **27**(4): 451-458.
- Rico Martinez, J.M. and Duffy, J. (1992b) Classification of screw systems I. One-and two-systems, *Mech. Mach. Theory*, **27**(4): 459-470.
- Rico Martinez, J.M. and Duffy, J. (1992c) Classification of screw systems II: Three-systems, *Mech. Mach. Theory*, **27**(4): 471-490.
- Waldron, K.J. (1966) The constraint analysis of mechanisms, *Mechanisms*, **1**(2): 101-114.

第八章 旋量系零空间构造理论

Klein 和 Ball (1871) 同时发现的互易旋量对旋量理论的发展和完善起到了重要作用, 尤其是旋量及其互易旋量的几何关系为运动学和静力学的研究提供了应用旋量的基础.

基于 Gram-Schmidt 正交化, Sugimoto 和 Duffy (1982) 提出可通过代数方法构造互易旋量. Gram-Schmidt 正交化提供了内积空间中的一组正交向量以获得互易旋量, 该互易旋量是仿射空间中垂直于互补空间的正交基. 这一过程应用了旋量的内积, 但 Kerr 和 Sanger (1989) 证明出采用该方法求得的互易旋量仍具有不变性 (Duffy, 1990). 然而, Gram-Schmidt 正交化本身运算量较大. 互易旋量系在旋量系关联关系理论以及旋量系理论在机构学与机器人学的应用中起着至关重要的作用, 这就要求从理论上解决如何高效地获取给定旋量系的互易旋量系的问题. 本章对此进行深入研究并详细阐述, 基于旋量系零空间构造理论提出了一种新的求取互易旋量系的代数方法 (Dai 和 Rees Jones, 2002).

本章从旋量系及其互易旋量系的代数关联开始, 通过分析由旋量系的基组成的旋量矩阵的结构来研究旋量系的零空间. 一维零空间的结构可以由与行空间 $\mathbb{R}(\mathbf{J}^T)$ 线性无关并与零空间相关的增广向量组成. 求得的一维零空间实际上由系数矩阵增广行的代数余子式构成, 与坐标选取无关. 本章由此提出了直接获得齐次线性方程组解的求解法则.

对于多维零空间, 该求解法则可以通过旋量矩阵的移位分块、逐级增广获得 $k-n$ 个基于代数余子式的零空间向量. 本章还研究该求解法则的精度与效率, 并与 Gauss-Seidel 消元法进行比较. 同时进一步将该方法应用到旋量代数中, 通过简洁的过程获得 \mathbb{R}^6 中以齐次线性方程形式出现的互易旋量系. 在阐述中, 本章提供上述求解法则的严谨证明, 展示其在线性代数与机构学中的应用.

8.1 旋量系零空间数学表示

基于由一组线性无关的旋量组成的旋量系 S 与其互易旋量系 S^r 的关联关系, 可以得到零空间的数学公式, 用一组齐次方程式表述为

$$\begin{bmatrix} S_1^T \\ S_2^T \\ \vdots \\ S_n^T \end{bmatrix} \Delta[S_1^r, S_2^r, \dots, S_{6-n}^r] = \mathbf{0} \quad (8.1)$$

式中, 旋量系 S 与互易旋量系 S^r 为矩阵表示形式, 分别由 n 个旋量及 $6-n$ 个互易旋量以列向量形式构成. Δ 是式 (2.55) 的对偶算子, 其作用是将主部即旋量的前三个元素和副部即旋量的后三个元素作交换. 因此, 旋量系的关联关系可以表示为如下的线性方程组:

$$JB = \mathbf{0} \quad (8.2)$$

式中, J 为旋量系 S 的矩阵表示, B 为互易旋量系 S^r 在 Δ 算子作用后的矩阵表示, $\mathbf{0}$ 是一个 $n \times (6-n)$ 矩阵, 其所有元素为零. 更一般的情况下, J 是 $n \times k$ 矩阵, B 是 $k \times (k-n)$ 矩阵, $\mathbf{0}$ 是 $n \times (k-n)$ 矩阵. 因此, 构造互易旋量系的问题就转化为根据给定的旋量矩阵 J 来构造矩阵 B . 在线性代数范畴中, 该问题就是获取矩阵 J 的零空间.

定义 8.1 $n \times k$ 矩阵 J 的零空间也称核, 是齐次线性方程组 $JB = \mathbf{0}$ 所有解向量的集合 B .

由此, 矩阵 B 中维数为 k 的 $k-n$ 个列向量为解向量, 该 $k-n$ 个列向量构成了 k 维欧氏空间的线性子空间的基.

一般来说, 零空间可以通过 Gauss-Seidel 消元法获得 (Strang, 1976), 但该方法不够直接. Aitken (1939) 的著作给出了求解齐次方程组的充分条件证明. 由该书可以推导出, 若矩阵的秩 r 小于方程的个数 n , 一维零空间元素的代数余子式¹可以作为齐次方程的解. 当矩阵的秩与方程的个数相同时, 或者当方程数小于矩阵的秩时, Dai (1993) 提出通过引入旋量矩阵的仿射增广向量来构造零空间. 该增广向量由矩阵的代数余子式组成, 基于此可由五个给定旋量获得互易旋量. 在 2002 年, Dai 和 Rees Jones (2002) 提出矩阵移位分块与逐级增广的概念, 并给出了可直接用于求解互易旋量系的零空间构造理论. 该理论提出了求解旋量系多维零空间的求解法则, 并给出了求解齐次方程组的法则.

为方便后续章节阐述矩阵行空间、列空间与零空间等概念, 以下给出引理与推论.

引理 8.1 行满秩的 $n \times k$ 矩阵 \mathbf{J} 的行空间 $\mathbb{R}(\mathbf{J}^T) \subset \mathbb{R}^k$ 和零空间 $\mathbb{N}(\mathbf{J}) \subset \mathbb{R}^k$ 有如下维数关系:

$$\dim \mathbb{R}(\mathbf{J}^T) = n$$

且 $\dim \mathbb{R}(\mathbf{J}^T) + \dim \mathbb{N}(\mathbf{J}) = k$

推论 8.1 行空间 $\mathbb{R}(\mathbf{J}^T)$ 和零空间 $\mathbb{N}(\mathbf{J})$ 构成正交互补关系, 即 $\mathbb{R}(\mathbf{J}^T) = (\mathbb{N}(\mathbf{J}))^\perp$.

引理 8.2 列满秩的 $n \times k$ 矩阵 \mathbf{J} 的列空间 $\mathbb{R}(\mathbf{J}) \subset \mathbb{R}^n$ 和左零空间 $\mathbb{N}(\mathbf{J}^T) \subset \mathbb{R}^n$ 有如下关系:

$$\dim \mathbb{R}(\mathbf{J}) = k$$

且

$$\dim \mathbb{R}(\mathbf{J}) + \dim \mathbb{N}(\mathbf{J}^T) = n$$

推论 8.2 列空间 $\mathbb{R}(\mathbf{J})$ 和左零空间 $\mathbb{N}(\mathbf{J}^T)$ 构成另一对正交互补关系, 即 $\mathbb{R}(\mathbf{J}) = (\mathbb{N}(\mathbf{J}^T))^\perp$.

注释 8.1 上述零空间给出了列组合的定义, 即 $\mathbf{J}\mathbf{b}$; 而左零空间给出了行组合的定义, 即 $\mathbf{b}^T\mathbf{J}$.

¹余子式 (又称余因子) 是指将矩阵 \mathbf{J} 的某些行与列去掉之后所余下的方阵的行列式. 相应的方阵称为余子阵. 将方阵 \mathbf{J} 的一行与一列去掉之后所得到带有正负号的余子式称为代数余子式.

以上给出了以旋量系矩阵表示为系数矩阵的四个基本空间及其相互关联关系. 但需要注意, 上述正交互补关系是在引入对偶算子 Δ 之后的正交互补 (Dai, 1993), 即据式 (8.2) 求出的互易旋量为轴线坐标形式.

8.2 构造一维零空间的矩阵增广法

考虑构造含有 k 个未知数和 n 个方程的齐次线性方程组的零空间, 其中 $k - n = 1$. 若系数矩阵为式 (8.1) 的旋量系, 则 $k = 6$, 由此该齐次线性方程组可表示为

$$\mathbf{J}\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (8.3)$$

式中, 矩阵 \mathbf{J} 是由旋量系 \mathcal{S} 的基构成的 $n \times k$ 矩阵, 以行向量表示, 即 $\mathbf{J} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]^T$, 其中 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 是列向量; \mathbf{b} 是矩阵 \mathbf{J} 零空间的具有 k 个未知数的解向量. 在 \mathbb{R}^k 中, 行空间 $\mathbb{R}(\mathbf{J}^T)$ 和零空间 $\mathbb{N}(\mathbf{J})$ 构成正交互补关系, 即 $\mathbb{R}(\mathbf{J}^T) = (\mathbb{N}(\mathbf{J}))^\perp$.

假设 $n = r$, 其中 r 是矩阵 \mathbf{J} 的秩, 也是行空间 $\mathbb{R}(\mathbf{J}^T)$ 的维数, 则当 $n = k$ 时, 零空间 $\mathbb{N}(\mathbf{J})$ 只有零解, 当 $n < k$ 时, 零空间为 $k - n$ 维.

特别地, 若零空间 $\mathbb{N}(\mathbf{J})$ 为一维空间, 即 $k - n = 1$, 则可以构造一个与矩阵 \mathbf{J} 其他行向量线性无关的行向量 \mathbf{v}_a 作为增广向量, 可表示为

$$\mathbf{v}_a = ((-1)^{r+2} \det \mathbf{J}_{c1}, (-1)^{r+3} \det \mathbf{J}_{c2}, \dots, (-1)^{r+j+1} \det \mathbf{J}_{cj}, \dots, (-1)^{r+k+1} \det \mathbf{J}_{ck})^T \quad (8.4)$$

式中, \mathbf{J}_{cj} 是消去第 j 列 ($j = 1, \dots, k$) 后的矩阵 \mathbf{J} 的子矩阵. 由此得到由新向量 \mathbf{v}_a 增广的 $(r+1) \times (r+1)$ 增广矩阵 \mathbf{J}_a . 为了说明该增广行的独立性, 矩阵 \mathbf{J}_a 的行列式可展开如下:

$$\|\mathbf{J}_a\| = \|\mathbf{J}_{c1}\|^2 + \|\mathbf{J}_{c2}\|^2 + \dots + \|\mathbf{J}_{cj}\|^2 + \dots + \|\mathbf{J}_{ck}\|^2 \quad (8.5)$$

列空间 $\mathbb{R}(\mathbf{J})$ 的维数与矩阵 \mathbf{J} 的秩 r 相等, 因此, 矩阵 \mathbf{J} 实际上有 r 个线性无关的列向量, 式 (8.5) 中的行列式中至少有一个不为零. 这就说明了由增广向量增广的矩阵非奇异, 因而该向量与行空间 $\mathbb{R}(\mathbf{J}^T)$ 线性无关.

8.3 一维零空间的代数余子式法

定理 8.1 若齐次线性方程组含有 k 个未知数和 n 个方程, 其系数矩阵的秩为 $r = n$, 且 $k - n = 1$, 则通过系数矩阵的增广行向量的代数余子式可构造其一维零空间, 该零空间具有不变性. 一维零空间的表达式为

$$\mathbf{b} = \gamma \begin{pmatrix} (-1)^{r+2} \|\mathbf{J}_{c1}\| \\ (-1)^{r+3} \|\mathbf{J}_{c2}\| \\ \vdots \\ (-1)^{r+j+1} \|\mathbf{J}_{cj}\| \\ \vdots \\ (-1)^{r+k+1} \|\mathbf{J}_{ck}\| \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

其中 γ 为自由参数.

证明 零空间是行空间 $\mathbb{R}(\mathbf{J}^T)$ 的正交补集, 增广向量 \mathbf{v}_a 与 $\mathbb{N}(\mathbf{J})$ 相关. 因此, 一维零空间向量与增广向量 \mathbf{v}_a 的标量积不为零. 假设标量积是 γ , 式 (8.3) 可以增广为

$$\mathbf{J}_a \mathbf{b} = \boldsymbol{\Gamma} \quad (8.7)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_a &= [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_a]^T \\ \boldsymbol{\Gamma} &= (0, 0, \dots, 0, \gamma)^T \end{aligned} \quad (8.8)$$

式中, $\boldsymbol{\Gamma}$ 是包含 $r+1$ 个元素的向量, 除了最后一个元素为 γ 外, 其余元素均为零.

由此, 一维零空间可以表示为

$$\mathbf{b}' = \mathbf{J}_a^{-1} \boldsymbol{\Gamma} = \frac{\text{adj} \mathbf{J}_a}{\|\mathbf{J}_a\|} \boldsymbol{\Gamma} \quad (8.9)$$

式中

$$\text{adj} \mathbf{J}_a = \begin{bmatrix} \cdot & \cdots & \cdot & \text{cof} s_{k1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & \text{cof} s_{kj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot & \text{cof} s_{kk} \end{bmatrix}$$

式中, cofs_{kj} ($j = 1, 2, \dots, k$) 是矩阵 \mathbf{J}_a 中的增广行中 k 个元素的代数余子式. 同时可以看出, 伴随矩阵 $\text{adj}\mathbf{J}_a$ 的代数余子式的最后一列是子矩阵 \mathbf{J}_{cj} 的符号行列式向量. 进一步简化可以获得

$$\mathbf{b}' = \frac{\gamma}{\|\mathbf{J}_a\|} \begin{pmatrix} (-1)^{r+2} \|\mathbf{J}_{c1}\| \\ (-1)^{r+3} \|\mathbf{J}_{c2}\| \\ \vdots \\ (-1)^{r+j+1} \|\mathbf{J}_{cj}\| \\ \vdots \\ (-1)^{r+k+1} \|\mathbf{J}_{ck}\| \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

由于零空间为一维空间, 上式可写为式 (8.6). 定理得证.

可以看出, 以上结果具有不变性, 不因选取的增广行不同而不同. 其结果只取决于子矩阵的符号行列式, 该子矩阵是由依次去掉矩阵 \mathbf{J} 的一列的方法构造而成.

上述一维零空间采用代数余子式法来构造而来, 与 Gauss-Seidel 消元法相比较, 过程更为简洁.

例 8.1 定理 8.1 给出的一维零空间构造方法可通过下列含有三个未知数与两个方程的线性方程组来表示:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \quad (8.11)$$

根据定理 8.1 和式 (8.6), 可得该方程组的解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \end{array} \right| \\ - \left| \begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{array} \right| \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 21 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

再用 Gauss-Seidel 消元法 (Harfield 和 Hobbs, 1987) 来求解上述方程, 其求解过程如下:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R2 \rightarrow R2 - R1 \div 2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R2 \rightarrow -\frac{2}{7}R2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{R1 \rightarrow R1 - R2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式中, R_1 、 R_2 分别表示矩阵的第一行和第二行. 由此, 式 (8.11) 变为

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad (8.13)$$

该方程组表明 x_3 为自由变量, 可以任意取值. 赋 x_3 的值为 -7λ , 其结果与应用定理 8.1 得出的式 (8.12) 一致. 显而易见, 代数余子式法更简洁. 本章在 8.8 节将进行更多的对比分析.

上述方法也可以直接用来构造互易旋量, 这就导出下一节的推论 8.3.

8.4 五阶旋量系零空间的代数余子式法

8.4.1 旋量系的增广

推论 8.3 给定一组 f 个线性无关的旋量 S_1, S_2, \dots, S_f , 与其互易的旋量 S^r 可由下式给出:

$$J\Delta S^r = \mathbf{0} \quad (8.14)$$

式中, $J = [S_1, S_2, \dots, S_f]^T$; $S_i = (l_i, m_i, n_i, p_i, q_i, r_i)^T$; $S^r = (l^r, m^r, n^r, p^r, q^r, r^r)^T$. 在以下分析中, r 等于 f . 由上式可得

$$\begin{bmatrix} S_1^T \\ S_2^T \\ \vdots \\ S_f^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p^r \\ q^r \\ r^r \\ l^r \\ m^r \\ n^r \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (8.15)$$

显然, 若 $f = 6$, 不存在互易旋量; 若 $f = 5$, 仅有一个互易旋量, 可以通过重新组合上式获得一维零空间.

Dai (1993) 引入了一个新旋量来增广 (8.14) 式中的矩阵 \mathbf{J} , 使得获得互易旋量的过程较为简洁. 新的增广旋量可以构造为

$$\mathbf{S}_a = (-\det \mathbf{J}_{c1}, \det \mathbf{J}_{c2}, -\det \mathbf{J}_{c3}, \det \mathbf{J}_{c4}, -\det \mathbf{J}_{c5}, \det \mathbf{J}_{c6})^T \quad (8.16)$$

式中, \mathbf{J}_{cj} 是去掉式 (8.14) 中矩阵 \mathbf{J} 的第 j 列后的子矩阵. 由于五个旋量线性无关, 上述增广向量可以确保 6×6 矩阵为非奇异矩阵, 式 (8.14) 可进一步表示为

$$\mathbf{J}_a \Delta \mathbf{S}^r = \mathbf{F}$$

式中, \mathbf{F} 和增广矩阵 \mathbf{J}_a 由式 (8.8) 给出, 其最后一行由增广向量 \mathbf{S}_a 构成. 该增广行可以选取与五阶旋量系线性无关的任意向量. 从下文可以看出, 这一增广旋量的选取不影响所求互易旋量的结果.

以旋量 \mathbf{S}_a 为最后一行增广的矩阵 \mathbf{J}_a 可以表示为

$$\begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & p_1 & q_1 & r_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 & p_2 & q_2 & r_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 & p_3 & q_3 & r_3 \\ l_4 & m_4 & n_4 & p_4 & q_4 & r_4 \\ l_5 & m_5 & n_5 & p_5 & q_5 & r_5 \\ -\det \mathbf{J}_{c1} & \det \mathbf{J}_{c2} & -\det \mathbf{J}_{c3} & \det \mathbf{J}_{c4} & -\det \mathbf{J}_{c5} & \det \mathbf{J}_{c6} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} l^r \\ m^r \\ n^r \\ p^r \\ q^r \\ r^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

由于六个旋量线性无关, 因此式 (8.7) 成立, 由式 (8.4) 得出的最后一行对矩阵的增广可以保证上述 6×6 系数矩阵为非奇异矩阵, 这可由式 (8.5) 证实.

8.4.2 互易旋量系的构造

互易旋量 \mathbf{S}^r 可以通过式 (8.9) 获得, 为

$$\Delta \mathbf{S}^r = \mathbf{J}_a^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

式中的 \mathbf{J}_a^{-1} 有下列形式:

$$\mathbf{J}_a^{-1} = \frac{\text{adj} \mathbf{J}_a}{\det \mathbf{J}_a} \quad (8.19)$$

$$\text{式中, } \text{adj} \mathbf{J}_a = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & \alpha_{6,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & \alpha_{6,5} \\ * & * & \cdots & \alpha_{6,6} \end{bmatrix}$$

且 $\alpha_{6,i} (i = 1, 2, \dots, 6)$ 是矩阵 \mathbf{J}_a 的伴随矩阵的代数余子式.

$$\alpha_{6,i} = \begin{cases} -\det \mathbf{J}_{ci}, i = 1, 3, 5 \\ \det \mathbf{J}_{ci}, i = 2, 4, 6 \end{cases} \quad (8.20)$$

该代数余子式不会因为选择增广矩阵 \mathbf{J}_a 不同的增广行 (即最后一行) 而不同. 因而式 (8.18) 有如下形式 (Dai, 1993):

$$\mathbf{S}^r = \frac{\gamma}{\det \mathbf{J}_a} (\alpha_{6,4}, \alpha_{6,5}, \alpha_{6,6}, \alpha_{6,1}, \alpha_{6,2}, \alpha_{6,3})^T \quad (8.21)$$

由上可见, Jacobian 矩阵的代数余子式在几何和旋量系的研究中有着巨大的应用潜力.

式 (8.21) 中的互易旋量解 \mathbf{S}^r 由旋量及其幅值两部分组成. 显然, 互易旋量与矩阵 \mathbf{J}_a 中的增广行线性无关. 该解中唯一与增广行相关的是其幅值 $\det \mathbf{J}_a$. $\det \mathbf{J}_a$ 和 γ 都包含了互易旋量 \mathbf{S}^r 的幅值. 但是, 旋量为射影李代数 $se(3)$ 的元素, 因此通常为单位的旋量, 是五维射影空间元素. 所以旋量本身不考虑幅值, 为六维单位向量. 因此, 不考虑幅值的互易旋量可以表示为

$$\mathbf{S}^r = (\alpha_{6,4}, \alpha_{6,5}, \alpha_{6,6}, \alpha_{6,1}, \alpha_{6,2}, \alpha_{6,3})^T \quad (8.22)$$

由该式获得的互易旋量与增广矩阵 \mathbf{J}_a 最后一行的选择是无关的 (Dai 和 Rees Jones, 2002). 通过上述式子, 可以很容易获得互易旋量. 该旋量及其互易的五阶旋量系的关联关系可通过检验该旋量是否自互易确定.

推论 8.4 若给定五个线性无关的旋量, 则通过以这些旋量为行向量构建的旋量组合矩阵 \mathbf{J} 可获得互易旋量 \mathbf{S}^r , 为

$$\mathbf{S}^r = (\|\mathbf{J}_{c4}\|, -\|\mathbf{J}_{c5}\|, \|\mathbf{J}_{c6}\|, -\|\mathbf{J}_{c1}\|, \|\mathbf{J}_{c2}\|, -\|\mathbf{J}_{c3}\|)^T \quad (8.23)$$

互易旋量的主部 (前三个元素) 和副部 (后三个元素) 可以从式 (8.6) 得出, 通过式 (2.55) 中的对偶算子 Δ 进行互换.

例 8.2 图 8.1 中给出了 RPPRR 型串联机器人的机构运动简图, 其五个转动副和移动副的运动旋量可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{S}_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T \\ \mathbf{S}_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T \\ \mathbf{S}_3 = (0, 0, 0, \cos \theta, \sin \theta, 0)^T \\ \mathbf{S}_4 = (\cos \theta, \sin \theta, 0, 0, 0, 0)^T \\ \mathbf{S}_5 = (-\cos \gamma \sin \theta, \cos \gamma \cos \theta, \sin \gamma, d \sin \gamma \sin \theta, -d \sin \gamma \cos \theta, d \cos \gamma)^T \end{cases}$$

式中, A 和 B 点间的距离为变量 d . 上述旋量为第五章中包含完整运动循环并形成五阶运动旋量系的有限位移旋量.

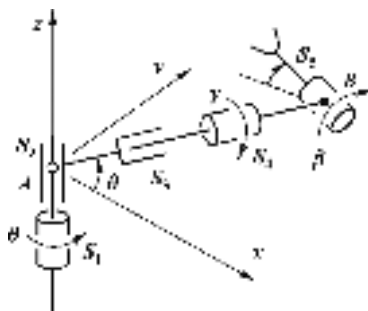


图 8.1 RPPRR 型串联机器人中的五阶旋量系

由推论 8.4, 与所有运动副旋量互易的约束力旋量可以求得为

$$\mathbf{S}^r = (\cos \gamma \sin \theta, -\cos \gamma \cos \theta, 0, d \sin \gamma \sin \theta, -d \sin \gamma \cos \theta, 0)^T$$

从上述结果可以看出, 施加的约束力旋量与旋量 \mathbf{S}_2 和 \mathbf{S}_3 垂直, 与旋量 \mathbf{S}_1 和 \mathbf{S}_4 相交, 与旋量 \mathbf{S}_5 斜交. 力旋量的旋距是 $d \tan \gamma$. 当 $\gamma = 0, \pi, 2\pi, \dots, k\pi$ 时, 力旋量为纯力, 并独立于该五阶旋量系. 上述结论与第七章的论证一致, 即携带该力旋量的旋量与互易的五阶旋量系共同构成了六维空间流形.

8.5 多维零空间构造理论

8.5.1 矩阵分块

多维零空间可用由 $k - n$ 个线性无关的向量构成的矩阵 $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_{k-n}]$ 表示, 见式 (8.2). 通常在求解式 (8.2) 时, 需采用 Gauss-Seidel 消元法,

以求解包含 k 个未知数和 n 个方程的齐次线性方程组. 这种消元法的主要步骤是对系数矩阵进行初等行变换, 以产生行阶梯式. 基于这种消元法, 使用 Gauss-Seidel 迭代和 LU 分解, 并采用 Gauss-Jordan 回代法可以改进算法. 由本章前面内容可知, 零空间向量也可以通过旋量组合矩阵 \mathbf{J} 的代数余子式求得, 而且过程更为简洁. 因此, 有如下定理.

定理 8.2 多维零空间的一组线性无关的向量可以由移位分块后的代数余子式向量构造.

证明 上述结论的证明可通过本节“矩阵分块”、8.5.2 节“子矩阵增广”、8.5.3 节“求解法则”以及 8.5.4 节“移位分块与逐级增广”完成. 式 (8.2) 给出多维零空间可以改写为多个一维零空间向量的形式

$$\mathbf{J}\mathbf{b}_1 = \mathbf{0} \quad (8.24)$$

$$\mathbf{J}\mathbf{b}_2 = \mathbf{0} \quad (8.25)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{J}\mathbf{b}_{k-n} = \mathbf{0} \quad (8.26)$$

假设 $n = r$, 则一维零空间的增广矩阵法可以扩展到多维零空间, 以获得解向量 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{k-n}$.

对于第一个零空间向量 \mathbf{b}_1 , 可以将式 (8.24) 中的矩阵 \mathbf{J} 分块为子矩阵 \mathbf{J}_1 和 \mathbf{J}_2 , 其中 \mathbf{J}_1 是前 $r+1$ 列秩为 r 的子矩阵, \mathbf{J}_2 是剩余的 $k-r-1$ 列子矩阵, 分块矩阵的表达式为

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} s_{11} & \cdots & s_{1r} & s_{1(r+1)} & \cdots & s_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{r1} & \cdots & s_{rr} & s_{r(r+1)} & \cdots & s_{rk} \end{array} \right] = [\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2] \quad (8.27)$$

式中, s_{ij} 是第 i 个行向量的第 j 个元素, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$.

8.5.2 子矩阵增广

在式 (8.27) 分块矩阵的第一个子矩阵中, 采用式 (8.4) 的增广行可增广 $r \times (r+1)$ 子矩阵 \mathbf{J}_1 为 $(r+1) \times (r+1)$ 合成矩阵 \mathbf{J}_{a1} . 该增广行可以用 8.3 节的一维零空间的代数余子式法构造并且与已有的 r 个行旋量线性无关. 增广后的矩阵为非奇异矩阵, 证明过程见 8.2 节. 正如 8.4.2 节所证实, 零空间

向量不随选取增广行的不同而变化. 因此, 为简单起见, 增广行可用一组 “*” 表示. 用 γ_1 表示增广行向量与零空间向量的标量积, 则式 (8.24) 可增广为

$$\begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1r} & s_{1(r+1)} & \cdots & s_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{r1} & \cdots & s_{rr} & s_{r(r+1)} & \cdots & s_{rk} \\ * & \cdots & * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (8.28)$$

上式还可以简化为两个分块增广子矩阵的形式

$$\mathbf{J}_{a1}\mathbf{b}_{11} + \mathbf{J}_{a2}\mathbf{b}_{12} = \mathbf{\Gamma}_1 \quad (8.29)$$

式中, 矩阵 \mathbf{J}_{a1} 是矩阵 \mathbf{J}_1 的 $(r+1) \times (r+1)$ 增广矩阵, \mathbf{b}_{11} 是包含 $r+1$ 个元素的向量; 矩阵 \mathbf{J}_{a2} 是矩阵 \mathbf{J}_2 的 $(r+1) \times (k-r-1)$ 增广子矩阵, \mathbf{b}_{12} 是包含 $k-r-1$ 个元素的向量; $\mathbf{\Gamma}_1$ 是包含 $r+1$ 个元素的向量, 该向量除最后一个元素外, 其余元素均为零. 由于增广子矩阵 \mathbf{J}_{a1} 非奇异, 类似于 Aitken (1939) 对求解齐次方程组的相关证明过程, 设定 $\mathbf{b}_{12} = \mathbf{0}$, 式 (8.29) 可以改写为

$$\mathbf{b}_{11} = \mathbf{J}_{a1}^{-1}\mathbf{\Gamma}_1 \quad (8.30)$$

8.5.3 求解法则

第一个零空间向量可以通过两部分求得. 第一部分与 8.3 节求一维零空间的代数余子式法类似, 第二部分则设为零. 于是有

$$\mathbf{b}'_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{11} \\ \mathbf{b}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{a1}^{-1}\mathbf{\Gamma}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\gamma_1}{\|\mathbf{J}_{a1}\|} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{r+2} \|\mathbf{J}_{1(c1)}\| \\ (-1)^{r+3} \|\mathbf{J}_{1(c2)}\| \\ \vdots \\ (-1)^{r+j+1} \|\mathbf{J}_{1(cj)}\| \\ \vdots \\ (-1)^{2r+2} \|\mathbf{J}_{1(c(r+1))}\| \end{pmatrix} \\ \mathbf{0}_{k-r-1} \end{pmatrix} \quad (8.31)$$

式中, $\mathbf{J}_{1(c_j)}$ 是去掉第 j 列的矩阵 \mathbf{J}_1 的子矩阵. 因而, 零空间的第一个向量为

$$\mathbf{b}_1 = \gamma_1 \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{r+2} \|\mathbf{J}_{1(c_1)}\| \\ (-1)^{r+3} \|\mathbf{J}_{1(c_2)}\| \\ \vdots \\ (-1)^{r+j+1} \|\mathbf{J}_{1(c_j)}\| \\ \vdots \\ (-1)^{2r+2} \|\mathbf{J}_{1(c_{(r+1)})}\| \end{pmatrix} \\ \mathbf{0}_{(k-r-1) \times 1} \end{pmatrix} \quad (8.32)$$

不难看出, 零空间不随增广行的变化而变化.

8.5.4 移位分块与逐级增广

第二个零空间向量 \mathbf{b}_2 可通过将 $r \times (r+1)$ 分块向右移位一列, 然后用新的线性独立的增广行对移位后的 $r \times (r+1)$ 子矩阵 \mathbf{J}_1 增广获得. 移位产生如下分块矩阵:

$$\left[\begin{array}{c|ccc|cc|ccc} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1(r+1)} & r_{1(r+2)} & \cdots & r_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{r1} & r_{r2} & \cdots & r_{r(r+1)} & r_{r(r+2)} & \cdots & r_{rk} \end{array} \right] = [\mathbf{J}_0, \mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2]$$

对新产生的 $r \times (r+1)$ 分块矩阵进行增广, 称为逐级增广. 如前所述该增广行不影响零空间向量, 所以可由一组 “*” 表示. 考虑新的增广行, 式 (8.25) 可表示为

$$\left[\begin{array}{c|ccc|cc|ccc} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1(r+1)} & r_{1(r+2)} & \cdots & r_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{r1} & r_{r2} & \cdots & r_{r(r+1)} & r_{r(r+2)} & \cdots & r_{rk} \\ * & * & \cdots & * & * & \cdots & * \end{array} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \\ \vdots \\ x_{r+1} \\ \hline x_{r+2} \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \quad (8.33)$$

其简洁形式为

$${}^2\mathbf{J}_{a_0}\mathbf{b}_{20} + {}^2\mathbf{J}_{a_1}\mathbf{b}_{21} + {}^2\mathbf{J}_{a_2}\mathbf{b}_{22} = \mathbf{F}_2 \quad (8.34)$$

式中, ${}^2\mathbf{J}_{a0}$ 为 $(r+1) \times 1$ 子矩阵, 是向右移位 $(r+1) \times (r+1)$ 分块矩阵一列后剩下的第一列, \mathbf{b}_{20} 为 x_1 ; ${}^2\mathbf{J}_{a1}$ 是分块矩阵中的 $(r+1) \times (r+1)$ 非奇异矩阵, \mathbf{b}_{21} 是具有 $r+1$ 个元素的向量; ${}^2\mathbf{J}_{a2}$ 是 $(r+1) \times (k-r-2)$ 子矩阵, \mathbf{b}_{22} 是含有 $k-r-2$ 个元素的向量; $\mathbf{\Gamma}_2$ 是含有 $r+1$ 个元素的向量, 除最后一个元素外其余元素均为零. 子矩阵 ${}^2\mathbf{J}_{a1}$ 中的新增广行可以构造为与其他行线性无关的增广矩阵, 因此与零空间线性相关. 从而, 由 8.2 节中的论证, 子矩阵 ${}^2\mathbf{J}_{a1}$ 是非奇异矩阵.

令 $\mathbf{b}_{20} = 0, \mathbf{b}_{22} = \mathbf{0}$, 可得

$$\mathbf{b}_{21} = {}^2\mathbf{J}_{a1}^{-1}\mathbf{\Gamma}_2 \quad (8.35)$$

由此, 第二个零空间向量为

$$\mathbf{b}'_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{20} \\ \mathbf{b}_{21} \\ \mathbf{b}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ {}^2\mathbf{J}_{a1}^{-1}\mathbf{\Gamma}_2 \\ \mathbf{0}_{(k-r-2)} \end{pmatrix} = \frac{\gamma_2}{\|{}^2\mathbf{J}_{a1}\|} \begin{pmatrix} \left(\begin{array}{c} 0 \\ (-1)^{r+3} \|{}^2\mathbf{J}_{1(s_1)}\| \\ (-1)^{r+4} \|{}^2\mathbf{J}_{1(s_2)}\| \\ \vdots \\ (-1)^{r+j+2} \|{}^2\mathbf{J}_{1(s_j)}\| \\ \vdots \\ (-1)^{2r+3} \|{}^2\mathbf{J}_{1(s(r+1))}\| \end{array} \right) \\ \mathbf{0}_{k-r-1} \end{pmatrix} \quad (8.36)$$

至此, 8.5.1 节中的定理 8.2 得到了完整的证明.

8.6 齐次线性方程组求解理论

8.6.1 齐次线性方程组求解法则与步骤

齐次线性方程组的解空间实质上是其系数矩阵的多维零空间, 基于此, 可提出下述定理.

定理 8.3 若含有 k 个未知数和 n 个方程的齐次线性方程组的秩为 $r = n$, 则 $k-r$ 维的零空间可以通过一组代数余子式向量来构造. 每一代数余子式向量空间可由方程组系数矩阵相应矩阵分块的 $r+1$ 列子矩阵增广行元素的代数余子式构造. 其 $k-r$ 维零空间的生成过程需要 $k-r$ 次移位分块.

同时对新产生的 $r \times (r+1)$ 分块子矩阵, 作逐级增广. 每次移位后的逐级增广结果不随增广行的不同而变化.

该定理给出了基于多维零空间构造方法的齐次线性方程组求解法则, 其基本思想为: 将 n 个旋量作为行向量来构成旋量组合矩阵 \mathbf{J} , 采用移位分块, 从 \mathbb{R}^n 空间中, 生成 $k-r$ 阶零空间 $\mathbf{N}(\mathbf{J})$ 的一组基.

采用该定理求解齐次线性方程组的具体过程为:

- (1) 将方程组系数矩阵分块为 $r+1$ 列子矩阵和 $k-r-1$ 列子矩阵;
- (2) 增广 $r \times (r+1)$ 子矩阵;
- (3) 从式 (8.32) 中获得第一个零空间向量, 即第一个解向量;
- (4) 将 $r+1$ 列分块向右移位一列, 如式 (8.33), 采用逐级增广, 即只对该 $r+1$ 列作增广;
- (5) 获得第二个解向量, 其表达式如下:

$$\mathbf{b}_2 = \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^{r+3} \|\mathbf{J}_{1(c1)}\|^2 \\ (-1)^{r+4} \|\mathbf{J}_{1(c2)}\|^2 \\ \vdots \\ (-1)^{r+j+2} \|\mathbf{J}_{1(cj)}\|^2 \\ \vdots \\ (-1)^{2r+3} \|\mathbf{J}_{1(c(r+1))}\|^2 \\ \mathbf{0}_{(k-r-1) \times 1} \end{pmatrix} \quad (8.37)$$

- (6) 重复第 (4) 步, 获得剩余的解向量, 其表达式为

$$\mathbf{b}_i = \gamma_i \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(i-1) \times 1} \\ (-1)^{r+i+1} \|\mathbf{J}_{1(c1)}\|^i \\ (-1)^{r+i+2} \|\mathbf{J}_{1(c2)}\|^i \\ \vdots \\ (-1)^{r+i+j} \|\mathbf{J}_{1(cj)}\|^i \\ \vdots \\ (-1)^{2r+i+1} \|\mathbf{J}_{1(c(r+1))}\|^i \\ \mathbf{0}_{(k-r-i) \times 1} \end{pmatrix} \quad (8.38)$$

(7) 获得第 $k-r$ 个解向量, 其表达式为

$$\mathbf{b}_{k-r} = \gamma_{k-r} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(k-r-1) \times 1} \\ (-1)^{k+1} \|\|^{k-r} \mathbf{J}_{1(c_1)} \|\| \\ (-1)^{k+2} \|\|^{k-r} \mathbf{J}_{1(c_2)} \|\| \\ \vdots \\ (-1)^{k+j} \|\|^{k-r} \mathbf{J}_{1(c_j)} \|\| \\ \vdots \\ (-1)^{k+r+1} \|\|^{k-r} \mathbf{J}_{1(c(r+1))} \|\| \end{pmatrix} \quad (8.39)$$

由此, 解空间中的 $k-r$ 个向量是将矩阵 \mathbf{J} 作 $k-r$ 次移位分块与逐级增广获得. 每一次分块, $r+1$ 列分块矩阵就向右移位一列, 并对该 $r+1$ 列分块矩阵作增广. 合成的 $r+1$ 列增广子矩阵用来生成解空间向量中的非零元素的代数余子式, 因而解空间向量就可以通过去掉相应的列而得到的子矩阵的符号行列式直接获得, 如上述公式. 这样下去, 采用移位分块与逐级增广, 可求得全部解向量.

下面的例子展示定理 8.3 在齐次线性方程组中的应用.

例 8.3 给定具有四个未知数和两个方程的齐次线性方程组如下:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad (8.40)$$

其系数矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.41)$$

由定理 8.3, 可得两个解向量. 首先将矩阵分块如下:

$$\mathbf{J}_a = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right] \quad (8.42)$$

根据式 (8.32), 可得第一个解向量为

$$\mathbf{b}_1 = \gamma_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.43)$$

将前面的三列分块向右移位一列, 得到如下新的分块矩阵:

$$\mathbf{J}_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.44)$$

由式 (8.37), 可得第二个解向量为

$$\mathbf{b}_2 = \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (8.45)$$

这两个向量形成了解空间 $N(\mathbf{J})$ 的一组基.

8.6.2 基于多维零空间构造理论的求解法则与 Gauss-Seidel 消元法

定理 8.3 给出了求解齐次线性方程组的求解法则. 下面的例子说明了当 $n = r$ 时, 应用该定理从含有 k 个未知数的 n 个方程中获取 $k - r$ 维解空间的方法和过程. 在其他情况下, 当 $n > r$ 时, 前 r 个线性无关的方程可以选择出来, 这样上述的求解法则就可以用来求解这 r 个线性无关的方程的解. 当分块矩阵无法产生秩为 r 的非奇异子矩阵时, 就需要进行递归分块, 直到找到秩为 r 的非奇异子矩阵.

例 8.4 及 8.6.3 节的例 8.5 用来说明上述几种情况的求解过程, 并与 Gauss-Seidel 消元法进行比较.

例 8.4 一组含五个未知数和三个方程的齐次线性方程组表示如下:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad (8.46)$$

其系数矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.47)$$

该矩阵有三行, 但秩为 2. 显然, 第三行是前两行的组合. 取秩为 2 的前两行, 应用定理 8.3 中的代数余子式方法, 根据式 (8.32)、式 (8.37) 和式 (8.38),

三个解向量可以从矩阵的三次移位分块中分别得出, 为

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = \lambda_1(-1, 1, -1, 0, 0)^T \\ \mathbf{b}_2 = \lambda_2(0, 1, 0, 1, 0)^T \\ \mathbf{b}_3 = \lambda_3(0, 0, -1, -1, -1)^T \end{cases} \quad (8.48)$$

上述解法也适用于取系数矩阵 \mathbf{J} 中的第一行和第三行作移位分块和逐级增广, 并采用代数余子式法的情况, 得如下一组解:

$$\begin{cases} \mathbf{b}'_1 = \lambda'_1(1, -1, 1, 0, 0)^T \\ \mathbf{b}'_2 = \lambda'_2(0, -1, 0, -1, 0)^T \\ \mathbf{b}'_3 = \lambda'_3(0, 0, 1, 1, 1)^T \end{cases} \quad (8.49)$$

显然, 该组基与式 (8.48) 中的基一致.

为了便于比较, 用 Gauss-Seidel 消元方法进行求解, 得出

$$\begin{cases} \mathbf{b}''_1 = \lambda''_1(1, -1, 1, 0, 0)^T \\ \mathbf{b}''_2 = \lambda''_2(0, 1, 0, 1, 0)^T \\ \mathbf{b}''_3 = \lambda''_3(-1, 0, 0, 0, 1)^T \end{cases} \quad (8.50)$$

这一组解向量与前面的两组有相同的基, 可由下式证明:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}''_1{}^T \\ \mathbf{b}''_2{}^T \\ \mathbf{b}''_3{}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}'_1{}^T \\ \mathbf{b}'_2{}^T \\ \mathbf{b}'_3{}^T \end{bmatrix} \quad (8.51)$$

8.6.3 递归分块与增广

递归分块可用下面的例子说明, 该例子由例 8.3 演变而来.

例 8.5 对例 8.3 给出的齐次线性方程组的一个系数作改变, 即式 (8.40) 可变为下式:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad (8.52)$$

其系数矩阵变为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.53)$$

该矩阵可以根据定理 8.3 给出的过程作分块. 第一个解向量可以通过将 3×3 增广子矩阵最后一行的代数余子式作为前三个元素, 并采用式 (8.32) 将零赋予最后一个元素得到. 这就得出下式:

$$\mathbf{b}_1 = \lambda_1(0, 1, -1, 0)^T \quad (8.54)$$

将三列分块向右移位一列以获得第二个解向量, 此时矩阵不满秩. 如例 8.4, 剔除该新分块矩阵中的冗余行并进行递归分块, 形成包括增广行的新的 2×3 子矩阵, 为

$$\mathbf{J}_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \quad (8.55)$$

该 2×3 子矩阵提供了两个可能的 2×2 子矩阵的移位分块. 第一次分块如下:

$$\mathbf{J}_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \quad (8.56)$$

其解向量是

$$\mathbf{b}'_2 = \lambda'_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.57)$$

上式与式 (8.54) 给出的解是线性相关的. 采用第二次移位分块, 为

$$\mathbf{J}_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (8.58)$$

由此获得第二个解向量为

$$\mathbf{b}''_2 = \lambda''_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (8.59)$$

显然, \mathbf{b}'_2 和 \mathbf{b}_1 是线性无关的, 二者可以作为解空间的一组基.

8.7 互易旋量系构造理论

8.7.1 $6-n$ 阶互易旋量系构造方法

基于定理 8.3 的步骤可以构造 $6-n$ 阶互易旋量系. 可以看出, 该方法没有采用常用的 Gram Schmidt 正交法, 避免了基于连续三重积以求正交基的复杂计算过程.

推论 8.5 若一个旋量系的阶数为 n , 则通过矩阵移位分块以及对应的逐级增广的代数余子式向量可获得 $6-n$ 阶的互易旋量系.

运用上述推论获取 $6-n$ 阶互易旋量系的具体过程如下文所述.

将旋量矩阵划分为 $n+1$ 列子矩阵和 $6-n-1$ 列子矩阵, 则可以得到第一个轴线坐标形式的互易旋量, 为

$$\Delta S_1^r = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{n+2} \|\mathbf{J}_{a1(c1)}\| \\ (-1)^{n+3} \|\mathbf{J}_{a1(c2)}\| \\ \vdots \\ (-1)^{n+j+1} \|\mathbf{J}_{a1(c(n+1))}\| \end{pmatrix} \\ \mathbf{0}_{(6-n-1) \times 1} \end{pmatrix} \quad (8.60)$$

式中, S_1^r 如同旋量系 \mathbb{S} 中的其他旋量, 采用射线坐标, 但 ΔS_1^r 为轴线坐标. 如同定理 8.2, 将 $n+1$ 列分块向右移位一列, 可得轴线坐标形式的第二个旋量, 为

$$\Delta S_2^r = \begin{pmatrix} 0 \\ \begin{pmatrix} (-1)^{n+3} \|\mathbf{J}_{a1(c1)}\|^2 \\ (-1)^{n+4} \|\mathbf{J}_{a1(c2)}\|^2 \\ \vdots \\ (-1)^{n+j+1} \|\mathbf{J}_{a1(c(n+1))}\|^2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{0}_{(6-n-2) \times 1} \end{pmatrix} \quad (8.61)$$

式中, S_2^r 采用射线坐标, 而 ΔS_2^r 为轴线坐标. 同理, 将 $n+1$ 列分块向右移位 $i-1$ 次, 则可获得轴线坐标形式的第 i 个互易旋量, 为

$$\Delta S_i^r = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(i-1) \times 1} \\ \begin{pmatrix} (-1)^{n+i+1} \|\mathbf{J}_{a1(c1)}\|^i \\ (-1)^{n+i+2} \|\mathbf{J}_{a1(c2)}\|^i \\ \vdots \\ (-1)^{n+i+1} \|\mathbf{J}_{a1(c(n+1))}\|^i \end{pmatrix} \\ \mathbf{0}_{(6-n-i) \times 1} \end{pmatrix} \quad (8.62)$$

8.7.2 移位分块以构造三阶、四阶互易旋量系

1. 三阶互易旋量系构造与移位分块

例 8.6 如图 8.2 所示, 可通过构造三自由度串联机器人的三阶互易旋量系的过程展示推论 8.5 的应用.

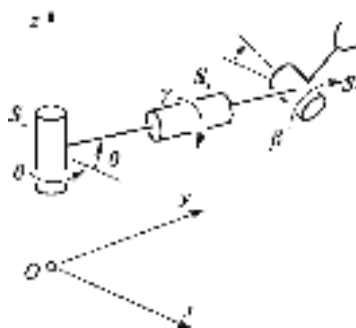


图 8.2 三自由度机器人

三个运动副旋量可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{S}_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T \\ \mathbf{S}_2 = (l_2, m_2, 0, p_2, q_2, 0)^T \\ \mathbf{S}_3 = (l_3, m_3, n_3, p_3, q_3, r_3)^T \end{cases} \quad (8.63)$$

由定理 8.2, 进行第一步矩阵分块

$$\mathbb{S} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & m_2 & 0 & p_2 & q_2 & 0 \\ l_3 & m_3 & n_3 & p_3 & q_3 & r_3 \end{array} \right] \quad (8.64)$$

从式 (8.60) 中, 可以得到第一个互易旋量, 为

$$\mathbf{S}_1^r = (l_2 m_3 - l_3 m_2, 0, 0, -p_2 m_3 + p_3 m_2, l_3 p_2 - l_2 p_3, 0)^T$$

接着作移位分块, 由式 (8.61), 得到第二个互易旋量, 为

$$\mathbf{S}_2^r = (m_3 q_2 - m_2 q_3, m_2 p_3 - m_3 p_2, 0, 0, p_2 q_3 - p_3 q_2, 0)^T$$

进行第三次移位分块, 由式 (8.62), 构造出第三个互易旋量, 为

$$\mathbf{S}_3^r = (q_2 r_3, -p_2 r_3, p_2 q_3 - p_3 q_2, 0, 0, 0)^T$$

由此, 得出了三阶互易旋量系.

2. 四阶互易旋量系

例 8.7 在例 8.6 中减少一个铰链运动副, 如图 8.3 所示, 可演示四阶互易旋量系的求取过程.

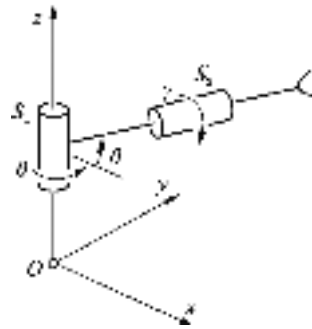


图 8.3 二自由度机器人

在图 8.3 中, 表示竖直方向转动副的旋量为

$$\mathbf{S}_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T \quad (8.65)$$

第二个水平转动副的轴线延长线与第一个转动副轴线垂直, 其旋量为

$$\mathbf{S}_2 = (l, m, 0, p, q, 0)^T \quad (8.66)$$

这两个旋量组成了一个二阶旋量系 \mathbb{S} , 如

$$\mathbb{S} = \{\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2\}$$

其矩阵形式为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^T \\ \mathbf{S}_2^T \end{bmatrix} \quad (8.67)$$

由此, 四阶互易旋量系 \mathbb{S}^r 可以通过式 (8.1) 构造, 记为

$$\mathbb{S}^r = \{\mathbf{S}_1^r, \mathbf{S}_2^r, \mathbf{S}_3^r, \mathbf{S}_4^r\}$$

其矩阵形式为

$$\mathbf{J}^r = [\mathbf{S}_1^r, \mathbf{S}_2^r, \mathbf{S}_3^r, \mathbf{S}_4^r] \quad (8.68)$$

由两旋量系互易关联关系可以得到式 (8.1) 和式 (8.2).

将式 (8.65) 与式 (8.66) 合并转化为式 (8.2) 所示的形式, 并对矩阵 \mathbf{J} 分块, 给出前 2×3 分块矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ l & m & 0 & p & q & 0 \end{bmatrix} \quad (8.69)$$

通过式 (8.60), 可以求得轴线坐标形式的第一个互易旋量为

$$\Delta \mathbf{S}_1^r = (-m, l, 0, 0, 0, 0)^T \quad (8.70)$$

通过对偶变换可得其射线坐标, 因此第一个互易旋量为

$$\mathbf{S}_1^r = (0, 0, 0, -m, l, 0)^T \quad (8.71)$$

将矩阵分块向右移位一列, 可产生一个新的 2×3 子矩阵, 为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ l & m & 0 & p & q & 0 \end{bmatrix} \quad (8.72)$$

由式 (8.61), 可以获得射线坐标形式的第二个互易旋量为

$$\mathbf{S}_2^r = (m, 0, 0, 0, -p, 0)^T \quad (8.73)$$

将分块矩阵向右再移位一列, 又产生了一个新的 2×3 子矩阵, 为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ l & m & 0 & p & q & 0 \end{bmatrix} \quad (8.74)$$

由式 (8.62), 可以得到射线坐标形式的第三个互易旋量为

$$\mathbf{S}_3^r = (-q, p, 0, 0, 0, 0)^T \quad (8.75)$$

同理,第三次将分块矩阵向右移动,得到的结果与式(8.69)相同.但考虑第二分块的 2×3 子矩阵,由于子矩阵不满秩,需要采用8.6.3节所述的递归分块方法.于是,可以得到射线坐标形式的第四个互易旋量,为

$$\mathbf{S}_4^r = (0, 0, -q, 0, 0, 0)^T \quad (8.76)$$

至此,可以得到二阶旋量系的四阶互易旋量系.二阶旋量系与其四阶互易旋量系的关联关系可通过交集旋量 \mathbf{S}_1 表示(Dai和Rees Jones, 2001).

所有四个线性无关旋量都是旋量系的基.例子中的四阶互易旋量系包含所有与二阶旋量系互易的旋量.基于这组旋量,可以得到一组新的线性无关的旋量.例如,与 x 轴平行的合成互易旋量 \mathbf{S}_2^r ,可以由与 $x-y$ 平面平行的旋量代替,后者为该互易旋量系基的组合,表示为

$$\mathbf{S}_2^{r'} = \mathbf{S}_1^r + \mathbf{S}_2^r + \mathbf{S}_3^r = (m - q, p, 0, -m, l - p, 0)^T$$

因此,四个新的线性无关的互易旋量为 \mathbf{S}_1^r 、 $\mathbf{S}_2^{r'}$ 、 \mathbf{S}_3^r 和 \mathbf{S}_4^r .新互易旋量 $\mathbf{S}_2^{r'}$ 可以进一步由下面互易旋量系基的组合代替:

$$\mathbf{S}_2^{r''} = -\frac{q}{m}\mathbf{S}_1^r + \left(1 - \frac{lq}{mp}\right)\mathbf{S}_2^r - \frac{l}{p}\mathbf{S}_3^r = (m, -l, 0, q, -p, 0)^T$$

3. 分块求解与增广解法二

上例可由另一类方法求解.

例 8.8 由于所有旋量的最后一个元素为零,式(8.69)可以通过剔除最后一列元素进行重构,由此重构后的旋量组合矩阵可表示为

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ l & m & 0 & p & q \end{bmatrix} \quad (8.77)$$

采用三次移动分块,在式(8.60)、式(8.61)和式(8.62)中指定旋量的最后一个元素为零,则可得三个互易旋量为

$$\begin{cases} \mathbf{S}_1^r = (0, 0, 0, -m, l, 0)^T \\ \mathbf{S}_2^r = (m, 0, 0, 0, -p, 0)^T \\ \mathbf{S}_3^r = (-q, p, 0, 0, 0, 0)^T \end{cases} \quad (8.78)$$

不难看出,以上三个互易旋量的第三个元素均为零.为构成四维向量空间,第四个互易旋量可取为

$$\mathbf{S}_4^r = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T \quad (8.79)$$

可见该方法能够产生与例 8.7 的方法相同的结果.

8.7.3 $6-n$ 阶互易旋量系构造步骤

根据推论 8.5 给出的构造互易旋量系的方法以及例 8.6、例 8.7 与例 8.8 对采用该方法构造三阶与四阶互易旋量系的展示, 可将基于多维零空间构造理论求解 $6-n$ 阶互易旋量系的具体过程总结如下:

- (1) 将 n 个旋量作为行向量形成旋量组合矩阵 \mathbf{J} ;
- (2) 将矩阵 \mathbf{J} 分块为 $n+1$ 列子矩阵和 $6-n-1$ 列子矩阵, 并对 $n+1$ 列子矩阵进行增广;
- (3) 赋对应 $6-n-1$ 列子矩阵的互易旋量的 $6-n-1$ 个元素为零;
- (4) 从 $n+1$ 列的子矩阵中获得式 (8.60) 中的其余元素;
- (5) 将 $n+1$ 列分块矩阵向右移位一列, 如式 (8.33), 产生三个子矩阵;
- (6) 赋对应第一个和第三个子矩阵的第二个互易旋量的元素为零值;
- (7) 从新的 $n+1$ 列的子矩阵中获得式 (8.61) 中的其余元素;
- (8) 重复步骤 (5) 至 (7), 获得式 (8.62) 中的其余互易旋量.

在此理论推导中, 步骤 (7) 应用了逐级增广思想.

8.7.4 逐级增广与递归分块

1. 二阶互易旋量系构造与逐级增广

例 8.9 图 8.4 所示机器人具有四阶旋量系.

按照上述步骤 (1), 可以将四个运动副旋量作为行向量构造一个 4×6 旋量组合矩阵, 为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c\theta_1 & s\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_2 & -as\theta_1 s\theta_2 & ac\theta_1 s\theta_2 & -ac\theta_2 \\ -c\theta_1 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & -s\theta_1 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & c\theta_2 s\theta_3 & p_4 & q_4 & r_4 \end{bmatrix} \quad (8.80)$$

式中

$$p_4 = l(c\theta_1 s\theta_3 + s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3) - as\theta_1 c\theta_2 s\theta_3$$

$$q_4 = l(s\theta_1 s\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3) + ac\theta_1 c\theta_2 s\theta_3$$

$$r_4 = lc\theta_2 c\theta_3 + as\theta_2 s\theta_3$$

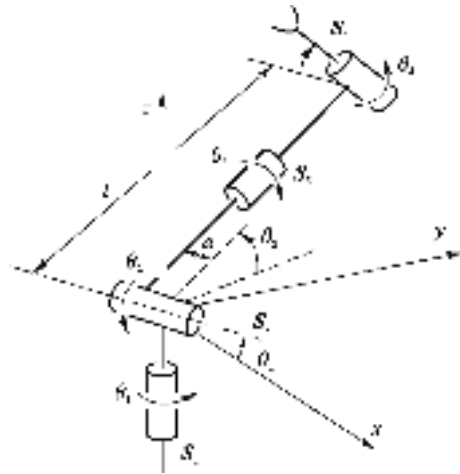


图 8.4 具有四阶旋量系的四自由度串联机械臂

由上式, 二阶互易旋量系可以通过将上述矩阵进行两次移位分块获得. 按照步骤 (2), 作第一次分块和增广如下:

$$J = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c\theta_1 & s\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ -s\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_2 & -as\theta_1 s\theta_2 & ac\theta_1 s\theta_2 \\ -c\theta_1 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & -s\theta_1 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & c\theta_2 s\theta_3 & p_4 & q_4 \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ * \\ * \\ * \\ . \end{matrix} \end{bmatrix} \quad (8.81)$$

根据步骤 (3), 令 $n_1^r = 0$. 根据步骤 (4), 上述通过分块获得的 5×5 增广矩阵可以用来求取第一个互易旋量的元素. 这些元素满足增广行的代数余子式, 因此副部元素为

$$p_1^r = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_2 & -as\theta_1 s\theta_2 & ac\theta_1 s\theta_2 \\ -s\theta_1 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & c\theta_2 s\theta_3 & p_4 & q_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$q_1^r = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ -s\theta_1 c\theta_2 & s\theta_2 & -as\theta_1 s\theta_2 & ac\theta_1 s\theta_2 \\ -c\theta_1 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & c\theta_2 s\theta_3 & p_4 & q_4 \end{vmatrix} = 0$$

和

$$r_1^r = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c\theta_1 & s\theta_1 & 0 & 0 \\ -s\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 c\theta_2 & -as\theta_1 s\theta_2 & ac\theta_1 s\theta_2 \\ -c\theta_1 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & -s\theta_1 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & p_4 & q_4 \end{vmatrix} = 0$$

主部元素为

$$l_1^r = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ c\theta_1 & s\theta_1 & 0 & 0 \\ -s\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_2 & ac\theta_1 s\theta_2 \\ -c\theta_1 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & -s\theta_1 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & c\theta_2 s\theta_3 & q_4 \end{vmatrix}$$

$$= -lc\theta_2(s\theta_1 s\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 c\theta_3) - ac\theta_1 s\theta_3$$

$$m_1^r = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ c\theta_1 & s\theta_1 & 0 & 0 \\ -s\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_2 & -as\theta_1 s\theta_2 \\ -c\theta_1 c\theta_3 + s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & -s\theta_1 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & c\theta_2 s\theta_3 & p_4 \end{vmatrix}$$

$$= lc\theta_2(c\theta_1 s\theta_3 + s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3) - as\theta_1 s\theta_3$$

根据步骤 (5), 第二个独立互易旋量可以通过移位分块矩阵得到, 为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} * & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_2 & -as\theta_1 s\theta_2 & ac\theta_1 s\theta_2 & -ac\theta_2 \\ -s\theta_1 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & c\theta_2 s\theta_3 & p_4 & q_4 & r_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \\ * \\ * \\ * \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (8.82)$$

同理, 根据步骤 (6), 令 $p_2^r = 0$, 再根据步骤 (7), 第二个互易旋量的其余元素可以从上述增广的 5×5 子矩阵中获得, 为

$$q_2^r = 0, r_2^r = 0$$

$$l_2^r = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_2 & ac\theta_1 s\theta_2 & -ac\theta_2 \\ -s\theta_1 c\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & c\theta_2 s\theta_3 & q_4 & r_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= als^2\theta_1c\theta_2s\theta_3 + a^2s\theta_1c\theta_1s\theta_3 \\
 m_2^r &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ c\theta_1c\theta_2 & s\theta_2 & -as\theta_1s\theta_2 & -ac\theta_2 \\ -s\theta_1c\theta_3 - c\theta_1s\theta_2s\theta_3 & c\theta_2s\theta_3 & p_4 & r_4 \end{vmatrix} \\
 &= als\theta_1c\theta_1c\theta_2s\theta_3 - a^2s^2\theta_1s\theta_3
 \end{aligned}$$

和

$$n_2^r = 0$$

由此,可以得到二阶互易旋量系.

2. 三阶互易旋量系构造与逐级增广

例 8.10 图 8.5 所示的含三个转动副的机器人具有三阶旋量系.

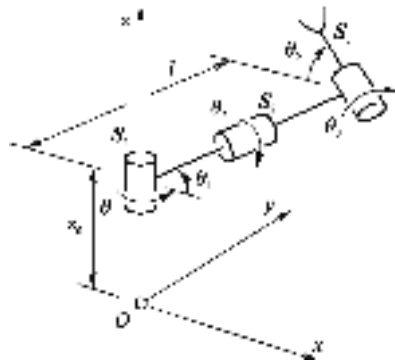


图 8.5 具有竖直轴线的 RRR 型串联机械臂

由旋量 S_1 、 S_2 和 S_3 给出的旋量组合矩阵如下:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c\theta_1 & s\theta_1 & 0 & -z_0s\theta_1 & z_0c\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1c\theta_2 & c\theta_1c\theta_2 & s\theta_2 & -z_0c\theta_1c\theta_2 + ls\theta_1s\theta_2 & -z_0s\theta_1c\theta_2 - lc\theta_1s\theta_2 & lc\theta_2 \end{bmatrix} \quad (8.83)$$

式中, s 表示 $\sin \theta$, c 表示 $\cos \theta$. 上述矩阵的第一个分块和分级增广产生的 4×4 子矩阵表示为

$$\mathbf{J}_a^1 = \begin{bmatrix} \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ c\theta_1 & s\theta_1 & 0 & -z_0s\theta_1 \\ -s\theta_1c\theta_2 & c\theta_1c\theta_2 & s\theta_2 & -z_0c\theta_1c\theta_2 + ls\theta_1s\theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} & \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ \cdot \end{array} \\ * & * \end{bmatrix} \quad (8.84)$$

如前, 令 m_1^r 和 n_1^r 为零. 第一个互易旋量其余的元素可从 4×4 子矩阵增广行的代数余子式中得到, 从而, 第一个互易旋量可表示为

$$\mathbf{S}_1^r = (c\theta_2, 0, 0, ls^2\theta_1s\theta_2, z_0c\theta_2 - lc\theta_1s\theta_1s\theta_2, 0)^T$$

平移式 (8.84) 的分块, 得

$$\mathbf{J}_a^2 = \begin{bmatrix} * & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & -z_0s\theta_1 & z_0c\theta_1 \\ c\theta_1c\theta_2 & s\theta_2 & -z_0c\theta_1c\theta_2 + ls\theta_1s\theta_2 & -z_0s\theta_1c\theta_2 - lc\theta_1s\theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} & * \\ * & * \\ * & * \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (8.85)$$

对于第二个互易旋量, 令 p_2^r 和 n_2^r 为零. 第二个互易旋量其余的元素可从上述 4×4 子矩阵的增广行的代数余子式中得到. 由此, 第二个互易旋量可以得到, 为

$$\mathbf{S}_2^r = (z_0c\theta_2 + lc\theta_1s\theta_1s\theta_2, ls^2\theta_1s\theta_2, 0, 0, z_0^2c\theta_2, 0)^T$$

第三次移位式 (8.85) 的分块

$$\mathbf{J}_a^2 = \begin{bmatrix} * & * & \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_0s\theta_1 & z_0c\theta_1 & 0 \\ s\theta_2 & -z_0c\theta_1c\theta_2 + ls\theta_1s\theta_2 & -z_0s\theta_1c\theta_2 - lc\theta_1s\theta_2 & lc\theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \\ * & * \\ * & * \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (8.86)$$

对于第三个互易旋量, 令 p_3^r 和 q_3^r 为零. 互易旋量其余的元素可从新的 4×4 子矩阵增广行的代数余子式中得到. 由此, 可获得第三个互易旋量, 为

$$\mathbf{S}_3^r = (lz_0c\theta_1c\theta_2, lz_0s\theta_1c\theta_2, z_0^2c\theta_2, 0, 0, 0)^T$$

至此, 得到了三阶互易旋量子系.

3. 四阶互易旋量系与递归分块

例 8.11 图 8.6 所示的具有两个转动副的串联机械臂可用来说明四阶互易旋量系的构造方法.

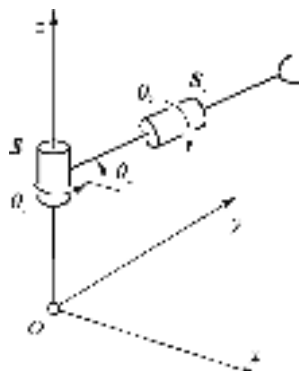


图 8.6 二自由度串联机械臂

这个机械臂机构中, 第一个转动运动副旋量为

$$S_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$$

第二个转动运动副旋量的轴线与第一个转动运动副旋量轴线垂直, 表示为

$$S_2 = (l, m, 0, p, q, 0)^T$$

两个转动运动副旋量形成一个二阶旋量系, 由此可得相应的旋量组合矩阵.

对旋量矩阵进行第一次分块和增广, 可以得到一个 3×3 主导子矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ l & m & 0 & p & q & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (8.87)$$

以主导子矩阵增广行的代数余子式为互易旋量的前三个元素, 令后三个元素为零, 则第一个互易旋量以其轴线坐标表示为

$$\Delta S_1^r = (-m, l, 0, 0, 0, 0)^T$$

由此, 射线坐标形式的互易旋量表示为

$$S_1^r = (0, 0, 0, -m, l, 0)^T$$

将分块矩阵向右移位一列, 产生一个新的 3×3 子矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & \boxed{0 \ 0 \ 1} & 0 & 0 \\ l & m & 0 & p & q & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (8.88)$$

可得第二个互易旋量为

$$\mathbf{S}_2^r = (m, 0, 0, 0, -p, 0)^T$$

同理, 第三个互易旋量可通过将分块矩阵继续右移一列得到

$$\mathbf{S}_3^r = (-q, p, 0, 0, 0, 0)^T$$

第四次矩阵分块与第一次矩阵分块相同, 但应采用分块后的第二个 3×3 子矩阵产生第四个互易旋量. 上述子矩阵不满秩, 因此需采用递归分块法. 将第二个 3×3 子矩阵的相关行移除后得到

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ l & m & 0 & | & p & q & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & | & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

对于右下角的 2×3 子矩阵采用递归分块法 (Dai 和 Rees Jones, 2002) 时, 有两种不同的分块方法, 因此又可得到两个互易旋量. 可以看出, 这两个互易旋量中只有一个与前面所得的互易旋量线性无关. 第一个递归分块产生一个新的互易旋量, 该旋量与前面获得的三个互易旋量线性相关. 第二个递归分块为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ l & m & 0 & | & p & q & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & | & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

于是, 第四个互易旋量为

$$\mathbf{S}_4^r = (0, 0, -q, 0, 0, 0)^T \quad (8.89)$$

至此, 可以得到二阶旋量系的四阶互易旋量系. 二阶旋量系与其四阶互易旋量系的关联关系可由交集 \mathbf{S}_1 表示 (Dai 和 Rees Jones, 2001).

8.8 误差分析与算法效率

用计算机求解线性系统问题, 对舍入误差作最小化处理是关键. 大多数的计算机运算采用归一化浮点数以及尾数部分的小数位 (Anton, 2000) 给出舍入位数至 n 个有效数位. 这种很小的舍入误差可以导致一些方程组 (例如病态方程组) 的求解明显不准确. 在 Gauss-Seidel 消元法中, 主元素 Gauss 消元法就是用来解决这一问题的. 列主元素 Gauss 消元法采用选择任意行第一列中具有最大系数的元素作为主元的方法, 将舍入误差的累计效果最小化. 全元素 Gauss 消元法则允许在任意列挑选主元, 但需要对未知数和方程重新排序. 这两种方法都需要花费一定的时间来选择和判断正确的主元. Cohn (1995) 分析了这些方法产生的误差.

本章将 Cohn 发现的 Gauss-Seidel 消元法的误差与本章基于多维零空间构造理论的求解法则的误差进行了比较. 为保证上述对比在同一载体上进行, 本节选取 Cohn 作误差分析时选用的方程组进行分析.

例 8.12 Cohn 作误差分析时选用的线性方程组如下:

$$\begin{cases} 0.1x_1 + 100x_2 - 50x_3 = 0 \\ 50x_1 - 20x_2 - 40x_3 = 0 \end{cases} \quad (8.90)$$

不采用列主元素 Gauss 消元法, 用一般的 Gauss-Seidel 消元法的过程为

$$\xrightarrow{R1 \rightarrow 10 \times R1} \begin{bmatrix} 1 & 1000 & -500 \\ 50 & -20 & -40 \end{bmatrix} \xrightarrow{R2 \rightarrow R2 - 50 \times R1} \begin{bmatrix} 1 & 1000 & -500 \\ 0 & -50020 & 24960 \end{bmatrix} \quad (8.91)$$

假如计算器舍入时保留三位有效数字, 第二个方程变为 $-50000x_2 = -25000x_3$, 第一个方程变为 $x_1 = -1000x_2 + 500x_3$. 令 x_3 为 λ , 则解空间向量为

$$\mathbf{b} = \lambda(0, 0.5, 1)^T$$

用替代法检验该解, 第二个方程产生的误差为 -50 , 其误差阶数为 10^1 .

采用 Gauss-Seidel 消元及列主元素 Gauss 消元法, 选择第一列中的最大元素 50 作为主元, 并交换两行, 得

$$\mathbf{b}' = \lambda'(1, 0.5, 1)^T$$

将上式代入式 (8.90), 得到误差为 0.1, 误差阶数为 10^{-1} .

应用本章的代数余子式法, 得到

$$\mathbf{b}'' = \lambda''(1, 0.499, 1)^T$$

其误差为 0.02, 误差阶数为 10^{-2} , 小于前两种方法的误差阶数.

与 Gauss-Seidel 消元法相比, 采用代数余子式法的另一个优点在于计算效率. 求解过程中的算术运算量可以用来评判一种求解法则效率的高低.

在本章的代数余子式法中, 每一个未知数需要进行两次乘法和一次加法来求解上述方程. 因此, 对于三个未知数来说, 需要六次乘法和三次加法. 相比而言, 式 (8.91) 所示的 Gauss-Seidel 消元法在行运算第一步需要三次乘法, 行运算第二步需要三次乘法和三次加法. 进一步在求解简单的三个未知数的方程组时, Gauss-Seidel 消元法还需要两次乘法和一次加法. 总共需要八次乘法和四次加法.

在求解含有三未知数和两个方程的齐次线性方程组时, 上述分析给出了使用代数余子式方法的标准运算次数和使用 Gauss-Seidel 算法的最少运算次数. 多数情况下, 使用 Gauss-Seidel 算法所需的运算次数超过使用代数余子式法的运算次数. 例如, 对于式 (8.11) 所示的第一个例子, 用类似的方法计算的算术运算量为: 采用代数余子式法需要进行六次乘法和三次加法, 而采用 Gauss-Seidel 算法需要进行八次乘法和六次加法.

参 考 文 献

- Aitken, A.C. (1939) *Determinants and Matrices*, Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh.
- Anton, H. (2000) *Elementary Linear Algebra*, 8th Edition, John Wiley & Sons Inc., New York.
- Ball, R.S. (1871) The theory of screws, a geometrical study of the kinematics, equilibrium, and small oscillations of a rigid body, *Transactions of the Royal Irish Academy*, **25**: 157-218.
- Cohn, P.M. (1995) *Elements of Linear Algebra*, Chapman & Hall Mathematics, London.
- Dai, J.S. (1993) *Screw Image Space and Its Application to Robotic Grasping*, PhD Dissertation, University of Salford, Manchester.
- Dai, J.S. (2014) *Screw Algebra and Kinematic Approaches for Mechanisms and Robotics*, Springer, London.
- Dai, J.S. and Rees Jones, J. (2000) Vectors of cofactors of a screw matrix and their relationship with reciprocal screws. *International Symposium Commemorating the*

- Legacy, Works, and Life of Sir Robert Stawell Ball Upon the 100th Anniversary of "A Treatise on the Theory of Screws"*, July 9-11, Cambridge, UK.
- Dai, J.S. and Rees Jones, J. (2001) Interrelationship between screw systems and corresponding reciprocal systems and applications, *Mech. Mach. Theory*, **36**(5): 633-651.
- Dai, J.S. and Rees Jones, J. (2002) Null space construction using cofactors from a screw algebra context, *Proc Royal Society London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **458**(2024): 1845-1866.
- Dai, J.S. and Rees Jones, J. (2002) Kinematics and mobility analysis of carton folds in packing manipulation, *J. Mech. Eng. Sci.*, **216**(C10): 959-970.
- Dai, J.S. and Rees Jones, J. (2003) A linear algebraic procedure in obtaining reciprocal screw systems, special issue in commemoration of Prof. J. Duffy, *Journal of Robotic Systems*, **20**(7): 401-412.
- Duffy, J. (1990) The fallacy of modern hybrid control theory that is based on 'orthogonal complements' of twist and wrench spaces, *J. Robot. Syst.* **7**(2): 139-144.
- Hartfield, D. J. and Hobbs, A. M. (1987) *Elementary Linear Algebra*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston.
- Kerr, D.R. and Sanger, D.J. (1989) The inner product in the evaluation of reciprocal screws, *Mech. Mach. Theory*, **24**(2): 87-92.
- Klein, F. (1871) Notiz betreffend den Zusammenhang der Linien-geometrie mit der Mechanik starrer Körper, *Math. Ann.*, **4**: 403-415.
- Strang, G. (1976) *Linear Algebra and Its Applications*, Academic Press Inc., New York.
- Sugimoto, K. and Duffy, J. (1982) Application of linear algebra to screw systems, *Mech. Mach. Theory*, **17**(1): 73-83.

第九章 旋量系对偶原理与分解定理

正如 Ball (1900) 所说, 约束系统特性包含用来确定满足约束需求的物体位姿的独立参量, 而这些不小于一且不大于六的独立参量数目就是自由度. 由此, 约束与自由度是紧密相关的, 犹如第二、三章谈到的旋量互易性, 以及第六、七章阐述的旋量系关联关系理论. 旋量系对偶理论通过研究旋量系的对偶特性, 使静力学和运动学特性紧密交织在一起.

本章揭示串、并联机构以及约束中旋量系的对偶关联性, 探索力旋量空间与运动旋量空间的对偶特性, 挖掘串联机构与并联机构的对偶特性. 根据旋量系转换定理与旋量系阶数定律, 提出基本旋量系对偶定理, 展示基本旋量子空间的关联结构. 基于旋量代数与相关几何方法, 讨论机器人学中关于约束与自由运动的基本问题, 阐述约束与运动旋量系, 重点研究约束旋量系的分解, 提出约束旋量系分解定理. 在此研究基础上, 本章深入分析约束、运动旋量系间以及与旋量多重集的关联逻辑, 提出关联关系理论, 阐述活动度扩展准则. 通过实例, 本章进一步揭示从传统的 Sarrus 连杆机构到新式可展机构等空间机构的本质特性 (Dai、Huang 和 Lipkin, 2004), 并于最后阐述 Schatz 过约束机构中约束旋量系的周期性变化与运动循环.

9.1 对偶原理

9.1.1 互易与对偶

互易和对偶是旋量理论的基本要素. 在旋量系理论中, 对偶性经常建立在互易特性的基础上. 正如 3.7 节中的分析, 当两个旋量的互矩即互易积为零时, 两个旋量互易. 这是奠定整个旋量系理论的基本原理. 当给定沿旋量 S_1 的约束力旋量 W 和沿旋量 S_2 的运动旋量 T 时, 存在类似式 (3.12) 的关系式, 为

$$\delta = W \circ T \quad (9.1)$$

当 $\delta = 0$ 时, 该力旋量与运动旋量互易, 由此具有双向约束. 力旋量 W 在运动旋量 T 上不做功.

当 $\delta > 0$ 时, 该力旋量施加于运动旋量上, 力旋量与运动旋量有正向关系, 被 Ball (1876) 称为冲力旋量.

当 $\delta < 0$ 时, 该力旋量与运动旋量具有逆向关系, 该约束为单边约束.

定义 9.1 在旋量理论中, 对偶特性也称对偶关系, 是指具有相同代数与几何结构但物理与几何意义成对比关系的两个概念之间对立统一的关系.

注释 9.1 射线坐标与轴线坐标具有相同的代数形式与几何结构, 但表示两种不同形式的旋量, 由此二者构成对偶关系. 运动旋量与力旋量的实质均为旋量, 但分别表示运动与约束, 二者构成对偶关系.

引理 9.1 一个系统的理论与推导经过适当的物理转换可应用到其对偶系统中, 此即对偶原理.

根据对偶原理, 以李代数射线坐标表示的运动旋量空间下的推导与计算可用于推导与验证以李代数轴线坐标表示的力旋量空间下的推导与计算, 反之亦然.

在本书中, 所有运动旋量和力旋量都采用射线坐标. 应用式 (2.55) 中的对偶算子 Δ , 可方便地用代数形式描述射线坐标与轴线坐标对偶的本质属性.

9.1.2 并联机构运动旋量空间与力旋量空间的交并集对偶原理

一个物理系统的力旋量空间和运动旋量空间是对偶的. 因此, 力旋量的并集与运动旋量的交集具有对应关系.

1. 力旋量空间的并集

抓持系统是旋量空间对偶关联的最好的演示平台. 当 n 个力旋量作为约束沿着物体的接触旋量 S_1, \dots, S_n 作用时, 这些旋量构成抓持矩阵 J . 当外部力旋量 W 作用于被抓持物体时, 对每一约束产生了一个力幅值, 所有这些力幅值构成向量 f , 上述过程可表示为

$$Jf = W \quad (9.2)$$

式中, Jf 表示抓持产生的用于抵抗外部作用力的力旋量. W 为外部施加的力旋量或抓持系统中的等效合成力旋量; 当抓持为形封闭时, W 为抓持中的剩余约束旋量 (Lakshminarayana, 1978). 式 (9.2) 可用来表示抓持物体或并联机构的静平衡.

式 (9.2) 中的外部力旋量 W 可看做接触力旋量在力旋量空间的并集, 即

$$W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n \quad (9.3)$$

综上所述, 抓持系统或并联机构运动平台的约束是由各个接触力旋量方向上或各运动链 (也称为支链或腿) 施加的全部约束力旋量的并集. 从机构静力学的角度来看, 运动平台上的合成力旋量即为所有运动支链所施加的驱动力旋量的并集, 根据此原理可推导出静力学正解.

2. 运动旋量空间的交集

对于抓持系统, 矩阵 J 中的每一个接触旋量 S_1, \dots, S_n 均具有潜在位移, 而被抓持物体的一般位移 D 是所有在接触旋量 S_i 上的潜在位移 T_i 的交集, 即沿着接触旋量 S_1, \dots, S_n 的运动旋量的交集, 为

$$D = T_1 \cap T_2 \cap \dots \cap T_n \quad (9.4)$$

以接触旋量 S_1, \dots, S_n 为列向量构造矩阵 J , 以运动旋量的幅值构造向量 u , 则由含义为运动旋量的接触旋量与被抓持物体的一般位移 D 的标量积 (见 3.2.1 节) 可给出接触旋量上运动旋量的幅值向量 u , 为

$$u = J^T \Delta D \quad (9.5)$$

式中, D 表示在运动旋量空间中所有可能的运动旋量的交集.

上述过程分析了抓持系统中各个接触旋量方向上的运动旋量的交运算. 类似地, 并联机构运动平台的运动也可视为所有运动支链的运动的交集. 据此, 可以推导出并联机构的瞬时运动学逆解.

3. 运动旋量空间与力旋量空间的关系

在抓持系统中, 力旋量与运动旋量之间存在正向及逆向形式的双向或单向约束关系. 在并联机构中, 则只有单向约束关系. 运动旋量空间与力旋量空间的对偶性可以通过并联机构来揭示. 对应于运动旋量的幅值向量 u 与施加力旋量的幅值向量 f 有如下关系:

$$f = -Ku \quad (9.6)$$

式中, 刚度矩阵 K 表示并联机构的物理特性.

9.1.3 串联机构与并联机构旋量空间的对偶原理

类似于并联机构, 串联机构的运动旋量空间和力旋量空间是对偶的, 并且串联机构与并联机构也是对偶的. 从几何学和力学的观点看, 串联机构和并联机构在运动旋量和力旋量方面存在对偶关系. 从物理学应用的角度看, 串联机构的弱点就是并联机构的优势, 反之亦然.

1. 串联机构的运动旋量空间与并联机构的力旋量空间的对偶性

对应于式 (9.3) 所示的并联机构力旋量空间的并集, 串联机构运动旋量空间的并集与之对偶, 为

$$T = T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_n \quad (9.7)$$

这种情况下, 串联机构末端执行器的运动旋量 T 是串联机构各运动副运动旋量 S_1, \cdots, S_n 的线性组合, 表示为

$$T = \sum_{i=1}^n \delta q_i S_i = J \delta q \quad (9.8)$$

式中, δq_i 是第 i 个运动副的运动旋量 S_i 的幅值, 为标量. 运动副旋量 S_1, \cdots, S_n 的组合给出运动旋量系的 $6 \times n$ Jacobian 矩阵 J , 运动旋量的组合由 $J \delta q$ 给定.

式 (9.8) 与描述并联机构力旋量空间的式 (9.2) 对偶, 给出了串联机构瞬时运动学正解.

2. 串联机构的力旋量空间与并联机构的运动旋量空间的对偶性

对应于式 (9.4) 中并联机构的运动旋量空间交集, 串联机构的力旋量空间交集与之有对偶关系. 串联机构的力旋量空间交集与并联机构的运动旋量空间交集对偶, 为

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 \cap \cdots \cap \mathbf{W}_n \quad (9.9)$$

由此, 串联机构的末端执行器产生的力旋量是施加于旋量 $\mathbf{S}_1, \cdots, \mathbf{S}_n$ 上的所有力旋量的交集, 表示为

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \Delta \mathbf{W} \quad (9.10)$$

式中, 向量 $\boldsymbol{\tau}$ 为力旋量交集的幅值.

式 (9.10) 与描述并联机构运动旋量空间的式 (9.5) 对偶, 给出了串联机构静力学正解.

3. 柔度与刚度的对偶性

如式 (9.6), 刚度在并联机构中通过运动幅值和力幅值将运动旋量空间与力旋量空间关联, 而柔度在串联机构中通过力幅值和运动幅值将力旋量空间与运动旋量空间关联, 即为

$$\delta \mathbf{q} = -\mathbf{C} \boldsymbol{\tau} \quad (9.11)$$

式中, \mathbf{C} 是关联力旋量幅值 $\boldsymbol{\tau}$ 与运动旋量幅值 $\delta \mathbf{q}$ 的柔度矩阵.

9.1.4 物体抓持、并联机构和串联机构对偶原理一览表

串并联机构的对偶性意味着, 在没有引入新概念或数学运算情况下, 一个物理机构可以用来理解和描述另一个物理机构. 关于运动旋量和力旋量以及正解和逆解的描述, 可以根据对偶的物理机构进行互换.

通过上述内容可以理解, 抓持原理在数学与力学的描述上完全等同于并联机构原理. 同时, 在运动旋量和力旋量空间的数学与力学描述及运算方面, 并联机构与串联机构是对偶的.

这一对偶性可概括于表 9.1.

表 9.1 运动旋量与力旋量的对偶原理一览表

	物体抓持	并联机构	串联机构
旋量代数	力旋量空间并集, 式 (9.3)		运动旋量空间并集, 式 (9.7)
物理意义	静力学		运动学
分析方法	正向		正向
	$Jf = W$, 式 (9.2)	$Jf = W$, 式 (9.2)	$J\delta q = T$, 式 (9.8)
旋量代数	运动旋量空间交集, 式 (9.4)		力旋量空间交集, 式 (9.9)
物理意义	运动学		静力学
分析方法	几何一致性	逆向	逆向
	$u = J^T \Delta D$, 式 (9.5)	$u = J^T \Delta D$, 式 (9.5)	$\tau = J^T \Delta W$, 式 (9.10)
旋量代数	运动旋量和力旋量关联关系		运动旋量和力旋量关联关系
物理意义	弹性		柔性
	$f = -Ku$, 式 (9.6)	$f = -Ku$, 式 (9.6)	$\delta q = -C\tau$, 式 (9.11)

9.2 运动支链旋量系与基本旋量系

定义 9.2 运动链为运动副连接的若干个刚体的有序组合.

定义 9.3 运动副为两个刚体间的连接方式, 以对它们间的相对运动施加一定的约束.

定义 9.4 连杆系是由一个或若干个子运动链构成的, 以实现一定功能的运动链组合.

定义 9.5 机构为具有固定机架的连杆系.

注释 9.2 运动副常用纯转动、纯移动等理想运动来描述, 运动副的轴线可用旋量来表示. 连杆系为采用刚性连杆与理想运动副作为连接的机械网络, 也称运动链. 机构是若干个刚体连接的组合, 以产生和传输力与运动. 机构运动学研究是对刚体或连杆的几何运动及其特性进行研究. 常见的例子为系列连杆连接而成的开环运动链或者系列连杆连接而成的闭环运动链, 最典型的如串并联机器人.

9.2.1 运动支链旋量系

机构分析可以从输出杆件开始. 该杆件可以是并联机构的运动平台, 或

者串联机构的末端执行器,或者其他任何一个需要作运动学与静力学分析的输出杆件.相对于该输出杆件,其子运动链为连接该杆件与机架的运动链.假设每个子运动链的所有运动副旋量是线性无关的,由此排除子运动链中的冗余和奇异构型.基于此,给出以下定义.

定义 9.6 第 i 个子运动链运动旋量系 S_{li} 为由描述构成子运动链的运动副的各个旋量组成的旋量空间,可用于生成该子运动链相对机架对输出杆件的运动.

定义 9.7 第 i 个子运动链约束旋量系 S_{li}^r 为由描述子运动链施加的约束的各个旋量组成的旋量空间,可用于生成该子运动链相对机架对输出杆件的约束.

第 i 个子运动链运动旋量系 S_{li} 与该子运动链的约束旋量系 S_{li}^r 互易.

9.2.2 四个基本旋量系

子运动链运动和约束旋量系的并和交运算生成如下四个基本旋量系.

1. 输出杆件旋量系

定义 9.8 连接度为确定一杆件相对另一杆件位姿的独立参数数目.

定义 9.9 自由度为确定一杆件空间位置与姿态的独立参数即相对机架的位姿的参数数目.自由度数受空间维数的限制.

定义 9.10 输出杆件运动旋量系为所有 k 个子运动链的运动旋量系的交集,即

$$S_f = S_{l1} \cap S_{l2} \cap \cdots \cap S_{lk} (f \equiv \dim S_f) \quad (9.12)$$

应该指出,该运动旋量系决定了输出杆件的运动,因此表示了输出杆件相对于机架的连接度,也称输出杆件的自由度 f .该自由度由输出杆件的运动旋量系阶数决定.

定义 9.11 输出杆件约束旋量系为所有 k 个子运动链的约束旋量系的并集,即

$$S^r = S_{l1}^r \cup S_{l2}^r \cup \cdots \cup S_{lk}^r (\mu \equiv \dim S^r) \quad (9.13)$$

该约束旋量系与输出杆件的运动旋量系是互易的.

这两个旋量系分别描述了输出杆件相对于机架的运动和约束. 输出杆件运动旋量系 S_f 生成所有子运动链的公共运动空间, 输出杆件约束旋量系 S^r 则由所有子运动链约束空间并成的输出杆件约束空间. 因而, 机构输出杆件的任一运动必须被所有的子运动链所允许, 但任一约束都可以被任一子运动链所施加.

2. 机构旋量系

上述内容给出了输出杆件的运动与约束旋量系, 以下两个旋量系则描述了整个机构的运动与约束.

定义 9.12 机构运动旋量系为所有 k 个子运动链的运动旋量系的并集, 即

$$S_m = S_{l_1} \cup S_{l_2} \cup \cdots \cup S_{l_k} (b \equiv \dim S_m) \quad (9.14)$$

该旋量系决定了机构运动的旋量系的阶数.

定义 9.13 机构约束旋量系为所有 k 个子运动链的约束旋量系的交集, 即

$$S^c = S_{l_1}^r \cap S_{l_2}^r \cap \cdots \cap S_{l_k}^r (\lambda \equiv \dim S^c) \quad (9.15)$$

该约束旋量系与机构运动旋量系互易, 给出了机构的公共约束. 该旋量系的阶数即为所有子运动链的公共约束的最大线性无关组的约束旋量数目.

定义 9.14 公共约束为由机构中各运动副的特性及其特殊配置对某一构件产生的共同约束. 对于多环运动链, 为所有子运动链对某一杆件施加的相同约束.

机构运动旋量系 S_m 涵盖了机构中所有子运动链的杆件间所允许的相对运动. 从对偶的概念来看, 机构约束旋量系 S^c 是所有子运动链共享的公共约束子空间.

9.3 基本旋量系的对偶定理

上节给出的四个旋量系形成了以下定理总结的两对具有对偶关系的旋量系, 可以通过根据 De Morgan 定律推出的旋量系转换定理、式 (6.49) 与式 (6.50) 以及旋量系阶数定律式 (6.51) 验证.

9.3.1 基本旋量系的互易关系定理

定理 9.1 输出杆件运动旋量系 S_f 和输出杆件约束旋量系 S^r 形成输出杆件的运动与约束的互易关系, 可表示为

$$(S_f)^r = S^r, \quad \dim S_f + \dim S^r = f + \mu = 6 \quad (9.16)$$

定理 9.2 机构运动旋量系 S_m 和机构约束旋量系 S^c 形成了机构所有杆件的运动与约束的互易关系, 可表示为

$$(S_m)^r = S^c, \quad \dim S_m + \dim S^c = b + \lambda = 6 \quad (9.17)$$

9.3.2 基本旋量系的从属关系定理

由于旋量系的交集总包含于其并集中, 从定义 9.10 至 9.13 可得出如下定理.

定理 9.3 机构运动旋量系包含输出杆件运动旋量系, 表示为

$$S_f \subseteq S_m \quad (9.18)$$

定理 9.4 输出杆件约束旋量系包含机构约束旋量系, 表示为

$$S^c \subseteq S^r \quad (9.19)$$

9.3.3 基本旋量子空间的从属与互易关联结构

定理 9.1~ 定理 9.4 描述了四个基本旋量系的关联关系, 在运动旋量空间与约束旋量空间中, 这四个基本旋量系分别对应着四个基于互易关系与从属关系的基本旋量子空间, 如图 9.1 所示.

定理 9.3 与定理 9.4 给出了机构的两个基本旋量系与输出杆件的两个基本旋量系的从属关系, 根据对偶原理, 上述两组从属关系可互相转换, 如图 9.2 所示.

由上可知, 定义 9.6 和定义 9.7 中的运动链运动旋量系和约束旋量系形成了定义 9.10 至定义 9.13 中机构的四个基本旋量系 S_f, S^r, S_m 和 S^c . 因此, 机构的旋量系决定了机构的运动、约束, 从而能决定机构的活动度. 本章的旋量系分解理论将对机构活动度问题作更深入的阐述.

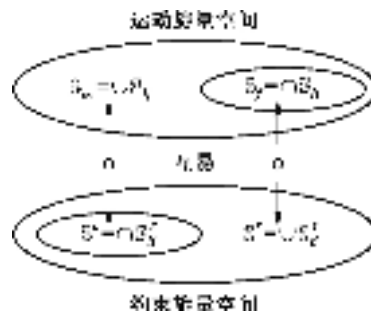


图 9.1 互易对中四个基本旋量子空间的关联关系

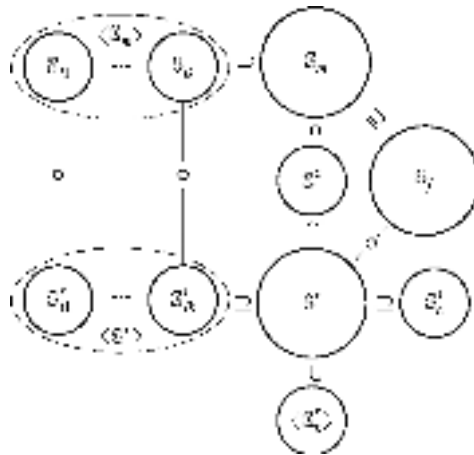


图 9.2 机构旋量子系从属与互易关系

9.4 公共约束旋量子系与其多重集

定义 9.15 公共约束旋量子系为机构 k 个子运动链对输出构件施加的相同约束的最大无关组. 公共约束旋量子系也称为机构约束旋量子系.

注释 9.3 公共约束旋量子系是 k 个子运动链的约束旋量子系的交集, 这里的每一个子运动链都提供这一公共的约束子空间.

定义 9.16 公共约束旋量子多重集为

$$\langle S^c \rangle = \langle S^r_{i1} \rangle \cap \langle S^r_{i2} \rangle \cap \cdots \cap \langle S^r_{ik} \rangle \quad (9.20)$$

可见式 (9.15). 由于公共约束为各子运动链均提供共同的约束, 因此公共约

束旋量多重集及其基数可表示为

$$\langle \mathbb{S}^c \rangle = \mathbb{S}^c \uplus \mathbb{S}^c \uplus \cdots \uplus \mathbb{S}^c, \quad (k \text{ 个 } \mathbb{S}^c) \quad (9.21)$$

和

$$\text{card} \langle \mathbb{S}^c \rangle = k \dim \mathbb{S}^c \quad (9.22)$$

式中, 用多重集并算子 \uplus 来组合子运动链公共约束旋量系的基, 以构建一个多重集.

由此, 可以获得公共约束旋量多重集及其基数. 其中 \uplus 表示多重集并运算, 类似定义 6.7 和定理 6.8 中的直和, 但允许线性相关并构成新的多重集.

定义 9.17 冗余公共约束旋量多重集为

$$\langle \mathbb{S}_v^c \rangle = \langle \mathbb{S}^c \rangle - \mathbb{S}^c = \mathbb{S}^c \uplus \mathbb{S}^c \uplus \cdots \uplus \mathbb{S}^c, \quad (k-1 \text{ 个 } \mathbb{S}^c) \quad (9.23)$$

则冗余公共约束旋量的数目为

$$\text{card} \langle \mathbb{S}_v^c \rangle = (k-1) \dim \mathbb{S}^c \quad (9.24)$$

根据以上内容可知, 公共约束旋量系的阶数即为公共约束因子 λ , 它降低了机构运动旋量系的阶数. 公共约束旋量多重集以及冗余公共约束旋量多重集对机构活动度计算的影响体现在活动度系数 b 的变化中, 见后续的 9.9.2 节, 其对基于环路的活动度扩展准则的影响见 9.9.3 节.

9.5 互补约束旋量系与其多重集

定义 9.18 互补约束旋量多重集为除公共约束旋量多重集以外的约束旋量的集合, 记为 $\langle \mathbb{S}_c^r \rangle$, 可表示为

$$\langle \mathbb{S}_c^r \rangle = \langle \mathbb{S}^r \rangle - \langle \mathbb{S}^c \rangle$$

式中, $\langle \mathbb{S}^r \rangle$ 为输出杆件约束旋量多重集, 其旋量系见定义 9.11.

定义 9.19 互补约束旋量系为互补约束旋量多重集中的最大线性无关组, 记为 \mathbb{S}_c^r .

定义 9.20 冗余约束也称虚约束¹, 是在互补约束旋量多重集中同互补约束旋量系线性相关的旋量.

互补约束旋量多重集的全部线性相关旋量的集合构成冗余约束旋量多重集, 记为 $\langle S_c^r \rangle \subset S_c^r$.

引理 9.2 第 i 个子运动链互补约束旋量系 S_{ci}^r 为从属于第 i 个子运动链约束旋量系且与机构公共约束旋量系构成直和关系的旋量系, 即

$$S_{li}^r = S^c \cup S_{ci}^r, \quad (S^c \cap S_{ci}^r = \emptyset) \quad (9.25)$$

式中, S_{li}^r 表示第 i 个子运动链作用于输出构件上的所有约束, 为子运动链运动旋量系的互易旋量系, 见定义 9.7.

引理 9.3 子运动链约束旋量系可以分解为两部分: 一部分为 S^c , 以约束全部机构的运动, 并约束输出构件的运动, 将其保持在机构运动旋量系 S_m 中; 另一部分为互补约束旋量系 S_{ci}^r , 以进一步约束输出构件的运动, 使其保持在子运动链运动旋量系 S_{li} 中, 这里 $S_{li} \subseteq S_m$, 见定义 9.12. 当子运动链各个运动旋量线性无关时, 在式 (9.25) 中, 两部分对应的基元素构成两个不相交的集合. 当子运动链各个运动旋量线性相关时, 见 9.8 节.

9.6 约束旋量系分解定理

9.6.1 输出杆件约束旋量多重集与互补约束旋量多重集

引理 9.4 输出杆件约束旋量多重集是公共约束旋量多重集与互补约束旋量多重集的多重集和, 表示为

$$\langle S^r \rangle = \langle S^c \rangle \uplus \langle S_c^r \rangle, \quad (\langle S^c \rangle \cap \langle S_c^r \rangle = \emptyset) \quad (9.26)$$

式中

$$\begin{aligned} \langle S^r \rangle &= S_{l1}^r \uplus S_{l2}^r \uplus \cdots \uplus S_{lk}^r \\ \langle S_c^r \rangle &= S_{c1}^r \uplus S_{c2}^r \uplus \cdots \uplus S_{ck}^r \end{aligned}$$

¹张启先在 1984 年的《空间机构的分析与综合》中将这种约束称为重复约束或消极约束.

式中, 用多重集并算子 \uplus 来组合子运动链约束旋量系的基, 以构建为两个不相交的多重集; $\langle S^r \rangle$ 是输出杆件约束旋量多重集, 表示由所有子运动链作用于输出构件上的所有约束的集合; $\langle S^c \rangle$ 是公共约束旋量多重集, 表示作用于输出构件上的一部分约束, 以限制输出构件运动在机构运动旋量多重集 $\langle S_m \rangle$ 的范围内, 公共约束旋量多重集具有 $k-1$ 次冗余; $\langle S_c^r \rangle$ 是互补约束旋量多重集, 进一步限制输出构件的运动到输出构件运动旋量多重集 $\langle S_f \rangle$ 范围内, 这里 $\langle S_f \rangle \subseteq \langle S_m \rangle$, 见定理 9.3.

由于多重集并的基数等于各个多重集基数的和, 式 (9.26) 的基数关系可表示为

$$\text{card} \langle S^r \rangle = \text{card} \langle S^c \rangle + \text{card} \langle S_c^r \rangle = k \dim S^c + \text{card} \langle S_c^r \rangle \quad (9.27)$$

由定义 9.11 可得

$$\text{card} \langle S^r \rangle = \sum_{i=1}^k \text{card} \langle S_{li}^r \rangle = \text{card} \langle S^c \rangle + \text{card} \langle S_c^r \rangle \quad (9.28)$$

式中, k 为子运动链的数目. 另外, 由于一般情况下公共约束旋量多重集与互补约束旋量多重集不相交, 如式 (9.26), 因此它们的基也不相交, 表示为

$$\dim S^r = \dim S^c + \dim S_c^r \quad (9.29)$$

当公共约束旋量系与互补约束旋量系相交时, 见 9.8 节. 一般情况下, 互补约束旋量多重集 $\langle S_c^r \rangle$ 中包含有需要识别的冗余约束, 其分解可以由下一节的引理 9.5 给定.

9.6.2 冗余约束旋量多重集

引理 9.5 互补约束旋量多重集可分解为

$$\langle S_c^r \rangle = S_c^r \uplus \langle S_v^r \rangle \quad (9.30)$$

式中, 互补约束旋量系 S_c^r 是互补约束旋量多重集 $\langle S_c^r \rangle$ 中的最大线性无关旋量组, 其余旋量组成冗余约束旋量多重集 $\langle S_v^r \rangle$. 显而易见, 该分解并不唯一.

定义 9.21 冗余约束旋量多重集为互补约束旋量多重集与互补约束旋量系的差, 即

$$\langle S_v^r \rangle = \langle S_c^r \rangle - S_c^r$$

9.6.3 分解定理与分解过程

根据 9.4 节与 9.6.1 节、9.6.2 节对公共约束旋量多重集和冗余约束旋量多重集等概念的阐述以及引理 9.2 至引理 9.5, 给出下述定理.

定理 9.5 约束旋量系分解定理 在旋量系理论中, 对输出杆件约束旋量多重集 $\langle S^r \rangle$ 进行下述分解, 可准确识别公共约束旋量多重集、互补约束旋量系以及冗余约束旋量多重集, 即

$$\langle S^r \rangle = \langle S^c \rangle \uplus \langle S_c^r \rangle = \langle S^c \rangle \uplus S_c^r \uplus \langle S_v^r \rangle \quad (9.31)$$

由此, 输出杆件约束旋量系与公共约束旋量系及互补约束旋量系有下述关系,

$$S^r = S^c \oplus S_c^r \quad (9.32)$$

该分解与方法构成约束旋量系分解定理.

约束旋量系的分解过程具体为:

(1) 将输出杆件约束旋量多重集分解为公共约束旋量多重集 $\langle S^c \rangle$ 与互补约束旋量多重集 $\langle S_c^r \rangle$ (见引理 9.4). 这两个多重集产生两个约束旋量系, 即公共约束旋量系 S^c 与互补约束旋量系 S_c^r .

(2) 对输出杆件互补旋量多重集 $\langle S_c^r \rangle$ 进行分解, 产生互补约束旋量系 S_c^r 以及与其关联的冗余约束旋量多重集 $\langle S_v^r \rangle$, 即引理 9.5 中的式 (9.30).

注释 9.4

(1) 该定理可获取过约束并联机构的公共约束与冗余约束, 是 9.9 节解决机构活动度问题的基础.

(2) 该定理从旋量系的物理意义出发, 揭示了机构的运动机理, 即公共约束旋量系 S^c 施加约束至机构, 输出杆件的运动首先被限制到机构运动旋量系 S_m , 由此公共约束旋量系也称机构约束旋量系. 互补约束旋量系 S_c^r 进一步将输出杆件的运动由机构运动旋量系 S_m 约束至输出杆件运动旋量系 S_f . 在这一过程中, 冗余约束旋量多重集 $\langle S_v^r \rangle$ 对机构和输出杆件的运动无约束作用.

(3) 约束旋量系分解定理与第七章的旋量系关联关系定理, 第八章的旋量系零空间构造定理以及本章的旋量系对偶定理称为旋量系理论的四大定理.

9.7 约束、运动旋量系间以及与多重集的关联关系

9.7.1 互补约束旋量系与冗余约束旋量多重集的关联关系

互补约束旋量多重集基数及其旋量系基数与冗余旋量多重集基数的关系为

$$\text{card} \langle S_c^r \rangle = \dim S_c^r + \text{card} \langle S_v^r \rangle \quad (9.33)$$

将上式代入式 (9.27), 可得式 (9.31) 的基数关系, 为

$$\text{card} \langle S^r \rangle = k \dim S^c + \dim S_c^r + \text{card} \langle S_v^r \rangle \quad (9.34)$$

如上所述, 互补约束旋量多重集 $\langle S_c^r \rangle$ 表示的约束进一步将输出构件的运动由机构运动旋量多重集 $\langle S_m \rangle$ 限制到输出构件运动旋量多重集 $\langle S_f \rangle$ 中, 这两种旋量系的关系可见定理 9.3 的表述. 式 (9.30) 中的约束 $\langle S_v^r \rangle$ 为冗余部分且对将输出构件的运动约束到 $\langle S_f \rangle$ 没有贡献. 此结论可以总结为以下推论.

推论 9.1 冗余约束旋量多重集 $\langle S_v^r \rangle$ 从属于互补约束旋量系 S_c^r 并对输出构件形成冗余约束 (Dai、Huang 和 Lipkin, 2004; 2006).

注释 9.5 冗余约束旋量多重集不影响输出构件的运动, 对机构活动度没有影响, 但运用 Grübler-Kutzbach 活动度准则运算时, 会被考虑为有效约束, 以至于活动度出现负值. 本书 9.9 节提出的活动度扩展准则将充分考虑其对活动度计算的影响.

9.7.2 约束与运动旋量系以及冗余约束旋量多重集的关联关系

继 9.4 节关于公共约束旋量系即机构约束旋量系的讨论与 9.5 节关于互补约束旋量系的讨论后, 9.6 节提出了输出杆件约束旋量系可分解为公共约束旋量系和互补约束旋量系, 从而互补约束旋量系与 9.2.2 节提出的四个基本旋量系共同构成了机构的五个旋量系. 与互补约束旋量系线性相关的约束旋量构成冗余约束旋量多重集. 由 9.6.3 节定理 9.5 提出的约束旋量系分解理论与 9.3 节提出的旋量系对偶理论, 各个旋量系之间以及与多重集之间的互易与从属、包含与相交等关联关系可由图 9.3 所示的维恩图 (Venn diagram) 来表示.

推论 9.2 包含冗余公共约束旋量数目的机构综合约束冗余因子简称综合冗余因子 c , 为

$$c = (k - 1)\lambda + \nu \quad (9.36)$$

式中, 公共约束因子 λ 及虚约束冗余因子 ν 分别表示为

$$\begin{aligned} \lambda &= \dim \mathbb{S}^c \\ \nu &\equiv \text{card} \langle \mathbb{S}_v^r \rangle = \text{card} \langle \mathbb{S}_c^r \rangle - \dim \mathbb{S}_c^r \end{aligned} \quad (9.37)$$

注释 9.6 推论 9.2 中, 式 (9.36) 的第一项 $(k - 1)\lambda$ 表示子运动链组成的冗余公共约束个数, 该项与机构中运动副分布无关. 然而, 输出构件进一步受到子运动链中运动副的特殊配置的约束. 第二项虚约束冗余因子 ν 表示由机构中运动副的特殊配置造成的输出构件的约束的冗余数.

推论 9.3 机构的综合约束冗余因子也可以由约束旋量多重集的基数和约束旋量系的阶数来表示

$$c \equiv \text{card} \langle \mathbb{S}^r \rangle - \dim \mathbb{S}^r \quad (9.38)$$

基于定义 9.17、定义 9.21 和推论 9.2, 该关系还可以进一步表示为

$$c = (k - 1)\dim \mathbb{S}^c + \text{card} \langle \mathbb{S}_v^r \rangle = (k - 1)\dim \mathbb{S}^c + \nu \quad (9.39)$$

式 (9.39) 中, 含冗余公共约束的综合冗余因子 c 表示输出构件约束旋量多重集中的冗余旋量的总数, 包含了冗余约束旋量多重集 $\langle \mathbb{S}_v^r \rangle$ 的基数和冗余公共约束旋量多重集 $\langle \mathbb{S}_c^c \rangle$ 的基数. 其中冗余公共约束旋量多重集是 $k - 1$ 次重复的公共约束旋量, 见定义 9.17.

当子运动链约束旋量系 \mathbb{S}_i^r 确定后, 综合冗余因子 c 可以很容易地由式 (9.38) 获得, 该计算只需用输出杆件约束旋量多重集 $\langle \mathbb{S}^r \rangle$ 的元素数目减去其线性无关旋量的数目.

9.7.4 有限位移旋量系、多重集及整周运动

当 9.5 节、9.6 节与本节内容中的旋量系和多重集均为第四章和第五章中的有限位移旋量时, 以上原理同样适用, 且可以构成群结构以表达机构的整周运动.

9.8 公共约束旋量系与互补约束旋量系的关联关系

一般情况, 公共约束旋量系与互补约束旋量系是线性无关的. 当出现线性相关时, 虽然互补约束旋量系阶数不变, 但公共约束旋量系隶属于互补约束旋量系, 导致输出杆件的冗余约束旋量数增加. 此时, 公共约束旋量系仍为机构约束旋量系, 但冗余约束旋量多重集的基数增加, 即 9.7.3 节中的虚约束冗余因子 ν 增加. 其增加数为公共约束旋量系与互补约束旋量系的线性相关数, 或称公共约束与互补约束交叉冗余度. 这可由下面的分析与逻辑关系图表示.

9.8.1 公共约束、互补约束与输出杆件约束旋量系的关联关系

若公共约束旋量系 S^c 与互补约束旋量系 S_c^r 线性无关, 则输出杆件约束旋量系为该两个旋量系直和, 表示为式 (9.32). 其逻辑关系见图 9.4.

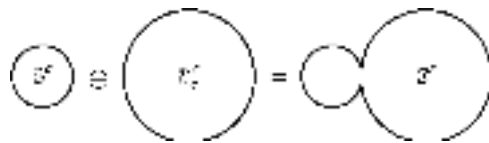


图 9.4 公共约束、互补约束与输出杆件约束旋量系的关联关系 ($S^c \cap S_c^r = \emptyset$)

若公共约束旋量系 S^c 与互补约束旋量系 S_c^r 线性相关, 以机构旋量系中较为常见的全相关为例, 则公共约束旋量系从属于互补约束旋量系 S_c^r . 因此输出杆件约束旋量系表示为

$$S^c \cup S_c^r = S^r$$

相应的旋量系的关联关系见图 9.5.

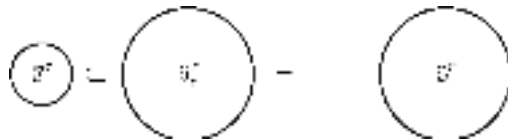


图 9.5 公共约束、互补约束与输出杆件约束旋量系的关联关系 ($S^c \cap S_c^r = S^c$)

若公共约束旋量系 S^c 与互补约束旋量系 S_c^r 部分线性相关, 则公共约束旋量系与互补约束旋量系 S_c^r 产生交集. 因此输出杆件约束旋量系表示为

$$S_c^r \oplus (S^c - S^c \cap S_c^r) = S^r \quad (9.40)$$

其旋量系的关联关系见图 9.6.



图 9.6 公共约束、互补约束与输出杆件约束旋量系的关联关系 ($S^c \cap S_c^r \neq \emptyset$)

9.8.2 约束旋量系与冗余约束旋量多重集的关联关系

若公共约束旋量系 S^c 与互补约束旋量系 S_c^r 线性无关, 则冗余约束旋量多重集 $\langle S_v^r \rangle$ 不变. 约束旋量系与冗余约束旋量多重集关联关系见图 9.7.

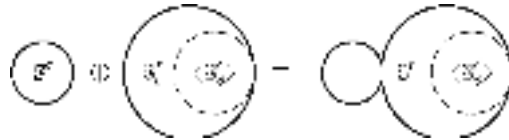


图 9.7 约束旋量系与冗余约束旋量多重集的关联关系 ($S^c \cap S_c^r = \emptyset$)

若公共约束旋量系 S^c 与互补约束旋量系 S_c^r 完全线性相关, 即 $S_c \subseteq S_c^r$, 则相关部分的公共约束旋量系 S^c 增加了冗余约束旋量多重集 $\langle S_v^r \rangle$. 此时冗余约束旋量多重集 $\langle S_v^r \rangle$ 的基数增加, 由此虚约束冗余因子 ν 增加, 其增加部分是公共约束旋量的阶数. 约束旋量系与冗余约束旋量多重集关联关系见图 9.8.



图 9.8 约束旋量系及冗余约束旋量多重集的关联关系 ($S^c \cap S_c^r = S^c$)

当公共约束旋量系 S^c 与互补约束旋量系 S_c^c 部分线性相关, 公共约束旋量系与互补约束旋量系 S_c^c 产生交集. 此时冗余约束旋量多重集 $\langle S_c^c \rangle$ 的基数增加, 其增加部分是公共约束旋量与互补约束旋量系相交的阶数. 由此虚约束冗余因子 ν 相应增加. 约束旋量系与冗余约束旋量多重集部分相交关系见图 9.9.

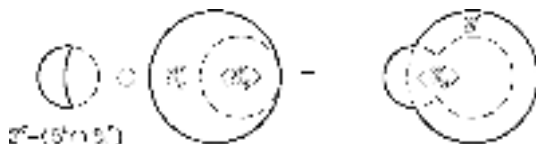


图 9.9 约束旋量系及冗余约束旋量多重集的关联关系 ($S^c \cap S_c^c \neq \emptyset$)

9.9 活动度扩展准则

9.9.1 约束与活动度

抓持是展示系统约束原理的最佳物理模型. 任何作用于物体上的约束可以由运动链提供, 这就可以将关联关系理论延伸到运动链与机构. 如前所述, 抓持的互易特性是识别旋量系的基础, 而旋量系间的关联关系给出抓持物体或机构的约束与活动度. 两个旋量系代表不同的物理量, 其关联关系由式 (8.1) 给出. 因此, 旋量系互易特性可用来区分约束与活动度并给出二者间的内在关系. 这里需要回顾 6.1.2 节中关于互易旋量系及其源旋量系与约束和自由运动, 其相互关系在第七章中作了充分研究. 为了充分理解活动度与自由度, 下面给出相关定义的详细论述.

定义 9.22 活动度全称为相对活动度, 是指机构中最大的连接度, 有时也称机构的自由度, 或运动链的自由度.

定义 9.23 冗余机构为机构活动度大于输出构件所需自由度的机构, 也称具有运动冗余的机构.

定义 9.24 机构运动冗余度为机构活动度 m 与输出构件自由度 n 之差, 即 $D = m - n, m > n$.

注释 9.7 连接度与活动度都为机构的输入参数. 前者为确定单一构件对另一构件相对位姿的独立参数, 后者为确定所有构件相对位姿的独立参

数. 一个机构中的不同构件可以有不同的连接度. 活动度是确定连杆机构所有构件间相互关系的独立参数的数目, 即实现机构中所有构件处于确定位姿时的控制参数. 活动度是机构中最大的连接度.

注释 9.8 自由度表征机器人操作端的输出参数. 在某些教材中, 机构的活动度也称自由度, 但表示的是机构本身的输入参数.

目前公认, Grübler (1917) 和 Kutzbach (1929) 较早地对机构活动度进行了分析研究. 广义的 Grübler-Kutzbach 活动度准则 (Kutzbach, 1929; Hunt, 1959, 1978; Suh 和 Radcliffe, 1978) 可以计算出含有 n 个刚体构件由 g 个运动副连接, 其中每个运动副有 f_i 个自由度的机构的活动度数 m . 该活动度准则将所有活动构件的自由度数相加, 再减去所有运动副约束掉的自由度数, 即

$$\begin{aligned} m &= b(n-1) - \sum_{i=1}^g (b - f_i) \\ &= b(n-g-1) + \sum_{i=1}^g f_i \end{aligned} \quad (9.41)$$

式中, n 为构件个数; g 为运动副数目; f_i 为第 i 个运动副的自由度数; b 为活动度系数, 一般情况下, 平面机构和空间机构的活动度系数 b 分别取值 3 和 6.

机构的复杂性使得机构活动度分析变得困难. 为此, Shoham 和 Roth (1997) 将机构分解为一个单一的简单闭环和一组并行的串联支链. 基于环路分析, 活动度准则可表示为

$$m = \sum_{i=1}^g f_i - bl \quad (9.42)$$

式中, l 指的是独立环个数, 并有下列恒等式

$$l = g - n + 1 \quad (9.43)$$

也可以表示为支链数 k 减 1, 即

$$l = k - 1$$

上述活动度准则没有考虑机构中运动副的特殊几何配置对机构实际活动度的影响. 通常情况下, 计算平面机构和空间机构的活动度系数分别为 3

和 6, 但是, Waldron (1966) 和 Hunt (1967) 指出活动度系数可以取小于 6 的正整数, 这里系数 b 指的是式 (9.14) 中的 $\dim S_m$, 也即本章内容中的机构运动旋量系的阶数. 由此可以引入一个重要概念——公共约束, 公共约束由定义 9.14 引入. 由此活动度系数 b 值可以表示为

$$b = 6 - \lambda \quad (9.44)$$

式中, λ 如式 (9.15) 表示公共约束的阶数. 由于式 (9.17) 表示的平衡方程中机构运动旋量系和公共约束旋量系互易, 因此式 (9.14) 中机构运动旋量系的阶数为总数 6 减去公共约束的阶数 (Hunt, 1978).

9.9.2 基于公共约束与冗余约束的活动度扩展准则

以上关于约束旋量系及其分解的阐述可以用来修正活动度准则, 其关键是运动副间几何配置造成的影响活动度的公共约束与冗余约束. 典型的例子可见 Hunt(1967) 使用线性线丛确认空间机构的瞬时旋量轴线并由此解释了许多过约束连杆机构的存在原理.

本章将公共约束外的约束力旋量构造为互补约束旋量系以及冗余约束旋量多重集. 任何一个与互补约束旋量系相关的约束旋量均为冗余约束 (张启先, 1984). 它的消除不影响机构的运动. 约束旋量系的分解可见 9.6 节的阐述.

由此, 活动度准则式 (9.41) 和式 (9.42) 受两部分影响. 首先, 由引理 9.4 以及定义 9.17, 该准则于无意间重复计入了 $k-1$ 次公共约束. 以至于少计算了应有的活动度. 其次, 由引理 9.5 与推论 9.1 可知, 受式 (9.30) 所示的含互补约束旋量系 S_c^r 与冗余约束旋量多重集 $\langle S_c^r \rangle$ 的互补约束旋量多重集 $\langle S_c^r \rangle$ 的影响, 该准则又无意间将这些冗余约束作为有效约束而导致再次少算了活动度. 对这些影响, 前者可以通过引入活动度影响系数以考虑公共约束的影响. 后者可以通过增加 ν 个冗余约束旋量来补偿. 这两部分的补偿引出下列定理.

定理 9.6 基于公共约束与冗余约束的活动度扩展准则为

$$m = b(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i + \nu - m_l \quad (9.45)$$

根据式 (9.37), 该活动度准则的基数与阶数表示形式为

$$m = b(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i + \text{card} \langle \mathbb{S}_c^r \rangle - \dim \mathbb{S}_c^r - m_l \quad (9.46)$$

式中, 活动度系数 $b = 6 - \lambda$, 如式 (9.44); 公共约束因子 λ 和虚约束冗余因子 ν 分别为公共约束旋量系的阶数和冗余约束旋量多重集的基数, 如式 (9.37); m_l 为局部活动度. 如果公共约束旋量系与互补约束旋量系相关, 冗余约束旋量多重集基数则增加这一相关数, 如 9.8 节. 此时式中虚约束冗余因子 ν 为含公共约束旋量系与互补约束旋量系相关的维数的新的冗余约束旋量多重集的基数.

注释 9.9 定理 9.6 给出的活动度扩展准则的关键点是引入了式 (9.37) 中的因子 λ 与 ν . 根据该准则, 一个由 g 个自由度分别为 f_i 的运动副组成的 n 刚体机构的活动度 m 的计算需要考虑机构公共约束旋量系的阶数 λ 、冗余约束旋量多重集的基数 $\nu = \text{card} \langle \mathbb{S}_v^r \rangle$ 以及机构中不常出现的局部活动度 m_l .

9.9.3 基于机构环路的活动度扩展准则

为了计算出基于环路的机构活动度, 考虑如式 (9.36) 的综合冗余因子 c , 可以得出如下推论.

推论 9.4 基于机构环路的活动度扩展准则可以写为

$$m = \sum_{i=1}^g f_i - 6l + c - m_l \quad (9.47)$$

根据式 (9.38), 该活动度准则的基数与阶数表示形式为

$$m = \sum_{i=1}^g f_i - 6l + \text{card} \langle \mathbb{S}^r \rangle - \dim \mathbb{S}^r - m_l \quad (9.48)$$

改进的基于环路的活动度扩展准则使用了约束旋量多重集 $\langle \mathbb{S}^r \rangle$ 加上冗余公共约束的综合冗余因子 c , 如式 (9.36), 包含如定义 9.17 的冗余公共约束旋量多重集 $\langle \mathbb{S}_c^r \rangle$.

同 9.8.2 节, 如果公共约束旋量系与互补约束旋量系相关, 冗余约束旋量多重集基数则增加这一相关数. 由此 ν 为含公共约束旋量系与互补约束旋量系相关的维数的新的冗余约束旋量多重集的基数, 式 (9.36) 中的 c 则增加.

在基于集合论的旋量系分析中,通过引入旋量系对偶定理 9.1 至定理 9.4,可以产生多种不同形式但等价于式 (9.45) 和式 (9.47) 的活动度修订公式. 这些公式其实是在 Grübler-Kutzbach 准则的基础上考虑了影响活动度计算的公共约束的旋量系阶数以及冗余约束的数目. 因此,通过引入冗余公共约束以及互补约束旋量多重集 $\langle S_c^r \rangle$ 中的非独立约束旋量数即虚约束冗余因子 ν , 所有的冗余约束都已被考虑进来. 从计算的角度来说,冗余约束旋量数 ν 可以很容易地由式 (9.37) 得出,一个等价于式 (9.47) 的活动度公式可参见 (Davies, 1983).

1971 年, Davies 和 Primose 将电路中关于电流和电压的 Kirchhoff 电路定律运用到运动旋量子空间的交和并运算,以计算机构活动度,但没有采用互易约束旋量子空间. Davies (1981, 1983) 将机械体等效于电路,从而将机构作为电路网络,提出了类比 Kirchhoff 定律来分析该网络的方法. 在这种类比中,活动度和约束冗余度采用运动旋量或约束旋量的旋量矩阵的行阶梯形递减变换来确定.

以集合论与旋量理论为基础,以约束旋量系分解定理为核心的旋量系分析理论有效地解决了过约束机构的活动度计算问题. 该理论自完整创立以来 (Dai 与 Rees Jones, 2000, 2001, 2002, 2003; Dai、Huang 与 Lipkin, 2004, 2006), 被国内外学者广泛引用,在机构活动度计算以及机构综合领域至今已有许多成功应用的案例.

9.9.4 活动度扩展准则与旋量系阶数及旋量多重集基数的关联关系

以上两小节分别给出了一般形式的活动度扩展准则和基于环路的活动度扩展准则. 这两个活动度扩展准则通过旋量系理论以及约束旋量系分解定理充分考虑了公共约束与虚约束的几何含义与物理含义以及它们对机构活动度造成的影响. 此外,上述活动度扩展准则也同时考虑了特殊几何条件下公共约束旋量系与互补约束旋量系线性相关从而产生交叉冗余的情况. 由此,旋量系阶数与旋量多重集基数的关联关系揭示了机构出现约束冗余情况的本质和内涵.

从 9.9.2 节可以清楚地看出,一般形式的活动度扩展准则采用互补约束旋量多重集基数与互补约束旋量系阶数之差计算虚约束冗余因子,同时采用活动度系数 b 修正冗余公共约束对活动度的影响. 而从 9.9.3 节可以看出,

基于环路的活动度扩展准则通过输出杆件约束旋量多重集基数与输出杆件约束旋量系阶数之差计算出综合冗余因子, 进而补偿冗余公共约束与虚约束对活动度造成的影响. 见引理 9.4 和定理 9.5.

9.10 Sarrus 连杆机构中机构运动与平台约束的对偶特性

本章讲述的对偶性可以通过经典的 Sarrus 连杆机构 (Sarrus, 1853) 进行解释. Sarrus 连杆机构是 1853 年由法国数学家 Pierre Frédéric Sarrus 发明的. 该机构由两组相互平行的转动副构成的相互垂直的子运动链连接方形板块组成 (见图 9.10a), 可以将有限的旋转运动转化成精确的直线运动. 在机构学的发展历史上, Sarrus 连杆机构不仅是第一个空间过约束机构, 而且是第一个可以将旋转运动转化成精确直线运动的机构. 它的出现早于 1864 年由法国工程师 Charles-Nicolas Peaucellier 和立陶宛工程师 Lipman Lipkin 发现且以他们名字命名的 Peaucellier-Lipkin 连杆机构 (Ogilvy, 1990), 并由剑桥大学数学讲师、英国皇家科学院院士 Geoffrey Bennett 构建并演示 (Bennett, 1905).

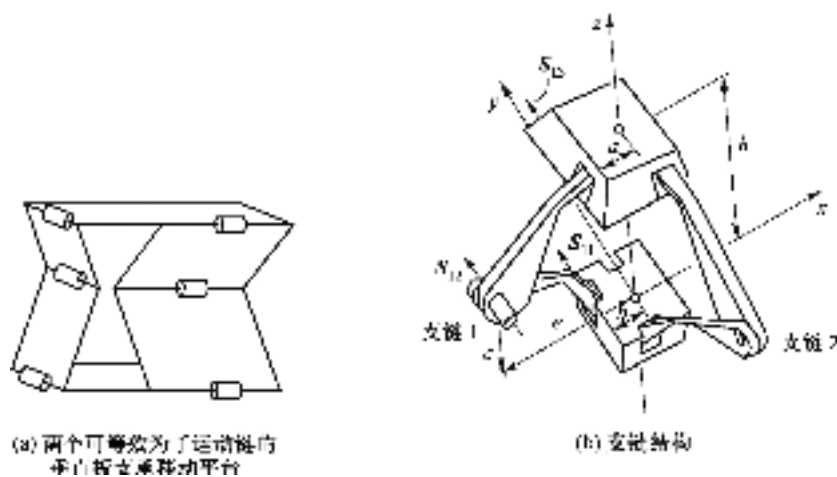


图 9.10 Sarrus 连杆机构

9.10.1 支链运动旋量系与机构运动旋量系

如图 9.10a, 在 Sarrus 连杆机构中, 上、下两平台由两条支链即子运动链连接, 每条支链由三个相互平行的转动副组成, 两条支链的转动副相互垂直.

图 9.10b 所示旋量表示转动副轴线. 每个支链包含相互平行、串接而成的三个转动副, 转动副轴线与机构机座平行. 机座位于 $x-y$ 平面内, 支链 1 的三个旋量与 y 轴平行, 支链 2 的三个旋量与 x 轴平行.

支链 1 的运动旋量系可以表示为

$$\mathbb{S}_{l1} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_{11} = (0, 1, 0, 0, 0, -b)^T \\ \mathbf{S}_{12} = (0, 1, 0, -c, 0, -e)^T \\ \mathbf{S}_{13} = (0, 1, 0, -h, 0, -a)^T \end{array} \right\} \quad (9.49)$$

式中, a 和 b 分别为运动平台和机座的内切圆半径; h 为运动平台的高度; c 为旋量 \mathbf{S}_{12} 与 x 轴之间的距离; e 为旋量 \mathbf{S}_{12} 与 z 轴之间的距离. 旋量符号 \mathbf{S}_{ij} 的第一个下标 i 表示支链编号, 第二个下标表示支链中的运动副轴线编号. 同理, 支链 2 的运动旋量系可以表示为

$$\mathbb{S}_{l2} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_{21} = (1, 0, 0, 0, 0, b)^T \\ \mathbf{S}_{22} = (1, 0, 0, 0, c, e)^T \\ \mathbf{S}_{23} = (1, 0, 0, 0, h, a)^T \end{array} \right\} \quad (9.50)$$

合并式 (9.49) 和式 (9.50) 的两支链运动旋量系的基可构造机构运动旋量多重集. 如 6.3.5 节所述, 多重集可包含重复元素. 由此, 机构运动旋量多重集表示为

$$\langle \mathbb{S}_m \rangle = \mathbb{S}_{l1} \cup \mathbb{S}_{l2}$$

如定义 6.12, $\text{card} \langle \mathbb{S}_m \rangle = 6$ 是多重集的基数. 与一般集合基数不同, 多重集的基数计入重复元素. 由于 $\langle \mathbb{S}_m \rangle$ 只包含五个线性无关的旋量, \mathbb{S}_m 的非唯一基可以选择为

$$\mathbb{S}_m = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_{11} = (0, 1, 0, 0, 0, -b)^T \\ \mathbf{S}_{12} = (0, 1, 0, -c, 0, -e)^T \\ \mathbf{S}_{21} = (1, 0, 0, 0, 0, b)^T \\ \mathbf{S}_{22} = (1, 0, 0, 0, c, e)^T \\ \mathbf{S}_{23} = (1, 0, 0, 0, h, a)^T \end{array} \right\} \quad (9.51)$$

上式表明, 该机构中各连杆间的相对运动最多有五个自由度, 且该机构的运动旋量系阶数 (Waldron, 1967) 为 5.

9.10.2 支链约束旋量系与运动平台约束旋量系

由式 (9.49) 与式 (9.50), 支链 1 与支链 2 的支链约束旋量系可以表示为

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{S}_{i1}^r = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_{11}^r = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T \\ \mathbf{S}_{12}^r = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T \\ \mathbf{S}_{13}^r = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T \end{array} \right\} \\ \mathbb{S}_{i2}^r = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_{21}^r = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T \\ \mathbf{S}_{22}^r = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T \\ \mathbf{S}_{23}^r = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (9.52)$$

应该注意的是, 式 (9.49) 和式 (9.50) 所得的各支链运动旋量系是协互易旋量系. 根据 7.3.4 节所述的协互易旋量系关联关系推论, 支链的约束旋量系与支链的运动旋量系完全相交. 这可以由式 (9.52) 验证, 各支链的约束旋量系与其对应的运动旋量系完全相交. 因此, 这里给出了一种计算互易旋量系的方法.

由此, 机构平台约束旋量多重集包含两个支链约束旋量系的基的集合, 可表示为

$$\langle \mathbb{S}^r \rangle = \mathbb{S}_{i1}^r \uplus \mathbb{S}_{i2}^r \quad (9.53)$$

其中 $\text{card} \langle \mathbb{S}^r \rangle = 6$. 由于 $\langle \mathbb{S}^r \rangle$ 只包含五个线性无关的旋量, 因此平台约束旋量系 \mathbb{S}^r 的非唯一基可选择为

$$\mathbb{S}^r = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_{11}^r = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T \\ \mathbf{S}_{12}^r = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T \\ \mathbf{S}_{13}^r = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T \\ \mathbf{S}_{22}^r = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T \\ \mathbf{S}_{23}^r = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T \end{array} \right\} \quad (9.54)$$

上式表明, 该机构平台的运动受到了五个相互独立的旋量的约束.

9.10.3 运动平台旋量系与机构旋量系的交集

1. 运动平台约束旋量系与机构运动旋量系的交集

如式 (9.49)、式 (9.50) 和式 (9.52) 所示, 各支链的运动旋量系与其互易旋量系完全相交. 因此, 由各支链运动旋量系的并集构成的机构运动旋量系与由各支链约束旋量系的并集构成的运动平台约束旋量系完全相交, 呈现对偶性. 这种平台约束与机构运动间的对偶性仅出现在机构的各支链的旋量系与其对应的互易旋量系完全相交时. 因此, 给出了下面的推论.

推论 9.5 运动平台约束旋量系与机构运动旋量系具有对偶性的充分必要条件是机构各支链的运动旋量系与其对应的互易旋量系分别完全相交.

2. 运动平台运动旋量系与机构约束旋量系的交集

求平台约束旋量系 S^r 的互易旋量, 可得运动平台的运动旋量系 S_f , 为

$$S_f = \{S_f = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T\} \quad (9.55)$$

同定义 9.10, 该旋量系是各支链运动旋量系 S_{i_i} 的公共运动旋量的集合, 即为所有支链运动旋量系的交集. 由式 (9.18) 可知, 式 (9.55) 平台运动旋量系 S_f 是式 (9.51) 中机构运动旋量系 S_m 的子集. 因此, 式 (9.55) 表明运动平台具有一个沿 z 轴方向平移的活动度.

由对偶性质, 求机构运动旋量系 S_m 的互易旋量系, 可得该机构的约束旋量系 S^c , 表示为

$$S^c = \{S^c = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T\} \quad (9.56)$$

该旋量是由各支链约束旋量系生成, 且为所有支链约束旋量系的交集. 该旋量系表示机构中的每个杆件都受公共约束的限制. 这一公共约束限制了机构绕 z 轴的转动. 由于平台约束旋量系与机构运动旋量系完全相交, 因此它们所对应的互易旋量系, 即 S_f 和 S^c 也完全相交.

结合式 (9.18) 与图 9.3, 并由上述分析过程可清楚地看出, 平台运动旋量系 S_f 是机构运动旋量系 S_m 的子集. 因此, 机构运动旋量系 S_m 及其约束旋量系 S^c 间的内在关联关系可以根据定理 7.2 表示为

$$S^c \cap S_m = S^c \quad (9.57)$$

进一步分析, 由式 (9.19) 与图 9.3 可知, 机构约束旋量系 S^c 是运动平台约束旋量系 S^r 的子集, 机构约束旋量系 S^c 与其运动旋量系 S_m 的并集可表示为

$$S^c \cup S_m = \mathbb{R}^5 \quad (9.58)$$

上述各旋量系间的对偶性关系可由图 9.11 所示的维恩图表示.



图 9.11 Sarrus 机构相关旋量系关联关系的维恩图

9.11 可展球体机构的对偶特性

本章所述的对偶性可用一可展球体机构为示例作进一步阐述. 本节给出的可展球体机构由分布在球面黎曼圆周上的可展运动环链作为大圆环链连接而成, 具有对称性. 这些大圆环链包含两支链、三支链和四支链单元. 其中四支链单元是外加两支链的扩展 Sarrus 机构, 用来连接两个正交大圆环链.

9.11.1 扩展 Sarrus 机构

在 Sarrus 连杆机构上对称地添加两个支链, 可得到如图 9.12 所示的扩展 Sarrus 机构.

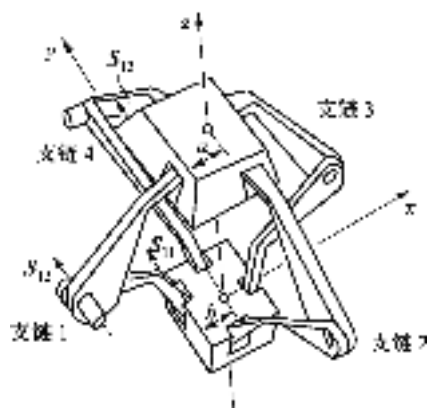


图 9.12 扩展 Sarrus 机构

对于该扩展 Sarrus 机构, 除式 (9.49) 与式 (9.50) 给出的支链 1 与支链 2 的旋量系外, 支链 3 与支链 4 的旋量系可表示为

$$\mathbb{S}_{l3} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_{31} = (0, 1, 0, 0, 0, b)^T \\ \mathbf{S}_{32} = (0, 1, 0, -c, 0, e)^T \\ \mathbf{S}_{33} = (0, 1, 0, -h, 0, a)^T \end{array} \right\} \quad (9.59)$$

$$\mathbb{S}_{l4} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_{41} = (1, 0, 0, 0, 0, -b)^T \\ \mathbf{S}_{42} = (1, 0, 0, 0, c, -e)^T \\ \mathbf{S}_{43} = (1, 0, 0, 0, h, -a)^T \end{array} \right\} \quad (9.60)$$

因此, 机构的运动旋量多重集是包括支链 1 和支链 2 集合在内的四条支链旋量系的集合, 表示为

$$\langle \mathbb{S}_m \rangle = \mathbb{S}_{l1} \uplus \mathbb{S}_{l2} \uplus \mathbb{S}_{l3} \uplus \mathbb{S}_{l4} \quad (9.61)$$

其中多重集基数为 $\text{card} \langle \mathbb{S}_m \rangle = 12$. 由于 $\langle \mathbb{S}_m \rangle$ 只包含五个线性无关的旋量, 因此, 此子空间 \mathbb{S}_m 的非唯一基可选式 (9.51) 给出的 \mathbb{S}_m . 该基表明机构中各杆件间的相对运动最多有五个活动度.

支链约束旋量系的基包含式 (9.52) 的支链 1 和支链 2 约束旋量系以及如下支链 3 和支链 4 约束旋量系

$$\mathbb{S}_{l3}^r = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_{31}^r = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T \\ \mathbf{S}_{32}^r = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T \\ \mathbf{S}_{33}^r = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T \end{array} \right\} \quad (9.62)$$

$$\mathbb{S}_{l4}^r = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_{41}^r = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T \\ \mathbf{S}_{42}^r = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T \\ \mathbf{S}_{43}^r = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T \end{array} \right\} \quad (9.63)$$

比较式 (9.52)、式 (9.62) 和式 (9.63), 可以发现该机构的约束子空间具有 $\mathbb{S}_{l1}^r = \mathbb{S}_{l3}^r$ 和 $\mathbb{S}_{l2}^r = \mathbb{S}_{l4}^r$ 的特征. 根据约束旋量系与运动旋量系之间的对偶关系, 即使它们对应的基不同, 该机构的运动子空间必满足 $\mathbb{S}_{l1} = \mathbb{S}_{l3}$ 和 $\mathbb{S}_{l2} = \mathbb{S}_{l4}$ 的特征.

合并四条支链约束旋量系的基, 运动平台的约束旋量多重集可以表示为

$$\langle \mathbb{S}^r \rangle = \mathbb{S}_{l1}^r \uplus \mathbb{S}_{l2}^r \uplus \mathbb{S}_{l3}^r \uplus \mathbb{S}_{l4}^r \quad (9.64)$$

其中 $\text{card} \langle S^r \rangle = 12$. 同样, $\langle S^r \rangle$ 只包含五个线性无关的旋量, 因此子空间 S^r 的非唯一基可由式 (9.54) 选定. 这表明该机构平台运动受到五个线性无关的旋量的约束. 同式 (9.16), 平台约束旋量系 S^r 的互易旋量给出了平台运动旋量系 S_f . 该旋量系的基即式 (9.55), 其为如式 (9.12) 所示的所有支链运动旋量系的交集. 由式 (9.55) 可知机构的运动平台具有一个沿 z 轴的平移的自由度. 相应地, 按照对偶原理, 机构运动旋量系 S_m 的互易旋量给出了机构约束旋量系 S^c , 其基如式 (9.56) 所示, 是如式 (9.15) 所示的所有支链约束旋量系的交集. 如 9.2 节所述, 该约束旋量系作用于机构中的所有杆件, 称为公共约束.

9.11.2 n -支链平台单元

1. 四支链平台单元

上述具有四支链构型的扩展 Sarrus 机构可作为一个连接枢纽用于连接 Hoberman 可展球机构中分别处于两个相交大圆即黎曼圆上的两组运动环链, 如图 9.13 所示.

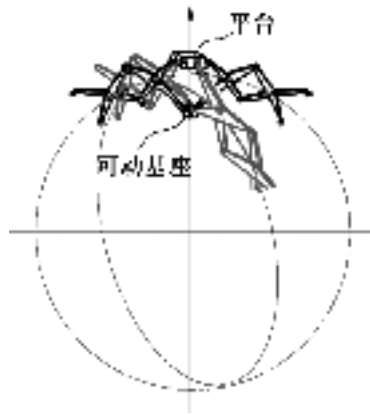


图 9.13 黎曼圆上两运动环链的四支链平台交点

通过球心, 用三个相互垂直的平面将球分成八个卦限. 如图 9.14 所示, 三个黎曼圆分别位于 $x-y$ 平面、 $x-z$ 平面和 $y-z$ 平面内. 在每个分布于黎曼圆上的运动环链中, 均有八个四支链平台单元, 其中四个用于与分布于另外两个黎曼圆上的运动环链相连接; 另外四个用于与处于卦限中心的三

支链平台单元 Y_i 相连接. 因此, 在位于三个黎曼圆的三个运动环链中共均布了 18 个四支链平台单元.

具有四支链平台单元的黎曼圆以及被其所在的三个平面分成的八个卦限如图 9.14 所示.

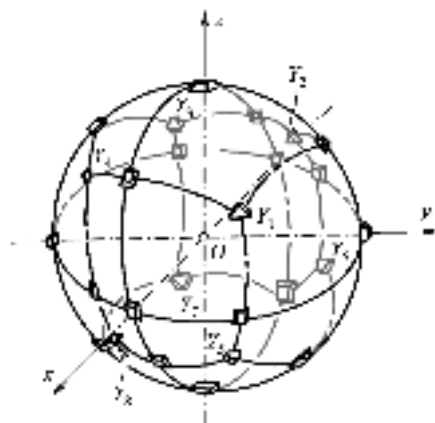


图 9.14 三个位于黎曼圆上的运动环链及三支链平台单元

2. 三支链平台单元

如图 9.15 所示, 在每个卦限中都有一个三支链平台单元用于连接分布于三个黎曼圆上的运动环链. 每个卦限中的三支链平台单元都通过一个四支链平台单元与一个运动环链相连接来强化球体, 因此, 四支链平台单元的

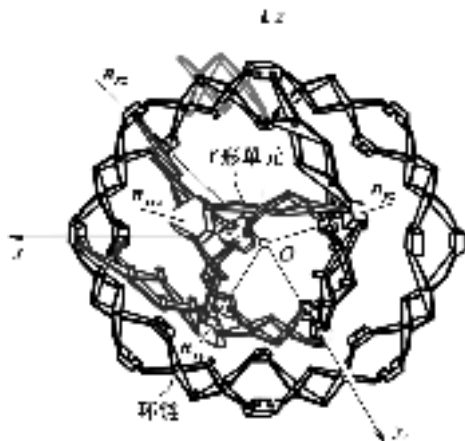


图 9.15 黎曼圆上三个运动环链与 n -支链平台单元的连接关系

另一个功能是将三支链平台单元连接到位于黎曼圆上的运动环链。

如图 9.15 所示, 位于 $x-z$ 平面的黎曼圆上的运动环链由八个四支链平台单元组成. 位于第一卦限中的三支链平台单元 n_{xyz} 分别与位于 $x-z$ 平面黎曼圆环链上的四支链平台单元 n_{xz} 、位于 $x-y$ 平面黎曼圆的第二环链上的四支链平台单元 n_{xy} 以及位于 $y-z$ 平面黎曼圆第三环链上的四支链平台单元 n_{yz} 相连接.

三支链平台单元的具体结构如图 9.16 所示.

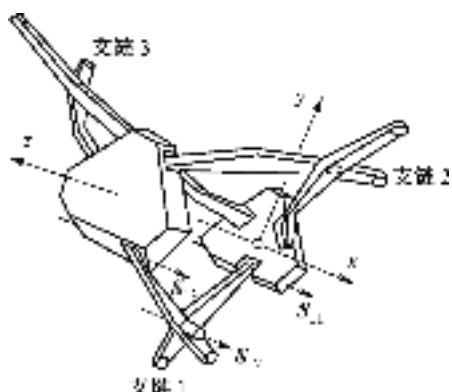


图 9.16 三支链平台单元

由图 9.16, 对于三支链平台单元, 支链 1 的运动旋量系可表示为

$$S_{l1} = \left\{ \begin{array}{l} S_{11} = (1, 0, 0, 0, 0, b_1)^T \\ S_{12} = (1, 0, 0, 0, a_2, b_2)^T \\ S_{13} = (1, 0, 0, 0, a_3, b_3)^T \end{array} \right\} \quad (9.65)$$

其互易旋量系有如下形式:

$$S_{l1}^r = \left\{ \begin{array}{l} S_{11}^r = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T \\ S_{12}^r = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T \\ S_{13}^r = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T \end{array} \right\} \quad (9.66)$$

上式的互易旋量系向支链 1 提供了两个约束力矩和一个约束力. 对所有三个支链, 存在六个约束力矩 S_{11}^r 、 S_{12}^r 、 S_{21}^r 、 S_{22}^r 、 S_{31}^r 和 S_{32}^r 以及三个约束力 S_{13}^r 、 S_{23}^r 和 S_{33}^r , 其中第一个下标表示支链编号, 第二个下标表示支链内的运动副编号. 其中, 作用于 z 轴上的三个约束力矩 S_{11}^r 、 S_{21}^r 和 S_{31}^r 相同, 形成了机构运动平台的一个公共约束力矩. 受该公共约束力矩的作用, 旋量

系降阶成为五阶系统. 同时, 三个支链的三个约束力矩 S_{12}^r 、 S_{22}^r 和 S_{32}^r 位于同一平面内, 且线性相关, 构成了一个二阶旋量系并产生冗余约束旋量多重集 S_v^r 中的一个冗余约束力矩. 同理, 剩下的三个约束力 S_{13}^r 、 S_{23}^r 和 S_{33}^r 位于同一平面, 是线性相关的, 因此产生了另外一个冗余约束力. 由此, 三支链平台单元中共存在两个冗余约束, 在计算机构活动度时应该考虑该冗余约束.

机构的活动度可以由约束分析加以阐明. 以该机构为例, 由相同约束力矩 S_{11}^r 、 S_{21}^r 和 S_{31}^r 产生的一个公共约束力矩与由线性相关的约束力矩 S_{12}^r 、 S_{22}^r 和 S_{32}^r 产生的两个线性独立的约束力矩限制了机构的三个转动. 同时由线性相关的约束力 S_{13}^r 、 S_{23}^r 和 S_{33}^r 产生的两个线性无关的约束力限制了机构沿 x 轴和 y 轴的移动. 由此, 机构的运动平台只有一个沿 z 轴移动的平移, 活动度为 1. 9.9 节已经对机构活动度问题 (Dai, Huang 和 Lipkin, 2004; 2006) 进行了详尽的阐述.

3. 两支链平台单元

四支链平台单元是由相互垂直的两个平面连杆机构组成 (Parise、Howell 和 Magleby, 2000). 去掉一个垂直平面内的两组剪式结构, 可得平面两支链平台连杆机构, 如图 9.17 所示.

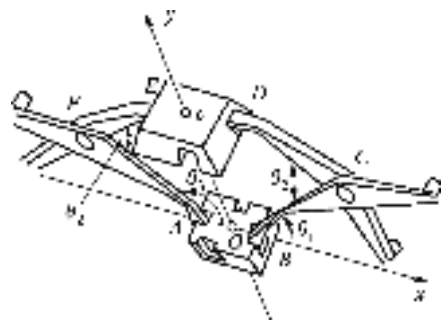


图 9.17 具有剪式结构的两支链平台单元

该两支链平台具有特殊的几何尺寸, 即 $BC = AF$, $CD = EF$, 且连接枢纽杆件 DE 和 AB 处于两个同心圆的圆弧上. 如图 9.17 所示, 该连杆机构的连接枢纽杆件位于环链上, 且具有两个相关的约束方程 $\theta_1 = \pi - \theta_3$ 和 $\theta_2 = 2\theta_1$. 在这两个约束方程的作用下, 连接枢纽杆件 DE 和 AB 沿 y 轴即经线方向作直线运动, 且始终位于两个可展的同心圆上. 这就产生了运动平面内的两个约束, 由此可得该平面机构的活动度为 1.

9.12 Schatz 连杆机构的运动与约束旋量系

约束的变化导致运动的循环. 在这种情况下, 尽管机构的活动度没有改变, 空间运动却经历了周期性的变化.

9.12.1 可逆转的立方体和 Schatz 连杆机构

Schatz 在 1929 年从柏拉图正多面体中发现可逆转的立方体时发明了 Schatz 机构. 柏拉图正多面体是规则的凸多面体, 正多面体的面由正多边形构成, 且所有的面是全等的, 所有的顶角都与同样数量的正多边形面相交. 一共有五个柏拉图正多面体, 包括四面体、六面体、八面体、十二面体与二十面体. 柏拉图正多面体的对称性与美感使其成为几何学家数千年来最喜欢的研究科目.

Schatz 的可逆转立方体具有神奇的翻转性质. 由此发明的 Schatz 机构提供了完美的离心力和向心力的动平衡. 此机构于 1971 年获得专利 (Schatz, 1975; Phillips, 1990), 命名为 **Turbula**, 是工业中唯一获得广泛应用的过约束机构, 主要用于空间搅拌机. 此机构也可以从关于平面对称八面体, 或者从如图 9.18a 所示的特殊三面 **Bricard** 连杆机构获得, 该特殊三面 Bricard 连杆机构是 Bricard 在 1927 年发现的六个可动 **6R** 过约束连杆机构之一. 作为典型的过约束机构, Schatz 机构的活动度不满足 **Grübler-Kutzbach** 活动度准则, 但满足定理 9.6 的活动度扩展准则. Schatz 机构的运动学和动力学吸引了一些学者的注意. Brát (1969) 应用矩阵方法研究了 Schatz 连杆机构的运动学, 揭示了图 9.18 中中心连杆 3-4 杆重心的运动和轨迹. Yu (1980) 研究了此机构的几何特征, Baker、Duclong 和 Khoo (1982) 对该机构进行了运动学分析, 研究了所有运动连杆的线速度和线加速度分量以及角速度和角加速度分量, 找出了机构动力学平衡中铰链运动副的关节力以及驱动力矩. Lee (1997, 2000) 采用 **Denavit-Hartenberg** 参数建立了 Schatz 连杆机构的闭式位移解, 并进行了机构综合. Lee 和 Dai (2003) 使用 8.3 节的余子式法进一步揭示了约束力矩的性质及其对机构运动的影响. Cui、Dai 和 Lee (2010) 基于微分几何学得到了以该机构中心连杆为母线的直纹面的几何特征及代数关系.

图 9.18a 所示为 Bricard 6R 连杆机构在起始点的位姿, 其六个轴坐落在

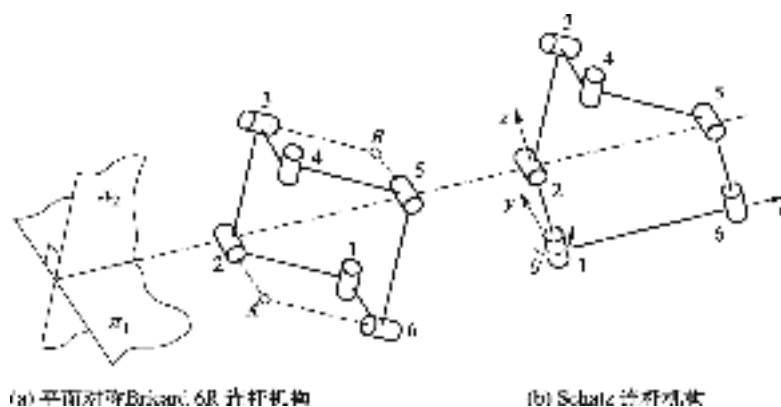


图 9.18 从平面对称 Bricard 6R 连杆机构中获得的 Schatz 连杆机构

立方体的六个顶点. 其中轴 1、2 与 6 构成立方体的一个底面, 轴 3、4 与 5 构成立方体顶面. Bricard 6R 连杆机构的起始位姿存在对称平面 π_1 , 该平面通过轴线 2 和 5 切割由该六个顶点形成的立方体于对角线上. 调整铰链运动副轴 1 和 6 的位姿如图 9.18b 所示, 使它们位于与平面 π_1 垂直的平面 π_2 上, 可得 Schatz 机构. 由此可以建立 Bricard 6R 连杆机构和 Schatz 连杆机构之间的关联关系. 遵循 Bricard 条件, 即所有相邻轴线之间的夹角是 $\pi/2$, 但如图 9.18b 所示, 将轴 1 和 6 之间的角度变为 0° , 可获得下列条件:

$$\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{34} = \alpha_{45} = \alpha_{56} = \pi/2 \text{ 和 } \alpha_{61} = 0 \quad (9.67)$$

为获得 Schatz 连杆机构, 除上述条件, 还需要满足轴线条件与连杆长度条件. 轴线条件是关于相邻轴线的公垂线偏移量. 因轴 5 与 6 公垂线为 0, 且轴 6 与 1 公垂线偏移量为 $-R$; 又轴 2 与 1 公垂线偏移量为 0, 且轴 1 与 6 公垂线偏移量为 R , 由此下式成立. 除此之外, 其余所有相邻轴线的公垂线偏移量为 0. 由此

$$R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 0 \text{ 和 } R_1 = -R_6 = R \quad (9.68)$$

因为原始的 Bricard 6R 连杆机构的所有连杆长度都是 a , 所以由其派生的 Schatz 连杆机构在 Bricard 6R 连杆机构的保留部分也具有相同的连杆长度, 即

$$a_{23} = a_{34} = a_{45} = a \quad (9.69)$$

在由 Bricard 6R 连杆机构起始位姿构成的立方体中, 所有边长都是 a , 这样立方体底面左后方顶点 2 和立方体顶面右前方顶点 5 之间的对角线的长度是 $\sqrt{3}a$, 由此与对角线平行且有相同长度的新连杆 16 的长度为

$$a_{61} = \sqrt{3}a \quad (9.70)$$

显然, 连杆长度 a_{12} 和 a_{56} 为 0, 如下式:

$$a_{12} = a_{56} = 0 \quad (9.71)$$

以上五式给出了 Schatz 机构的几何参数条件.

9.12.2 运动旋量系与约束旋量系

如图 9.19 所示, 将全局坐标系建立在轴 1 上, 以连杆 16 所在的直线作为 x 轴, 连杆 12 作为 z 轴. 令输入角 θ 为轴 2 相对于 x 轴的转动角度, 轴 2 与 y 轴重合时为机构的初始位姿. 此时, 轴 5 平行于轴 2, 输入角 θ 为 0. 由此坐标可得六个轴线的旋量 (Lee 和 Dai, 2003), 表示为

$$\mathbb{S}_m = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T \\ \mathbf{S}_2 = (s\theta, -c\theta, 0, R\kappa\theta, R\kappa s\theta, 0)^T \\ \mathbf{S}_3 = \left(\frac{1}{2}\kappa c\theta, \frac{1}{2}\kappa s\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}c\theta, -\frac{1}{2}R\kappa s\theta - as\theta, \frac{1}{2}R\kappa c\theta - ac\theta, 0 \right)^T \\ \mathbf{S}_4 = \left(\frac{2}{\kappa^2}s\theta, \frac{1}{\kappa^2}c\theta, -\frac{\sqrt{3}}{\kappa}s\theta, -\frac{1}{\kappa^2}R\kappa c\theta - \frac{1}{\kappa}ac\theta, \frac{2}{\kappa^2}R\kappa s\theta - \frac{1}{\kappa}as\theta, -\frac{\sqrt{3}}{\kappa^2}ac\theta \right)^T \\ \mathbf{S}_5 = \left(\frac{1}{\kappa}c\theta, -\frac{2}{\kappa}s\theta, 0, \frac{2}{\kappa}R\kappa s\theta, \frac{1}{\kappa}R\kappa c\theta, \frac{2\sqrt{3}}{\kappa}as\theta \right)^T \\ \mathbf{S}_6 = (0, 0, 1, 0, -\sqrt{3}a, 0)^T \end{array} \right\} \quad (9.72)$$

式中, $k = \sqrt{(3s^2\theta + 1)}$.

上述六旋量形成了一个五阶旋量系, 为机构运动旋量系 \mathbb{S}_m . 从几何特征容易看出任意五个旋量都是线性无关的. 为了简化运算, 选择 \mathbf{S}_1 、 \mathbf{S}_2 、 \mathbf{S}_3 、 \mathbf{S}_5 和 \mathbf{S}_6 作为五个独立的旋量.

由 9.3 节, 互易旋量 \mathbf{S}^r 可从式 (9.72) 获得, 为

$$\mathbb{S}^c = \left\{ \mathbf{S}^r = \left(1, 0, \frac{3s^2\theta - 1}{\sqrt{3}\kappa}, \frac{2as\theta c\theta}{\kappa}, R + \frac{2as^2\theta}{\kappa}, 0 \right)^T \right\} \quad (9.73)$$

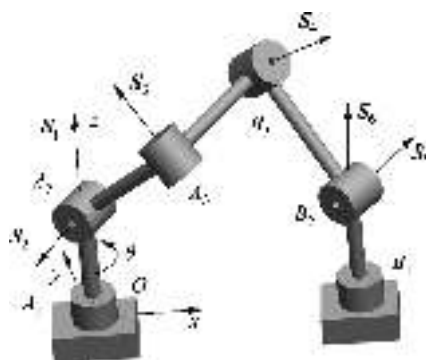


图 9.19 Schatz 机构的全局坐标系

上式给出了机构约束旋量系 S^c , 其旋距为

$$h = \frac{6aks\theta c\theta}{9s^4\theta - 6s^2\theta + 3\kappa^2 + 1} \quad (9.74)$$

当 θ 等于 $0, \pi/2, \pi, 3/2\pi$ 时, 零旋距旋量 S^r 可表示为

$$S^r = \left(1, 0, \frac{-1}{\sqrt{3}}, 0, R, 0\right)^T \quad (9.75)$$

取中心连杆为输出构件, 图 9.19 所示的 Schatz 机构可视为由子运动链 $A_1A_2A_3$ 和子运动链 $B_1B_2B_3$ 通过中心连杆连接而成的并联机构.

由此, 子运动链 1 由运动旋量轴线 S_1, S_2 和 S_3 构成, 其中旋量 S_1 和 S_2, S_1 和 S_3 分别相交. 如将旋量 S_2 沿旋量 S_1 的轴线方向平行移动到 S_1 和 S_3 轴线的交点处, 则产生新的旋量 $S'_2 = \lambda S_2$. 由此, 旋量 S_1, S'_2 和 S_3 形成子运动链旋量系 S_{c1} 的一个协互易基, S_{c1} 与由旋量 S_1, S_2 和 S_3 形成的旋量系相同. 根据推论 7.2, 它们的互易旋量系 S_{c1}^r 与该旋量系完全相交, 两个旋量系是线性相关的. 由此, 两个旋量系的并集形成一个三阶旋量系.

同理, 旋量 S_4, S_5 和 S_6 形成一个子运动链旋量系 S_{c2} , 它与子运动链约束旋量系完全相交.

9.12.3 中心连杆的运动循环

如上所述, 此机构可以认为是由中心连杆 A_3B_3 连接两个用于支撑的子运动链 $A_1A_2A_3$ 和 $B_1B_2B_3$ 构成. 子运动链 $A_1A_2A_3$ 的末端点 A_3 在一个球面上运动, 球心是 A_2 . 同理, 子运动链 $B_1B_2B_3$ 的末端点 B_3 在第二个球面上运动, 球心是 B_2 . 末端点 A_3 的轨迹是球面上的一个轮廓圆, B_3 的轨迹是另一个球面上的一个轮廓圆, 如图 9.20 所示. 中心连杆 A_3B_3 在两个球面上的两个圆环之间运动, 而中心连杆 A_3B_3 的长度是给予这两圆的一个明显的几何约束.

因此, 中心连杆的运动特征由子运动链 1 和 2 的球面运动特征决定. 当输入角 θ 在 0 到 2π 之间变化时, 式 (9.73) 中的约束旋量系 S^r 经历了两个循环, 在 0 与 π 间完成第一循环, 在 π 和 2π 之间重复这一循环. 所以中心连杆经历了如图 9.20 所示的两个轮廓圆的变化. 如果将中心连杆看作为一条直线, 两个循环段与如图 9.21 所示的直纹面完全相同.

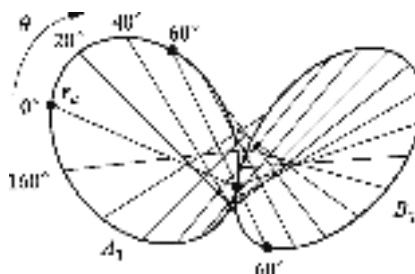
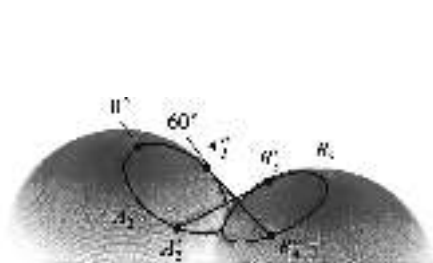


图 9.20 连接球面上两个轮廓圆的中心连杆 图 9.21 中心连杆的运动直纹面

基线 r_a 作为由点 A_3 追踪的直纹面的准线, 为图 9.21 所示的一闭式曲线, 表示为

$$r_a = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} a \sin^2 \theta \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} a \sin \theta \cos \theta \\ \frac{a}{2} \sqrt{4 - 3 \cos^2 \theta} + d \end{pmatrix} \quad (9.76)$$

在该直纹面上, 沿中心连杆的线段 A_3B_3 为直纹面的母线. 当输入角 θ 为 0 时, A_3 位于图 9.21 中左边的 0 位置.

当输入角 θ 从 0 变化到 π 时, 形成了此闭式曲线. 左边轮廓圆曲线上的点与右边轮廓圆的一点由中心连杆长度形成关联. 当输入角 θ 经历从 0 到 π 变化时, 曲线达到全周. 此时, 连杆两端点 A_3 和 B_3 完成了一个运动循环. 直纹面母线 e_1 作为输入角 θ 的函数以及作为沿连杆 A_3B_3 的单位向量表示为

$$e_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1 + 3 \sin^4 \theta}{4 - 3 \cos^2 \theta} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \sin \theta \frac{3 + 3 \sin^2 \theta}{4 - 3 \cos^2 \theta} \\ \frac{1 - 3 \sin^2 \theta}{2\sqrt{4 - 3 \cos^2 \theta}} \end{pmatrix} \quad (9.77)$$

沿连杆 A_3B_3 的直纹面母线 e_1 可扫出一个直纹面, 则直纹面的参数方程可定义为

$$S(\theta, t) = r_a(\theta) + te_1(\theta) \quad (9.78)$$

由此, 当输入角由 0 到 2π 变化时, 直纹面母线 e_1 可追踪到如图 9.21 所示的运动直纹面.

如果将中心连杆看作一个刚体, 并且将一个空间坐标系加在上面, 那么当中心连杆作滚动运动时, 两个循环的相位是不同的, 见图 9.22.



(a) 当 θ 在 0 位置时的中心连杆位置



(b) 当 θ 在 π 位置时的中心连杆位置

图 9.22 Schatz 连杆机构的循环运动

当输入角 θ 到达 π 时, 沿连杆 A_3B_3 的直纹面母线 e_1 返回到它的起始的位置和姿态. 这就完成了第一个运动循环阶段. 此阶段从图 9.22a 所示的输入角 θ 为 0 时开始, 到图 9.22b 所示的输入角为 π 时结束. 此时, 局部坐标

系的坐标轴 z_c 指向下方. 第二个运动循环开始于图 9.22b 所示的输入角为 π 时, 到图 9.22a 所示的输入角为 2π 时结束, 运动循环返回到初始位置. 此时, 固接于连杆的局部坐标系的坐标轴 z_c 指向上方. 由此可以看出, 如不考虑坐标系并把中心连杆看成一条直线时, 两个运动循环如图 9.21 所示, 是完全相同的. 当考虑局部坐标系所指示的连杆的真实状态时, 第二个运动循环的运动正好与第一个运动循环的运动相反.

参考文献

- Baker, J.E., Duclong, T. and Khoo, P.S.H. (1982) On attempting to reduce undesirable inertial characteristics of the Schatz mechanism, *ASME J. Mech. Des.*, **104**(1): 192-205.
- Ball, R.S. (1876) *Theory of Screws: A Study in the Dynamics of a Rigid Body*, Hodges, Foster, and Co., Dublin.
- Ball, R.S. (1900) *A Treatise on the Theory of Screws*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Bennett, G.T. (1905) The parallel motion of sarrus and some allied mechanisms, *Philosophy Magazine*, **6**(9): 803-810.
- Brát, V. (1969) A six-link spatial mechanism, *J. Mechanisms*, **4**(2): 325-336.
- Chen, C. (2010) Mobility analysis of parallel manipulators and pattern of transform matrix, *ASME J. Mech. Rob.*, **2**(4): 041003.
- Chen, C. (2011) The order of local mobility of mechanisms, *Mech. Mach. Theory*, **46**(9): 1251-1264.
- Cui, L., Dai, J.S. and Lee, C.C. (2010) Motion and constraint ruled surface of the Schatz linkage, *34th ASME Mechanisms and Robotics Conference, Proceedings of the ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*, DETC2010-28883, Aug. 15-18, Montréal, Canada.
- Dai, J.S. (2014) *Screw Algebra and Kinematic Approaches for Mechanisms and Robotics*, Springer, London.
- Dai, J.S., Huang, Z. and Lipkin, H. (2004) Screw system analysis of parallel mechanisms and applications to constraint and mobility study, *Proc of the 28th Biennial Mechanisms and Robotics Conference*, Sept. 28-Oct. 2, Salt Lake City, USA.
- Dai, J.S., Huang, Z. and Lipkin, H. (2006) Mobility of overconstrained parallel mechanisms, *ASME J. Mech. Des.*, **128**(1): 220-229.
- Dai, J.S., Li, D., Zhang, Q. X. and Jin, G. G. (2004) Mobility analysis of a complex structured ball based on mechanism decomposition and equivalent screw system

- analysis, *Mech. Mach. Theory*, **39**(4): 445-458.
- Dai, J.S. and Rees Jones, J. (2000) Vectors of cofactors of a screw matrix and their relationship with reciprocal screws, *International Symposium Commemorating the Legacy, Works, and Life of Sir Robert Stawell Ball Upon the 100th Anniversary of "A Treatise on the Theory of Screws"*, July 9-11, Cambridge, UK.
- Dai, J.S. and Rees Jones, J. (2001) Interrelationship between screw systems and corresponding reciprocal systems and applications, *Mech. Mach. Theory*, **36**(5): 633-651.
- Dai, J.S. and Rees Jones, J. (2002) Kinematics and mobility analysis of carton folds in packing manipulation, *J. Mech. Eng. Sci.*, **216**(C10): 959-970.
- Dai, J.S. and Rees Jones, J. (2003) A linear algebraic procedure in obtaining reciprocal screw systems, *J. Robot. Syst.*, **20**(7): 401-412.
- Davies, T.H. (1981) Kirchhoff's circulation law applied to multi-loop kinematic chains, *Mech. Mach. Theory*, **16**(3): 171-183.
- Davies, T.H. (1983) Mechanical networks-I, II, and III, *Mech. Mach. Theory*, **18**: 95-101, 103-106, 107-112.
- Davies, T.H., and Primrose, E.J.F. (1971) An algebra for the screw systems of pairs of bodies in a kinematic chain, *Proc. of the 3rd World Congress for the Theory of Machines and Mechanisms*, September 13-20, Kupari, Yugoslavia.
- Fang, Y. and Tsai, L. W. (2002) Structure synthesis of a class of 4-DOF and 5-DOF parallel manipulators with identical limb structures, *Int. J. Robot. Res.*, **21**(9): 799-810.
- Fang, Y. and Tsai, L. W. (2004) Structure synthesis of a class of 3-DOF rotational parallel manipulators, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **20**(1): 117-121.
- Gao, F., Zhang, Y. and Li, W. (2005) Type synthesis of 3-DOF reducible translational mechanisms, *Robotica*, **23**: 239-245.
- Gao, F., Yang, J. and Ge, Q. J. (2010) Type synthesis of parallel mechanisms having the second class GF sets and two dimensional rotations, *ASME J. Mech. Rob.*, **3**(1): 011003.
- Grübler M. (1883) Allgemeine eigenschaften der zwangläufigen ebenen kinematischen ketten, Part I, *Zivilingenieur*, **29**(1): 167-200.
- Grübler, M. (1917) *Getriebelehre: Eine Theorie des Zwanglaufes und der ebenen Mechanismen*, Springer.
- Gan, D.M., Liao, Q.Z., Dai, J.S., Wei, S.M. and Qiao, S.G. (2008) Dual quaternion based inverse kinematics of the general spatial 7R mechanism, *J. Mech. Eng. Sci.*, **222**(C8): 1593-1598.
- Huang, Z. and Li, Q. C. (2003) Type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel mechanisms using constraint-synthesis method, *Int. J. Robot. Res.*, **22**(1): 59-79.
- Hunt, K.H. (1959) *Mechanisms and Motion*, The English Universities Press Ltd, London.

- Hunt, K.H. (1967) Screw axes and mobility in spatial mechanisms via the linear complex, *J. Mechanisms*, **2**(3): 307-327.
- Hunt, K.H. (1978) *Kinematic Geometry of Mechanisms*, Oxford University Press, London.
- Kutzbach, K. (1929) Mechanische leitungsverzweigung maschinenbau, *Der Betrieb*, **8**: 710-716.
- Lakshminarayana, K. (1978) Mechanics of form closure, *ASME Paper 78-DET-32*, New York.
- Lee, C.C. (1997) On the reciprocal screw axis of the Schatz sixrevolute linkage, *Proc. Seventh IFToMM International Symposium on Linkages and Computer Aided Design Methods-Theory and Practice of Mechanisms (SY ROM'97)*, Bucharest, Romania.
- Lee, C.C. (2000) Analysis and synthesis of Schatz six-revolute mechanism, *JSME Int. J.*, Ser. C, **43**(1): 80-91.
- Lee, C.C. and Dai, J.S. (2003) Configuration analysis of the Schatz linkage, *J. Mech. Eng. Sci.*, **17**(7): 779-786.
- Ogilvy, C.S. (1990) *Excursions in Geometry*, Dover Publications.
- Parise, J.J., Howell, L.L. and Magleby, S.P. (2000) Ortho-planar mechanisms, *Proc 26th Biennial Mechanisms and Robotics Conference*, Baltimore, USA.
- Phillips, J. (1990) *Freedom in Machinery, II: Screw Theory Exemplified*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Sarrus, P.T. (1853) Note sur la transformation des mouvements rectilignes alternatifs, en mouvements circulaires, et reciproquement, *Académie des Sciences*, **36**: 1036-1038.
- Schatz, P. (1975) *Rhythmusforschung and Technik*, Freies Geistesleben, Stuttgart, Germany.
- Shoham, M. and Roth, B. (1997) Connectivity in open and closed loop robotic mechanisms, *Mech. Mach. Theory*, **32**(3): 279-293.
- Suh, C.H. and Radcliffe, C.W. (1978) *Kinematics and Mechanisms Design*, John Wiley & Sons, New York.
- Waldron, K.J. (1966) The constraint analysis of mechanisms, *J. Mechanisms*, **1**(2): 101-114.
- Waldron, K.J. (1967) A family of overconstrained linkages, *J. Mechanisms*, **2**(2): 201-211.
- Wei, G., Ding, X. and Dai, J. S. (2010) Mobility and geometric analysis of the hoberman Switch-Pitch ball and its variant, *ASME J. Mech. Rob.*, **2**(3): 031010.
- Wei, G. and Dai, J.S.(2014) Origami-inspired integrated planar-spherical overconstrained mechanisms, *ASME J. Mech. Des.*, **136**(5).
- Wei, G. and Dai, J.S.(2014) A spatial eight-bar linkage and its association with the deployable platonic mechanisms, *ASME J. Mech. Rob.*, **6**(4).
- Wei, G., Ding, X. and Dai, J.S.(2011) Geometric constraint of an evolved deployable ball mechanism, *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing*,

- 5(4): 302-314.
- Wei, G., Ding, X. and Dai, J.S. (2010) Mobility and geometric analysis of the Hoberman switch-pitch ball and its variant, *ASME J. Mech. Rob.*, **2**(3): 031010.
- Wohlhart, K.(1993) Heureka octahedron and Brussels folding cube as special cases of the turing tower, *Proc. 6th IFToMM Int. Symposium on Linkages and Computer Aided Design Methods*, Bucharest, Romania, 303-311.
- Yang, T., Liu, A., Shen. H., et al. (2013) On the correctness and strictness of the position and orientation characteristic equation for topological structure design of robot mechanisms, *ASME J. Mech. Rob.*, **5**(2): 021009.
- Yang, T. and Sun, D. (2012) A general degree of freedom formula for parallel mechanisms and multiloop spatial mechanisms, *ASME J. Mech. Rob.*, **4**(1): 011001.
- Yu, H.C. (1980) Geometrical investigation of general octahedral linkages and the Turbula, *Mech. Mach. Theory*, **15**(6): 463-478.
- Yu, J., Dong, X., Pei, X. and Kong, X. (2012) Mobility and singularity analysis of a class of two degrees of freedom rotational parallel mechanisms using a visual graphic approach, *ASME J. Mech. Rob.*, **4**(4): 041006.
- Yu, J., Li, S., Su, H. and Culpepper, M. L. (2011) Screw theory based methodology for the deterministic type synthesis of flexure mechanisms, *ASME J. Mech. Rob.*, **3**(3): 031008.
- Zhang, K.and Dai,J.S.(2014) A kirigami-inspired 8R linkage and its evolved overconstrained 6R linkages with the rotational symmetry of order two, *ASME J. Mech. Rob.*, **6**(2).
- Zlatanov, D, Agrawal, S. and Gosselin, C.M.(2006), Convex cones in screw spaces, *Mech. Mach. Theory*, **40**(6): 710727.
- 白师贤 (1988) 高等机构学, 上海科技出版社, 上海.
- 戴建生 (2014) 机构学与机器人学的几何基础与旋量代数, 高等教育出版社, 北京.
- 黄真, 孔令富, 方跃法 (1997) 并联机器人机构学理论及控制, 机械工业出版社, 北京.
- 熊有伦, 尹周平, 熊蔡华 (2002) 机器人操作, 湖北科学技术出版社, 武汉.
- 张启先 (1984) 空间机构的分析与综合, 机械工业出版社, 北京.

附录

A. 反对称矩阵的交换子特性

定理 A.1 反对称矩阵的交换子存在如下式所示的性质:

$$\mathbf{V}\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{S} - (\mathbf{V}\mathbf{S})^T = [[\mathbf{v} \times \mathbf{s}] \times] \quad (\text{A1})$$

证明 给定向量 \mathbf{v} 和 \mathbf{s} , 其反对称矩阵可写为

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A2})$$

将式 (A2) 代入式 (A1), 可得

$$\begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} -v_z s_z - v_y s_y & v_y s_x & v_z s_x \\ v_x s_y & -v_z s_z - v_x s_x & v_z s_y \\ v_x s_z & v_y s_z & -v_y s_y - v_x s_x \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} -v_z s_z - v_y s_y & v_x s_y & v_x s_z \\ v_y s_x & -v_z s_z - v_x s_x & v_y s_z \\ v_z s_x & v_z s_y & -v_y s_y - v_x s_x \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & v_y s_x - v_x s_y & v_z s_x - v_x s_z \\ v_x s_y - v_y s_x & 0 & v_z s_y - v_y s_z \\ v_x s_z - v_z s_x & v_y s_z - v_z s_y & 0 \end{bmatrix} = [(\mathbf{v} \times \mathbf{s}) \times] \quad (\text{A3})
\end{aligned}$$

证毕.

B. 反对称矩阵的三重积特性

定理 A.2 反对称矩阵的三重积具有如下式所示的性质:

$$\mathbf{A}_s \mathbf{A}_s \mathbf{A}_s = -\mathbf{A}_s \quad (\text{A4})$$

证明 给定一个反对称矩阵, 即

$$\begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A5})$$

其三重积为

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_y^2 - s_z^2 & s_x s_y & s_x s_z \\ s_x s_y & -s_x^2 - s_z^2 & s_y s_z \\ s_x s_z & s_y s_z & -s_x^2 - s_y^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & (s_x^2 + s_y^2)s_z + s_z^3 & -(s_x^2 + s_z^2)s_y - s_y^3 \\ -(s_x^2 + s_y^2)s_z - s_z^3 & 0 & (s_z^2 + s_y^2)s_x + s_x^3 \\ (s_x^2 + s_z^2)s_y + s_y^3 & -(s_z^2 + s_y^2)s_x - s_x^3 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A6})
\end{aligned}$$

考虑到向量 $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)^T$ 为单位向量, 上述结果可简化为

$$\begin{bmatrix} 0 & s_z & -s_y \\ -s_z & 0 & s_x \\ s_y & -s_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A7})$$

证毕.

C. 反对称矩阵的乘积迹及其对应向量的标量积

定理 A.3 两向量的标量积与其对应的反对称矩阵乘积的迹相等, 即

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{s} = \frac{-2(v_x s_x + v_y s_y + v_z s_z)}{-2} = \frac{\text{tr}(\mathbf{V}\mathbf{S})}{-2} \quad (\text{A8})$$

证明 给定向量 \mathbf{v} 和 \mathbf{s} , 其反对称矩阵为

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A9})$$

上述反对称矩阵乘积的迹为

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{V}\mathbf{S}) &= \text{tr} \begin{bmatrix} -v_y s_y - v_z s_z & * & * \\ * & -v_x s_x - v_z s_z & * \\ * & * & -v_x s_x - v_y s_y \end{bmatrix} \\ &= -2(v_x s_x + v_y s_y + v_z s_z) = -2\mathbf{v} \cdot \mathbf{s} \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

由此, 式 (A8) 成立. 证毕.

D. 旋转轴线与正交矩阵

D1. 螺旋运动轴线的反对称矩阵与旋量矩阵

轴向平移计算公式可简化为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_s \mathbf{R} - (\mathbf{A}_s \mathbf{R})^T &= \mathbf{A}_s + \sin \theta \mathbf{A}_s \mathbf{A}_s + (1 - \cos \theta) \mathbf{A}_s \mathbf{A}_s \mathbf{A}_s \\ &\quad + \mathbf{A}_s - \sin \theta \mathbf{A}_s \mathbf{A}_s + (1 - \cos \theta) \mathbf{A}_s \mathbf{A}_s \mathbf{A}_s \\ &= 2\mathbf{A}_s - 2(1 - \cos \theta) \mathbf{A}_s = 2 \cos \theta \mathbf{A}_s \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

D2. 特征旋量与旋转矩阵

另一种方法可由轴向平移运算给出, 为

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{R} - \mathbf{R}^T)\mathbf{R} - ((\mathbf{R} - \mathbf{R}^T)\mathbf{R})^T &= \mathbf{R}^2 - \mathbf{R}^{2T} = (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T)(\mathbf{R} - \mathbf{R}^T) \\
 &= 2 \sin \theta (2\mathbf{I} + 2(1 - \cos \theta)\mathbf{A}_s \mathbf{A}_s)\mathbf{A}_s \\
 &= 4 \sin \theta \mathbf{A}_s - 4(1 - \cos \theta) \sin \theta \mathbf{A}_s \\
 &= 4 \sin \theta \cos \theta \mathbf{A}_s
 \end{aligned} \tag{A12}$$

索引

中文	英文	章节
B		
Bennett 连杆机构	Bennett linkage	1.6
Bricard 连杆机构	Bricard linkage	9.12
柏拉图正多面体, 见 “多面体”		
半角	half angle	4.5
半直积 (乘)	semi-direct product	4.3, 5.1
伴随	adjoint	
伴随表示	adjoint representation	5.1
伴随矩阵	adjoint matrix	8.3
伴随作用	adjoint action	5.1
胞体模型	Study soma	4.7
本征矩量	eigen-motor	3.3
变换矩阵	transformation matrix	5.1
变基矩阵	base-alteration matrix	5.7
标量	scalar	2.4, 4.6
标量积	scalar product	3.2
互易积	reciprocal product	2.8, 3.2
全标量积	full scalar product	3.3
旋量标量积	scalar product of screws	6.1

标准 4×4 矩阵表示	standard 4×4 matrix representation	3.9, 3.10, 5.7
标准表示	standard representation	5.1, 5.7
标准嵌入射影平面	standard embedding projective plane	2.3
表示论	representation theory	1.1
并联机构	parallel mechanism	9.1
不变量	invariant	2.8, 3.1, 5.1
相互不变量	mutual invariant	2.8
不变特性	invariant properties	2.1, 6.2, 8.0, 8.3

C

Cartan 定理	Cartan theorem	4.4
Cayley 方程	Cayley formula	4.5
Cayley-Hamilton 定理	Cayley-Hamilton's theorem	5.3
Chasles 运动	Chasles motion	1.1, 5.1, 5.2
Chasles 分解	Chasles decomposition	5.2
Chasles 平移	Chasles translation	5.2
Chasles 位移轴	Chasles displacement axis	1.0
Clifford 代数, 也称“几何代数”	Clifford algebra	4.6, 4.7
Clifford 积	Clifford product	4.7
Clifford 算子	Clifford operator	3.3
叉积	cross product	3.1, 4.4, 5.2, 6.2
差异空间	discrepancy space	4.3
超 -	hyper-	
超二次曲面	hyperquadric	2.1, 4.7
超平面	hyperplane	2.3
超复数	hypercomplex number	4.6
充分必要条件	necessary and sufficient condition	2.8
冲力旋量	impulse screw	9.1
抽象代数	abstract algebra	4.3, 5.10, 6.3, 9.8
初始位置	home position	9.12
初始位姿	home location	5.4
串联机构	serial mechanism	9.1
纯平移	pure translation	3.4
纯旋转	pure rotation	4.1

D

DeMorgan 定理	De Morgan's law	6.3
-------------	-----------------	-----

Denavit-Hartenberg 参数	Denavit-Hartenberg parameters	9.12
大圆, 见“黎曼圆”		
代数学	algebra	1.1
单位向量	unit vector	2.1
单位元	identity (element)	4.4, 5.1
单向 (边) 约束	unilateral constraint	9.1
等效平移	equivalent translation	4.7, 5.2
等效平移变换	equivalent translation transformation	5.2
递归分块	recursive partitioning	8.6
点位移	point displacement	5.1
动力学	dynamics	1.5, 9.12
独立变量	independent variable	2.1
对角线部	diagonal part	5.1
对偶部	dual part	3.1
对偶李代数	dual Lie algebra $se^*(3)$	1.1, 3.5, 5.10, 9.1
对偶数	dual number	1.3, 3.3
对偶单元	dual unit	3.3
对偶角	dual angle	1.3, 3.3, 5.10
对偶 (正交) 矩阵	dual (orthogonal) matrix	1.3, 5.1
对偶算子	dual operator	2.7, 3.2, 6.2, 7.1, 8.1, 8.4, 9.1
对偶向量	dual vector	3.3, 3.9
对偶性	duality	2.7, 2.9, 3.6, 6.3, 9.1
对偶关系	dual relationship	9.1
对偶特性	duality	9.1
对偶原理	principle of duality	9.1
多面体	polyhedron	
八面体	octahedron	9.12
柏拉图正多面体	Platonic solid	1.6, 9.12
二十面体	icosahedron	9.12
六面体	hexahedron	9.12
十二面体	dodecahedron	9.12
四面体	tetrahedron	9.12
凸多面体	convex polyhedron	9.12
多重集	multiset	6.3, 9.4
多重集基数	cardinal number of multiset	6.3, 9.7, 9.8
多重集并算子/并运算	multiset union	6.3, 9.4, 9.6

旋量系与多重集关系式	relationship between screw systems and multisets	9.7
位置向量	position vector	2.1
张成多重集	spanning multiset	6.3
E		
Erlangen 纲领	Erlangen program	1.2
Euler-Rodrigues 参数	Euler-Rodrigues parameters	1.2, 4.6
二次 (超) 曲面	quadric	
Klein 二次 (超) 曲面	Klein quadric	2.1, 3.1, 6.1
Study 超二次曲面	Study's hyperquadric	4.7
超二次曲面	hyperquadric	2.1, 4.7
七维射影空间	seven-dimensional projective space	4.7
双曲型二次曲面	hyperbolic quadric	2.1
二次关系	quadratic relationship	2.7
二次型	quadratic (form)	2.1
二阶无穷小	second order infinitesimal	5.7
二阶约束	quadratic constraint	2.1, 4.7, 7.3
二元运算	binary operation	3.9, 4.4, 5.1
F		
法向量	normal vector	2.5
反交换律	anticommutativity	3.9
泛旋量 (矩量)	motor	1.0, 3.3
范数	norm	4.4
方向向量	direction vector	2.1
仿射	affine	4.3
仿射变换	affine transformation	4.3
仿射变换矩阵	affine transformation matrix	4.1, 4.3, 5.1
仿射几何	affine geometry	1.0
仿射空间	affine space	4.3, 8.0
仿射群	affine group	4.3
仿射特性	affine properties	4.3
仿射映射	affine map	4.3, 5.1
仿射增广向量	affine augmentation vector	8.1
可逆仿射变换	invertible affine transformation	4.3
非对角线部	off-diagonal part	5.1

非归一化	non-normalized	4.4
非归一化的旋转轴	non-normalized axis of rotation	4.4
非奇异代数簇	non-singular algebraic variety	5.1
分解	decomposition	5.1
分离	disjoint	1.3, 6.3
封闭性	closure	3.3, 4.4, 5.1
封闭性公理	closure axiom	5.1
幅值	magnitude	3.1, 5.8, 6.1, 8.5
幅值向量	magnitude vector	9.1
力旋量幅值	wrench magnitude	9.1
运动旋量幅值	twist magnitude	9.1
副部	secondary part	2.1, 3.1, 4.7, 5.1, 6.1
G		
Gauss-Jordan 回代法	Gauss-Jordan back-substitution	8.5
Gauss-Seidel 迭代	Gauss-Seidel iteration	8.5
Gauss-Seidel 消元 (法)	Gauss-Seidel elimination	8.1, 8.3, 8.8
Gram-Schmidt 正交	Gram-Schmidt orthogonalisation	8.0
Grassmann 行列式	Grassmann determinants	2.5
刚度	stiffness	9.1
刚度矩阵	stiffness matrix	9.1
刚体位移	rigid body displacement	1.2, 4.2, 5.1
刚体运动	rigid-body motion	3.4
公法线	common normal	2.8, 3.2
公共连杆	common link	1.6
公共约束	common constraint	9.2
公共约束旋量多重集	common constraint-screw multiset	9.4
公共约束旋量系	common constraint-screw system	9.4
公共约束因子	common constraint factor	9.4, 9.7
公共运动空间	common-motion space	9.2
共点	concurrent	6.2
共轭的, 共轭数	conjugate	4.7, 5.7
共轭四元数	conjugate quaternion	4.6
共轭运算	conjugation	4.6, 5.7
共面	coplanar	2.8, 6.2
卦限	octant	9.11

- | | | |
|----------------------|--|----------------------------|
| 关联 | incidence | 2.9, 4.3 |
| 关联关系 | interrelationship | 1.4, 6.1 |
| 关联关系定理 | interrelationship theorem | 7.1 |
| 旋量系关联关系定理 | interrelationship law of screw systems | 7.1, 9.6 |
| 关联论 | relevance | 5.10 |
| 广义方程 | generalized equation | 6.4 |
| 归一化 | normalized | 4.4, 5.4 |
| 归一化浮点数 | normalized floating-point number | 8.8 |
| 轨迹规划 | trajectory planning | 1.4 |
| 过约束机构 | overconstrained mechanism | 1.6, 9.10, 9.12 |
| 空间过约束机构 | overconstrained spatial mechanism | 9.10 |
| 特殊三面 Bricard 连杆机构 | special trihedral Bricard linkage | 9.12 |
| H | | |
| Hamilton 算子 | Hamilton operator | 4.6 |
| Hoberman 可展球机构 | Hoberman sphere | 9.11 |
| 合成 | resultant | |
| 合成线矢量 | resultant line vector | 6.4 |
| 合成旋量 | resultant screw | 6.4 |
| 合成旋量轴 | resultant-screw axis | 1.2 |
| 核, 见“零空间” | | |
| 互矩 | mutual moment | 2.8, 3.1, 6.1 |
| 互易 | reciprocal | 3.7, 6.1 |
| 互易积, 也称“虚系数” | reciprocal product (virtual coefficient) | 2.8, 3.2 |
| 互易基 | reciprocal basis | 7.0 |
| 互易性 | reciprocity | 1.2, 3.7, 6.1 |
| 互易旋量 | reciprocal screw | 1.1, 3.2, 6.1, 8.4,
8.7 |
| 画法几何学 | descriptive geometry | 1.6 |
| 活动度 | mobility | 1.5, 9.3, 9.7, 9.9 |
| Grübler-Kutzbach 活动度 | Grübler- Kutzbach mobility criterion | 9.4, 9.7 |
| 准则 | | |
| 活动度扩展准则 | extended mobility criterion | 9.4, 9.7, 9.9 |
| 活动度系数 | mobility coefficient | 9.4, 9.7, 9.9 |
| 行空间, 见“矩阵空间” | | |
| 行空间正交补集 见“矩阵空间” | | |

J

Jacobi 定理	Jacobi's theorem	4.4
Jacobi 恒等式	Jacobi identity	3.9, 4.6
Jacobian 矩阵	Jacobian matrix	9.1
机构	mechanism	6.3, 9.2
机构静力学	mechanism statics	9.1
静力学逆解	inverse statics	9.1
静力学正解	forward statics	9.1
静平衡	static equilibrium	9.1
机构拓扑	mechanism topology	1.6
机构旋量系	mechanism screw system	9.7, 9.8, 9.10
机构旋量系关系式	relationship between mechanism screw systems	9.7
机构约束旋量系	mechanism constraint-screw system	9.2, 9.3
机构运动旋量系	mechanism motion-screw system	9.2
机构综合	mechanism synthesis	1.1
机架	frame	9.2
机器人学	robotics	1.0, 4.5
基本集	basis set	6.3
基数	cardinal number	6.3, 9.4
多重集基数	cardinal number of a multiset	9.6, 9.7
基数关系	relationship of cardinal numbers	9.6
集合论	set theory	1.7, 6.3
集合	set	6.3
集合运算	Boolean operation	6.3
并集 (并运算)	union	6.3, 7.1
交集 (交运算)	intersection	7.1, 9.1
几何代数, 见 “Clifford 代数”		
几何积, 又称 “楔积”	geometrical product (wedge product)	4.7
几何学	geometry	2.3
几何变换	geometric transformation	2.9
计算机辅助设计	computer aided design	4.2
交叉冗余度	degree of cross-redundancy	9.8
阶数	order/dimension	6.3, 7.1
并集阶数	order of a union	7.4
阶数定律	dimension law	6.3
旋量系阶数	order of a screw system	6.3, 9.9

- | | | |
|----------------------|------------------------------------|----------------------------|
| 旋量系阶数定律 | screw system dimension law | 6.3, 9.3 |
| 接触旋量 | contact screw | 9.1 |
| 结合律 | associativity | 4.3, 4.4, 5.1 |
| 截距 | intercept | 2.7 |
| 解空间, 见“矩阵空间” | | |
| 经典结构 | classical structure | 4.1 |
| 经典位移算子 | classical displacement operator | 4.8 |
| 精度 | precision | 1.7 |
| 局部活动度 | local mobility | 9.9 |
| 矩量, 见“泛旋量” | | |
| 矩量代数 (旋量代数), 见“旋量代数” | | |
| 矩量分析 | motor analysis | 1.0 |
| 矩阵 | matrix | |
| 代数余子式 | cofactor | 8.1, 8.3 |
| 单位矩阵 | identity matrix | 4.4, 5.1 |
| 对角线子矩阵 | diagonal submatrix | 1.7 |
| 反对称矩阵 | skew-symmetric matrix | 3.9, 4.1, 5.1, 5.4,
6.2 |
| 非对角线子矩阵 | off-diagonal submatrix | 1.7 |
| 分块矩阵 | partitioned matrix | 4.1, 5.1, 5.7 |
| 符号行列式 | symbolic determinant | 8.3 |
| 迹 | trace | 1.7, 3.2, 5.3 |
| 矩阵乘法 | matrix multiplication | 4.4, 5.1 |
| 列组合 | row combination | 8.1 |
| 满秩矩阵 | non-singular matrix | 5.2 |
| 三阶余子式 | third-order cofactor | 2.8 |
| 三阶子式 | third-order minor | 6.2 |
| 行列式 | determinant | 2.5, 5.1, 6.2 |
| 子矩阵 | submatrix | 4.1, 8.2 |
| 矩阵表示 | matrix representation | 3.9 |
| 矩阵空间 | matrix space | |
| 列空间 | column space | 8.1 |
| 零空间 (解空间) | null space/solution space | 8.1 |
| 行空间 | row space | 8.1 |
| 行空间正交补集 | orthogonal complement of row space | 8.3 |
| 正交互补 | orthogonal complement | 8.1, 8.2 |
| 矩阵向量空间 | vector space of matrices | 3.9, 5.1 |
| 矩阵运算 | matrix operation | 4.6, 5.1 |

矩阵直积	Kronecker product	4.5
余子式	cofactor	2.8, 8.3
K		
Kennedy-Aronhold 定理	Kennedy-Aronhold theorem	9.0
Killing 型	Killing form	3.2
Kirchhoff 定律	Kirchhoff law	9.9
Klein 二次曲面, 见 “二次曲面”		
Klein 型	Klein form	2.1, 3.1, 6.1, 6.3, 7.1
Kronecker 积	Kronecker product	4.5
可逆仿射变换, 见 “仿射”		
可逆性	inverse	4.4
可逆转立方体	invertible cube	1.6, 9.12
可展机构	deployable mechanism	1.8, 9.0
可展运动环链	expandable kinematic loop-chain	9.11
扩展 Sarrus 机构	extended Sarrus mechanism	9.11
L		
LU 分解	LU decomposition	8.5
拉普拉斯展开	Laplace expansion	2.8, 6.2
黎曼圆	Riemannian circle	9.11
大圆	Riemann great circle in a sphere	9.11
李代数	Lie algebras	3.0, 4.2
交换子	commutator	3.10
李代数伴随算子	Lie algebra adjoint operator	3.9
李代数表示	Lie algebra representation	3.4, 5.6
李代数的伴随表示	adjoint representation of Lie algebras	5.7
李代数元素	element of a Lie algebra	1.1, 3.2, 3.4, 4.1, 4.6, 5.7
李积	Lie product	3.10
李括号	Lie bracket	1.7, 3.9, 5.8
李运算	Lie operation	3.9, 3.10
特殊欧氏群的李代数 $se(3)$		3.0
特殊正交群的李代数 $so(3)$		3.4, 3.9
无穷小群	infinitesimal group	3.9
左作用	left action	3.10, 5.1, 5.7, 4.2,

- | | | |
|--------------|--------------------------------------|--------------------|
| | | 5.7 |
| 李群 | Lie groups | 1.2, 3.9, 4.4, 5.1 |
| 矩阵李群 | matrix Lie group | 4.4, 5.7 |
| 李群伴随表示 | adjoint representation of Lie groups | 5.1 |
| 李群伴随算子 | Lie group adjoint operator | 5.1 |
| 李群表示 | Lie group representation | 5.6 |
| 李群作用 | Lie action of a group | 1.4, 5.7 |
| 力旋量空间 | wrench space | 9.1 |
| 连杆系 | linkage | 9.2 |
| 连接度 | connectivity | 9.2 |
| 连续函数 | continuous function | 5.1 |
| 连续运动 | continuous motion | 1.6, 5.6 |
| 列空间, 见“矩阵空间” | | |
| 列组合, 见“矩阵” | | |
| 灵巧手工作空间 | multifingered hand workspace | 14.3 |
| 菱形 | rhombus | 4.5 |
| 零矩量 | zero motor | 3.3 |
| 零空间 | null space | 1.5, 8.1 |
| 多维零空间 | multidimensional null space | 1.5, 8.5 |
| 核 | kernel | 8.1 |
| 零空间构造定理 | construction law of the null space | 10.5 |
| 零空间向量 | null space vector | 8.6 |
| 旋量系零空间 | null space of a screw system | 1.5, 6.3, 8.0 |
| 左零空间 | left null space | 8.1 |
| 流形 | manifold | 1.2, 3.9, 4.2, 5.1 |
| 连续流形 | continuous manifold | 1.2, 4.2 |
| 微分流形 | differentiable manifold | 3.9, 4.4 |
| 螺旋运动 | helical motion | 5.2 |
| 螺旋运动速度场 | helical velocity field | 3.4 |
| 有限螺旋运动 | finite helical motion | 1.3, 5.0, 5.5 |
| M | | |
| Mozzi 瞬轴 | Mozzi's instantaneous axis | 3.4 |
| 满射 | surjective (mapping) | 4.4 |
| 末端执行器 | end-effector | 5.4, 9.1 |

N

内积空间	inner product space	8.0
拟圆柱面	cylindroid	1.3

O

欧氏空间	Euclidean space	2.3, 4.3, 5.1, 8.1
偶排列特性	even permutation	3.2

P

Pappus 理论	Pappus theorem	1.1, 2.3
Pappus 六边形	Pappus hexagon	1.1, 2.3
Plücker 坐标	Plücker coordinates	1.3, 2.5, 6.2
射线坐标	ray coordinates	2.7, 5.1, 8.7
轴线坐标	axis coordinates	2.7, 5.1, 8.1, 8.7
Plücker 坐标参数关系式	Plücker coordinates correlation	2.7
Poinsot 中心轴	Poinsot's central axis	3.0
Poinsot 中心轴定理	Poinsot's central axis theorem	3.5
平面对称 Bricard 6R 连杆机构	plane-symmetric Bricard 6R linkage	9.12
平面方程	equation of a plane	2.4
平面线束	plane pencil	6.2
平面坐标	plane coordinates	2.4
平台旋量系	platform screw system	9.10
平移向量	translation vector	4.7

Q

齐次的	homogeneous	2.3
平面齐次坐标	plane homogeneous coordinates	2.4
齐次变换矩阵	homogeneous transformation matrix	4.1
齐次方程	homogeneous equation	8.1
齐次空间	homogenous space	5.5
齐次位移算子	homogeneous displacement operator	4.2
齐次坐标	homogeneous coordinates	2.3
奇异构型	singularity configuration	9.2
全等变换	congruent transformation	5.2
群	group	4.2
闭合子群	closed subgroup	4.4

仿射群	affine group	4.3
刚体位移群	group of rigid body displacement	4.3
加群	additive group	4.3
矩阵群	matrix group	5.5
连续群	continuous group	1.2, 4.6, 5.4
平移群	$T(3)$	4.3, 5.1
商群	quotient group	5.1
特殊仿射群	special affine group $SA(n)$	4.3
特殊欧氏群	special Euclidean group $SE(3)$	5.1
特殊三面 Bricard 连杆机构	special trihedral Bricard linkage	9.12
特殊线性群	special linear group $SL(n)$	4.3, 5.1
特殊酉群	$SU(2)$	4.6
特殊正交群 $SO(3)$	special orthogonal group $SO(3)$	1.2, 3.9, 4.4, 5.1
拓扑群	topological group	5.1
位移子群	subgroup of displacements	1.2
旋转群	rotation group	4.4
一般线性群	general linear group $GL(n)$	4.3, 5.1
因子群	factor group	5.1
有限与连续群	finite and continuous group	1.2
正规子群	normal subgroup	4.3
正交群	orthogonal group	1.2, 3.9, 4.4, 5.1
群公理	group axioms	4.4
群表示	group representation	5.1
群特征	group properties	1.2
群运算	group operation	4.4, 5.7
群运算的结合律	associativity of group operation	5.1

R

Rodrigues 参数	Rodrigues parameters	4.5
Rodrigues 公式	Rodrigues formula	4.4, 4.5, 5.3, 5.9
Rodrigues 向量	Rodrigues vector	4.5, 5.6
人工智能	artificial intelligence	1.0
冗余机构	redundant mechanism	9.9
冗余约束	redundant constraint	9.5
冗余约束旋量	redundant constraint-screw	9.5, 9.6
冗余约束旋量多重集	redundant constraint-screw multiset	9.5, 9.6
冗余约束因子	redundant constraint factor	9.7

柔度	compliance	9.1
柔度矩阵	compliance matrix	9.1
S		
Sarrus 连杆机构	Sarrus linkage	1.6, 9.10
Sarrus 扩展机构	extended Sarrus linkage	10.11
Schatz 连杆机构	Schatz linkage	1.7, 9.12
Schatz 机构的参数条件	parameters of the Schatz linkage	9.12
Study 二次曲面, 见 “二次曲面”		
三阶余子式, 见 “矩阵”		
三阶子式, 见 “矩阵”		
三维射影空间	three-dimensional projective space	2.3, 4.3
三重积	triple product	
标量三重积	scalar triple product	2.1
三重积的偶排列	even permutation of a triple product	3.2
向量三重积	vector triple product	2.2
向量三重积恒等式	vector triple product identity	3.4, 3.5
旋量标量三重积	screw von Mises triple product	3.3
射线	ray	2.7
射线坐标, 见 “Plücker 坐标”		
射影, 投影	projection	2.3
射影变换	projective transformation	2.3
射影表示	projective representation	2.3
射影几何 (学)	projective geometry	1.1, 2.3
投影夹角	projection angle	3.2
射影空间	projective space	2.3
射影李代数	projective Lie algebra	1.1, 3.1, 5.8
射影坐标	projective coordinates	2.3
射影几何学对偶性	duality of projective geometry	2.9
对偶命题	proposition duality	2.3
互对偶图形	figure duality	2.3
互对偶元素	element duality	2.3
对偶运算	operation duality	2.3
交比	cross-ratio	2.3
剩余约束旋量	residual constraint screw	9.1
矢矩	mutual moment of a line vector	2.1
输出杆件	output link	9.2
双覆盖	double cover	4.6

双曲二次曲面, 见 “二次曲面”		
双线性	bilinear	
对称双线性型	symmetric bilinear form	3.2
双线性微分算子	bilinear differential operator	3.9
双线性型	bilinear form	2.1
双向量	bi-vector	3.7
双向约束	bilateral constraint	9.1
瞬时旋量轴	instantaneous screw axis	3.4, 9.9
瞬时运动学	first order kinematics	3.6
瞬时运动学逆解	first order inverse kinematics	9.1
瞬时运动学正解	first order forward kinematics	9.1
瞬时转动轴	instantaneous rotation axis	9.6
四维空间	four-dimensional space	
四维射影空间	four-dimensional projective space	2.5
四维向量空间	four-dimensional vector space	2.1
四维向量子空间	four-dimensional vector subspace	6.3
四维子空间	four-dimensional subspace	2.3
四元数	quaternion	4.6
Clifford 双四元数	Clifford's dual quaternion	4.0
Hamilton 四元数	Hamilton quaternion	1.2, 4.6
纯四元数, 向量四元数	pure quaternion, vector quaternion	3.9, 4.6
单位对偶四元数	unit dual quaternion	4.7
单位四元数	unit quaternion	4.6, 5.6
对偶四元数	dual quaternion	1.2, 4.7, 5.0
非零四元数	nonzero quaternion	4.6
共轭四元数	conjugate quaternion	4.6
真四元数	proper quaternion	4.6
算子	operator	4.2
T		
弹性	elasticity	9.1
特征	characteristics	
单位特征值	unit eigenvalue	4.4
特征旋量	eigenscrew	1.7, 5.4
特征值	eigenvalue	1.0, 4.4, 5.4
同态	homomorphism	4.6, 5.7
投影变换	projection transformation	4.3

投影变换矩阵	projection transformation matrix	4.3
投影面积	projection area	2.4
透视变换	perspective transformation	4.1
图形学	computer graphics	4.1
拓扑空间	topological space	5.5

W

外积	outer product	4.5
微分算子	differential operator	1.0
位形空间	configuration space	4.4
位移算子	displacement operator	4.2
位姿	location (position and orientation)	4.7, 5.4
位置向量	position vector	4.2, 5.2, 6.2
姿态向量	orientation vector	2.1, 3.9
无穷小位移旋量	infinitesimal displacement screw	5.8
无穷远	infinity	1.1, 2.3, 3.2, 4.3
无穷远处直线	line at infinity	1.1
无穷远点	point at infinity	2.3
五维射影空间	five-dimensional projective space	2.1, 3.1

X

系数矩阵	coefficient matrix	2.6, 8.3
线簇	line variety	2.9, 2.10
特殊线丛	special linear complex	2.10
线丛	linear complex	2.10
线汇	linear congruence	2.10
线列	regulus (line series)	2.10
线矢量	line vector	2.1, 5.2, 6.4
对偶线矢量	dual line vector	3.3
线矢量的自互易特性	self-reciprocity of a line vector	2.1, 7.1
线位移	line displacement	5.4
线性方程组	linear equation	7.1
线性和	linear sum	6.3
线性算子	linear operator	3.10, 4.4
线性系统	linear system	8.8
线性相关	linear dependence	6.2
线性组合	linear combination	6.3

- | | | |
|-------------|---|----------------------------|
| 相似变换 | similarity transformation | 5.2, 5.7 |
| 向量代数 | vector algebra | 1.1, 3.10, 4.7 |
| 向量微积分 | vector calculus | 1.6 |
| 楔积, 见“几何积” | | |
| 协互易 | co-reciprocal | 6.4 |
| 协互易基 | co-reciprocal basis | 9.12 |
| 协互易系 | co-reciprocal system | 6.4 |
| 协互易旋量系 | co-reciprocal screw system | 7.1, 7.3 |
| 斜等值线 | skew isogram | 1.6 |
| 斜率 | slope | 2.7 |
| 虚部 | imaginary part | 4.6 |
| 虚系数, 见“互易积” | | |
| 虚约束 | redundant constraint | 9.5 |
| 虚约束冗余因子 | redundant constraint factor | 9.7 |
| 旋距 | pitch | 1.1, 3.1, 3.4, 6.1 |
| 旋量 | screw | 1.1, 3.1, 6.1 |
| 力旋量 | wrench | 3.0, 3.5, 6.1 |
| 速度旋量 | twist | 3.0, 3.4, 5.8, 6.1 |
| 旋量表 | Clifford's table | 3.6 |
| 旋量代数 | screw algebra | 1.1, 3.0 |
| 旋量的位置向量 | position vector of a screw | 6.4 |
| 旋量对偶形式 | dual representation of a screw | 3.3 |
| 旋量互易性 | reciprocity of screws | 1.7, 6.1, 14.0 |
| 旋量矩阵 | screw matrix | 5.1 |
| 旋量理论 | screw theory | 1.0 |
| 旋量三角形 | screw triangle | 1.3, 5.5 |
| 旋量特性改变算子 | screw property-alteration matrix | 5.2 |
| 旋量微分 | screw derivation | 3.2 |
| 旋量系 | screw system | 1.5, 6.0, 6.3, 7.1,
8.1 |
| 二阶旋量系 | screw system of the second order | 7.3, 8.7 |
| 互易旋量系 | reciprocal screw system | 1.5, 6.3, 7.1, 8.1,
8.7 |
| 基本旋量系 | basic screw system | 9.2, 9.3 |
| 六阶旋量系 | screw system of the sixth order | 6.2 |
| 三阶互易旋量系 | reciprocal screw system of the
third order | 8.7 |
| 三阶旋量系 | screw system of the third order | 7.4, 8.7 |

四阶互易旋量系	reciprocal screw system of the fourth order	8.7
四阶旋量系	screw system of the fourth order	6.3, 7.3, 8.7
五阶旋量系	screw system of the fifth order	6.3, 7.2, 8.4, 9.12
一阶旋量系	screw system of the first order	6.3, 7.2
旋量系对偶定理	duality of screw systems	9.3
旋量系关联关系定理	interrelationship theorem of screw systems	7.1, 9.6
多维交集	multi-dimensional intersection	7.1
空间集	null intersection	7.1
一维交集	one-dimensional intersection	7.1
旋量系理论	screw system theory	1.7, 3.7, 6.0, 7.0, 9.1
旋量系转换定理	screw system transformation theorem	6.3, 9.3
旋量运算	screw operation	3.2
互易积	reciprocal product	2.8, 3.2
旋量叉积	screw cross product	3.2
旋量全标量积	screw full-scalar product	3.3
旋量微分	screw differentiation	3.2
旋量轴线	screw axis	3.1, 3.4, 5.4
旋量组合矩阵	screw assemblage matrix	8.5
旋转角	revolute joint	4.4, 5.3
旋转矩阵	rotation matrix	4.1
旋转向量	rotor	3.6
旋转轴	rotation axis	4.4, 5.1
有限位移旋量矩阵	finite displacement screw matrix	5.1
轴向平移矩阵	axial translation matrix	5.2
Y		
一般螺旋位移	general screwing displacement	4.0, 5.0
一般位移	general displacement	4.8, 9.1
移动副	prismatic joint	6.1
移位分块	shifted partitioning	1.5, 8.5, 8.6
映射空间	mapping space	5.5
有限螺旋位移	finite screwing displacement	1.3, 5.0
有限位移旋量	finite displacement screw	1.2, 5.0, 5.4
有限位移旋量矩阵	finite displacement screw matrix	5.1

- | | | |
|-------------|--|--------------------------------------|
| 有限位移旋量算子 | finite displacement screw operator | 5.2 |
| 有限位移旋量轴线 | finite displacement screw axis | 5.4 |
| 有限旋转 | finite rotation | 1.2, 4.4 |
| 有限旋转的合成公式 | composition formula for finite rotation | 1.2 |
| 有效约束 | effective constraint | 9.7, 9.9 |
| 有序组合 | ordered combination | 4.4, 5.4, 5.5, 9.2 |
| 余子式, 见“矩阵” | | |
| 圆柱副 | cylindrical joint | 7.3 |
| 约束 | constraint | 1.5, 2.1, 4.7, 6.1,
7.2, 8.4, 9.1 |
| 约束空间 | constraint space | 9.2 |
| 约束力旋量 | constraint wrench | 6.1, 7.2, 8.4 |
| 约束旋量多重集 | constraint-screw multiset | 9.4, 9.5 |
| 公共约束旋量多重集 | common constraint-screw multiset | 9.4 |
| 互补约束旋量多重集 | complementary constraint-screw
multiset | 9.5 |
| 平台约束旋量多重集 | platform constraint-screw multiset | 9.10 |
| 冗余公共约束旋量多重集 | redundant common constraint-screw
multiset | 9.4 |
| 冗余约束旋量多重集 | redundant constraint-screw multiset | 9.5 |
| 输出杆件约束旋量多重集 | output-link constraint-screw multiset | 9.5, 9.6 |
| 约束旋量系 | constraint-screw system | 9.2, 9.6 |
| 公共约束旋量系 | common constraint-screw system | 9.4 |
| 互补约束旋量系 | complementary constraint-screw system | 9.5 |
| 机构约束旋量系 | mechanism constraint-screw system | 9.2, 9.3 |
| 平台约束旋量系 | platform constraint-screw system | 9.10 |
| 输出杆件约束旋量系 | output-link constraint-screw system | 9.2 |
| 约束旋量系分解定理 | constraint-screw system decomposition
theorem | 9.6, 9.9 |
| 支链约束旋量系 | limb constraint-screw system | 9.10 |
| 子运动链约束旋量系 | subchain constraint-screw system | 9.2, 9.5 |
| 约束与自由运动 | constraint and freedom | 7.2 |
| 运动副 | kinematic pair | 9.2 |
| 运动链 | kinematic chain | 9.2 |
| 闭环运动链 | closed-loop kinematic chain | 9.2 |
| 开环运动链 | open-loop kinematic chain | 9.2 |
| 子运动链 | kinematic sub-chain | 9.2 |
| 运动冗余度 | motion redundancy | 9.9 |

运动旋量	twist	6.1, 9.1
运动旋量空间	twist space	9.1
运动旋量系	motion-screw system	
机构运动旋量系	mechanism motion-screw system	9.2, 9.3
平台运动旋量系	platform motion-screw system	9.10
输出杆件运动旋量系	output-link motion-screw system	9.2
子运动(支)链运动旋量系	sub-chain motion-screw system	9.2, 9.5
运动学	kinematics	1.1, 3.6
运动学逆解	inverse kinematics	1.3, 9.1
运动学正解	forward kinematics	9.1
Z		
增广的	augmented	
仿射增广向量	affine augmentation vector	8.1
增广矩阵	augmented matrix	8.2
增广向量	augmentation vector	8.1, 8.2
增广旋量	augmentation screw	8.4
逐级增广	staged augmentation	1.5, 8.5, 8.6
张成	span	6.3
张量积	tensor product	4.5
阵列	array	2.4
正交矩阵	orthogonal matrix	1.4, 4.1, 5.1
正交空间	orthogonal space	1.5
正交平面	orthogonal plane	3.7
正交向量	orthogonal vector	2.4, 4.7
正交旋转	orthogonal rotation	1.2
正向关系	compelling relation	9.1
正则	canonical	3.8, 4.4
正则旋量	canonical screw	3.8, 7.4
支链(子运动链)	limb (sub-chain)	9.1
支链(子运动链)旋量系	limb (sub-chain) screw system	9.2
直和	direct sum	6.3
直积	direct product	4.5
直纹面	ruled surface	2.0, 9.12
直纹面母线	ruled surface generator	9.12
直纹面准线	directrix of a ruled surface	9.12
直线的位置向量	position vector of a line	2.1

-
- | | | |
|----------------------|---|--------------------|
| 直线几何 | line geometry | 1.1 |
| 直线运动 | straight-line motion | 1.0, 9.4 |
| 指数矩阵 | exponential matrix | 4.5 |
| 指数映射 | exponential map | 1.8, 4.4, 5.8 |
| 秩 | rank | 2.6, 6.2, 8.1, 8.2 |
| 轴线 | axis | 2.1 |
| 轴线方向 | axis direction | 3.4, 4.5 |
| 轴线平移矩阵 | axial translation matrix | 5.2 |
| 轴线坐标, 见“Plücker 坐标” | | |
| 逐级增广, 见“增广的” | | |
| 主部 | primary part | 2.1, 3.1, 6.1 |
| 主动铰链副 | actuated joint | 1.6 |
| 主齐次空间 | principal homogeneous space | 4.3 |
| 抓持 | grasp | 9.1 |
| 静态抓持能力 | static graspability | 1.7 |
| 抓持矩阵 | grasp matrix | 9.1 |
| 抓持系统 | grasp system | 9.1 |
| 准线 | directrix | 9.12 |
| 姿态 | orientation | 2.1, 4.2, 5.4, 6.2 |
| 子代数 | subalgebra | 1.1 |
| 自对偶 | self-dual | 2.9 |
| 自互矩 | self-reciprocal product | 3.1 |
| 自互易 | self-reciprocal | 2.1, 6.4, 7.3, 7.4 |
| 自互易特性 | self-reciprocity | 2.1 |
| 自由度 | degree of freedom | 9.2 |
| 自由向量 | free vector | 2.1 |
| 综合约束冗余因子, 也称“综合冗余因子” | compound redundant-constraint factor | 9.7 |
| 组合运算 | combination operation | 5.5 |
| 坐标变换 | coordinate transformation | 4.1, 9.6 |
| 坐标变换法则 (旋量) | coordinate transformation law for a screw | 3.1 |
| 坐标系 | coordinate frame | 3.2, 4.1 |
| 固定坐标系 | fixed coordinate frame | 3.4 |
| 局部坐标系 | local coordinate frame | 4.1 |
| 球面坐标系 | spherical coordinate frame | 4.4 |
| 全局坐标系 | global coordinate frame | 4.1 |

后 记

写这本书的想法最初起源于 1996 年夏天. 当时我在第 24 届 ASME 机构学双年会发表题为 *Task-oriented Direct Synthesis of Serial Manipulators Using Moment Invariants* 的文章¹, 随后收到 CRC 出版社的写书邀请. 当时因为忙, 就搁置了. 自 2005 年起, 每年都有出版社邀请我写书, 因为太忙, 我大都推荐其他学者给出版社. 2010 年底, 在 Springer 出版社多次邀请之后, 我下决心写这本书.

这些年, 我习惯将自己在研究中的想法写成随笔, 并通过邮件同我的已毕业的博士和在读的博士生以及学术界的朋友们分享. 现在回头看, 2011 年至今三年间的这些邮件在不经意间准确地记录了这次著书的历程. 由此, 选取一部分邮件整理 (略有改动) 如下, 以期与读者深入交流.

1. 著书的起源

<2013.04.19> Mr Screws

由于 1967—1968 年停课期间对三角几何与因式分解的训练以及 1978—1984 年上海交通大学在读期间对空间几何的酷爱和线性代数的迷恋, 自 1989

¹Dai, J.S., Holland, N. and Kerr, D.R. (1996) Task-oriented direct synthesis of serial manipulators using moment invariants, *Proc the 24th ASME Biennial Mechanisms Conference*, August 19-22, 1996, Irvine, California.

年初夏到 Salford 大学²后,我就开始对旋量理论产生兴趣.从那时起,我深入攻读了 Hunt³的机构运动学论著,广泛阅读了 20 世纪 20 年代以后的几何与代数书籍.在 John Sanger 和 David Kerr 主持的研究组研讨会上,我作了多次关于旋量理论的研究报告.当时我主要研究抓持的旋量空间理论,将刚体几何特性映射到旋量空间,开展抓持有效性与稳定性的探索.在《旋量映射空间及其机器人抓持应用》的博士论文⁴中,我阐述了研究中发现的旋量线性相关理论、旋量系关联关系理论以及旋量特性转换矩阵,提出了“旋量理论与旋量系特性的新角度研究”.由于对旋量理论研究的专注与投入以及对那些难度较高的论著的攻读,被做访问学者时的导师 Sanger 和攻读博士时的导师 Kerr 戏称为 Mr. Screws.我当时撰写了许多文章手稿,但没有投稿.从 1995 年底起,这些手稿连同我的许多推导、批注、心得被全部打印、装订和整理,并仔细地放入木箱里,存放于车库中.在往后的 18 年中,这几箱材料从曼彻斯特搬到达勒姆,从达勒姆搬到伦敦.

自 1990 年起,我持续地作旋量理论与旋量系特性的研究,于 1991 年发表了有关三瞬心定理的文章⁵,于 1995 年发表了有限位移旋量的文章⁶,于 1996 年发表了扩展抓持矩阵的文章⁷,于 2000 年在纪念 Ball 论著 100 周年研讨会上发表了互易旋量求解文章⁸,于 2001 年提出了旋量系关联关系理论⁹,于 2002

²英国 Salford 大学在 20 世纪 90 年代初对旋量理论的研究十分活跃,是英国乃至欧洲研究旋量理论的中心.由 John Sanger 教授和 David Kerr 博士牵头的机构学中心经常性地组织学术研讨会,不断地有国际旋量理论专家造访.

³Hunt, K.H.(1978) *Kinematic geometry of mechanisms*, Clarendon Press, Oxford.

⁴Dai, J.S. (1993) *Screw Image Space and Its Application to Robotic Grasping*, PhD Dissertation, University of Salford, Manchester.

⁵Dai, J.S., and Kerr, D.R. (1991) Geometric Analysis and Optimisation of a Symmetrical Watt Six-Bar Mechanism, *J. Mech. Eng. Sci.*, **205**(4): 275-280.

⁶Dai, J.S., Holland, N. and Kerr, D.R. (1995) Finite twist mapping and its application to planar serial manipulators with revolute Joints, *J. Mech. Eng. Sci.*, **209**(C3): 263-272.

⁷Dai, J.S. and Kerr, D.R. (1996) Analysis of force distribution in grasps using augmentation, *J. Mech. Eng. Sci.*, **210**(C1): 15-22.

⁸Dai, J.S. and Rees Jones, J. (2000) Vectors of Cofactors of a Screw Matrix and Their Relationship with Reciprocal Screws. *International Symposium Commemorating the Legacy, Works, and Life of Sir Robert Stawell Ball Upon the 100th Anniversary of "A Treatise on the Theory of Screws"*, 9-11 July, Cambridge, UK.

⁹Dai, J.S. and Rees Jones, J. (2001) Interrelationship between screw systems and corresponding reciprocal systems and applications, *Mech. Mach. Theory*, **36**(5): 633-651.

年提出了零空间构造理论¹⁰, 于 2003 年提出了互易旋量求解理论¹¹, 于 2004 年、2006 年提出了并联机构旋量系理论^{12,13}, 于 2006 年发表了理论运动学史 200 年回顾的文章¹⁴. 在过去的 20 多年中, 正如多年前对学生所谈到的, 我的学术生涯是一直向前冲, 没有时间回头看. 自己改 20 多遍的文章见于期刊了, 但没时间欣赏, 又开始新的攻关. 许多时间是与学生和其他学者一道, 全力做新的研究, 写新的文章. 直到 2010 年底打开车库的木箱, 翻看这些打印装订得整整齐齐的手稿时, 我才感到一阵阵的心痛. 竟然完成了这么多的推导与理论, 但这些研究却始终不见天日. 至今, 我的许多研究仍沉睡在车库的木箱里. 这引起了新生 (我的博士生, 下同) 最近有趣的称呼, 即“木箱里的理论”.

从那一刻起, 我想应该尽早将这些研究总结并撰写出来. 2011 年 1 月我到热那亚的意大利理工学院作合作研究, 夜晚在旅馆里, 一气呵成写出了当时的 12 章目录. 由于这些理论与文章一直徘徊在我的脑海中, 逻辑明朗, 脉络清晰, 因此于 2011 年底就基本完成了全书的写作. 国际著名理论运动学与机构学专家 Bernard Roth 浏览我的初稿后为之惊讶, 他在 2012 年 3 月 10 日写到, “你竟然只花 15 个月就完成了这项宏伟的工程, 衷心祝贺你取得这一成果”. 不过, 此后的又一个“15 个月” 可谓是更艰苦的著述与修改时期.

我的事情实在太多, 且很多事情急如火燎, 如不及时处理, 就会出大问题. 因此, 常常要拼命几周, 将事情都处理了, 才能有一小段稳定时间来写书. 这样, 写书的时间经常是支离破碎的, 艰苦异常. 旅馆、饭店、火车、机舱, 无论何时何地, 我总是在推导、修改与著述.

¹⁰Dai, J.S. and Rees Jones, J. (2002) Null space construction using cofactors from a screw algebra context, *Proc Royal Society London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **458**(2024): 1845-1866.

¹¹Dai, J.S., and Rees Jones, J. (2003) A Linear Algebraic Procedure in Obtaining Reciprocal Screw Systems, Special Issue in Commemoration of Prof J Duffy, *J. Robot. Syst.*, **20**(7): 401-412.

¹²Dai, J.S., Huang, Z. and Lipkin, H. (2004) Screw system analysis of parallel mechanisms and applications to constraint and mobility study, *Proc of the 28th Biennial Mechanisms and Robotics Conference*, Sept. 28-Oct. 2, Salt Lake City, USA.

¹³Dai, J.S., Huang, Z. and Lipkin, H. (2006) Mobility of overconstrained parallel mechanisms, *ASME J. Mech. Des.*, **128**(1): 220-229.

¹⁴Dai, J.S. (2006) A historical review of the theoretical development of rigid body displacements from Rodrigues parameters to the finite twist, *Mech. Mach. Theory*, **41**(1): 41-52.

2. 有限位移旋量的研究

<2013.02.08, 2013 年蛇年除夕夜>

关于有限位移旋量的讨论非常有意义, 这是旋量理论的一个关键点. 大多数人认为旋量是瞬时量, 只有那些于 20 世纪 90 年代研究 *finite twists*, 包括早期研究 *finite displacement screws* 的学者才认为旋量也包括位移, 即包括非瞬时量.

Ball 理论的基本点是 *small displacement*, 此为瞬时量. Ball 在论著中指出, *In the case of a twisting motion about a screw α the rate at which the amplitude of the twist changes may be called the twist velocity and be denoted by $\alpha(\cdot)$* ¹⁵. 虽然 Ball 理论出发点是, “*the theory of screws is founded upon two celebrated theorems. One relates to the displacement*¹⁶ *of a rigid body. The other relates to the forces*¹⁷ *which act on a rigid body*”, 并提出了 *screw displacement* 的概念, 但是其基本理论是基于 *dynamics* 的.

最早提出 *displacement screws* 的学者是 Dimentberg¹⁸⁻²⁰, Yang²¹ 进而在 1964 年进行了发展. Tsai 和 Roth²² 演变出 *screw axis geometry for finitely separated positions*, 提出了 *screw cylindroid* 和 *instantaneous screw cylindroid*, 并发展了 Ball 理论. 前者演变为 *screw triangle*, 由两位移旋量求取合成位移旋

¹⁵Ball, R.S. (1876) *Theory of screws: A study in the dynamics of a rigid body*, Hodges, Foster, and Co., Grafton-Street, Dublin.

¹⁶Chasles, M. (1830) Note sur le propriétés générales du système de deux corps semblables entr'eux et places d'une manière quelconque dans l'espace; et sur le déplacement fini ou infiniment petit d'un corps solide libre, *Bull. Sci. Mach*, Ferussac, **14**: 321-326.

¹⁷Poinsot, L. (1806) Sur la composition des moments et la composition des aires, *Paris Journal de l'Ecole Polytechnique*, **6**(13): 182-205.

¹⁸Dimentberg, F.M. (1950) *The determination of the positions of spatial mechanisms*, Izdat, Akad, Moscow, USSR.

¹⁹Dimentberg, F.M. and Kislitsyn, S.G. (1960) Application of screw calculus to the analysis of three-dimensional mechanisms, *Trudy II Vsesoyuznogo soveshchaniya po problemam dinamiki mashin*.

²⁰Dimentberg, F.M. (1965) *The screw calculus and its application to mechanics* (in Russian) Izdat. Nauka, Moscow, English Translation, Foreign Technology Division, U.S. Department of Commerce, (N.T.I.S), No. AD 680993, WP-APB, Ohio, 1969.

²¹Yang, A.T. and Freudenstein, F. (1964) Application of dual-number quaternion algebra to the analysis of spatial mechanisms, *ASME, J. Appl. Mech.*, **86**(2): 300-309.

²²Tsai, L.W. and Roth, B. (1973) Incompletely specified displacements: Geometry and spatial linkage synthesis, *ASME, J. Eng. Ind.*, **95**(B): 603-611.

量, 即旋量三角形法则. 这一 (*finite*) *screw displacement* 在 Bottema 与 Roth²³ 的书中写得很详细.

采用 *displacement screw* 这个名词的, 应该是 Dimentberg¹⁹ 和 Yang²⁰; 采用 *finite twists* 和 *finite displacement screws* 的是 Parkin²⁴、Hunt²⁵ (通过 Study 八维坐标与对偶四元数关联)、Huang 和 Roth²⁶ 以及 Dai、Holland 和 Kerr^{6,27}.

Finite displacement screws (有限位移旋量) 也称 *finite twists* 的提出是旋量理论由瞬时量到非瞬时量的飞跃, 进而可与李群及对偶四元数相联系. 缺少这一步, 旋量与李群及对偶四元数就无法贯通, 但这也是旋量理论发展的必然结果. 由此而来, 我们常说的具有瞬时性的 *screws* 与具有非瞬时性的 *finite displacement screws* 就分别对应于李代数与李群.

20 世纪 90 年代一些学者对 *finite twists* 与 *finite displacement screws* 作了定义.

(1) Parkin²³ (1992): 从一个坐标系到另一坐标系的变换 (原作者未给出具体定义, 但从内容上可以看出);

(2) Huang 和 Roth²⁶ (1994): 空间刚体的位移 (原作者未给出具体定义, 但从内容上可以看出);

(3) Dai、Holland 和 Kerr^{6,27} (1995): *specify a screw displacement by describing the position and orientation of an object from one location to another location* (采用刚体两个状态的位姿定义螺旋式位移);

(4) Davidson 和 Hunt²⁸ (2004): *specify a screw displacement, to establish the relative location of two Cartesian frames* (定义了建立两坐标系相对位姿的螺旋式位移).

²³Bottema, O. and Roth, B. (1979) *Theoretical kinematics*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, North-Holland, Amsterdam.

²⁴Parkin, I.A. (1992) A third conformation with the screw systems: Finite twist displacements of a directed line and point, *Mech. Mach. Theory*, **27**(2): 177-188.

²⁵Hunt, K.H. and Parkin, I.A. (1995) Finite displacements of points, planes, and lines via screw theory, *Mech. Mach. Theory*, **30**(2): 177-192.

²⁶Huang, C. and Roth, B. (1994) Analytic expressions for the finite screw systems, *Mech. Mach. Theory*, **29**(2): 207-222.

²⁷Holland, N., Dai, J.S. and Kerr, D.R. (1995) Application of the finite twist in serial manipulator workspace investigations, *Proceedings of the 9th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, August, Milano, Italy, 1757-1761

²⁸Davidson, J. and Hunt, K.H. (2004) *Robots and screw theory, applications of kinematics and statics to robotics*, Oxford University Press, New York.

从以上观点来看,并没有规定 *finite displacement screws* 或 *finite twists* 是微小量. 正如李群不需要是微小量,只要是光滑流形就行. 由此认为,我之前的建议(见下面邮件内容)是可行的. 2005年起,我在国内提出微小位移旋量的概念,着重在微小量上,但其本质是有限位移旋量.

<2013.02.05> 有限位移旋量

我在这几个月有同感. 因为这同于“有限群”,源于 *finite groups*,中文应翻译为“有限位移旋量”. 但在书里第一次出现时,我将说明一下也有采用“微小位移旋量”的情况,该说法主要是考虑该类型旋量的运动范围非常小. 为了保证中文描述的严谨性以及同微分旋量的区别,本书采用“有限位移旋量”.

这种类型的旋量不一定是非常小,任何描述位移的旋量都可以. 我想这可以从我之前的分析中得出,也可从其与李群的对应性得出. 这样就改变了目前认为旋量只解决瞬ze问题的观点.

2012年6月我与 Bernie Roth 在因斯布鲁克的第13届 ARK 研讨会期间以及2012年7月与 Ken Waldron 在天津的第2届 ASME/IFToMM 可重构机构与机器人大会²⁹期间,都谈到上述的观点并进行了讨论. 他们在 *finite screws* 与 *finite displacement screws* 的选择中,建议采用后者. 希望上面的讨论对你们(指我的学生)有所帮助. 我很高兴新生的详尽分析,东明(Khalifa 大学助理教授)的寻经问典,也很高兴崔磊(Curtin 大学助理教授)、克涛(伦敦大学国王学院助理研究员)与国武(伦敦大学国王学院助理研究员)的思考与多方论证. 我希望你们都能成为理论家. 我们需要理论家,而现在理论家太少. 祝大家春节愉快,万事如意! 在新的一年里有进一步的发展!

3. 旋量系理论的研究

<2013.04.17>

“旋量系理论”的研究应该追溯到我1991—1993年期间的研究. 我常说2001年的MMT文章花了我十年时间,就是从那时算起的. 文章的概念

²⁹Dai, J.S., Zoppi, M. and Kong, X.W. (2012) Advances in reconfigurable mechanisms and robots I, *Proceeding of the second ASME/IFToMM International Conference on Reconfigurable Mechanisms and Robots (ReMAR 2012)*, Springer, London.

在 1992 年和 1993 年的研究组研讨会上给大家讲³⁰, 总不被理解. 1994 年反复修改成稿后, 于 1995 年在米兰的 IFToMM 第 9 届世界大会上送给 Stewart 并联机构分析的国际权威专家 Gene Fichter³¹ 教授看, 得到肯定. 1996 年访问 SCARA 机器人的发明人——山梨大学牧野洋³² 教授时, 在旅馆里基于集合论又全部改写了一遍. 1998 年在亚特兰大参加第 25 届 ASME 机构学双年会后, 应邀到国际旋量权威专家佛罗里达大学 Joe Duffy³³ 教授家住了一晚, 我当时请他看了这篇手稿. Duffy 说这个创新就在于将集合论引入到旋量系研究中. 这就是我于 2001 年发表的关于旋量系关联关系理论文章的十年写作道路.

我的旋量系理论研究是基于 1993 年博士论文⁴ 中提出的旋量理论与旋量系特性的新角度研究以及上述十年完成的并于 2001 年发表的关于旋量系关联关系理论的 MMT 文章⁹, 加上其后持续研究并于 2002 年发表的关于零空间理论的皇家学报文章¹⁰ 以及 2003 年关于互易旋量系解空间的机器人系统学报文章¹¹, 到 2004 年¹² 和 2006 年¹³ 并联机构旋量系理论文章完成时, 已逐步形成了旋量系理论. 对于该理论, 东明与克涛用得好, 经常在分析并联机构的各种旋量系³⁴⁻³⁶ 时用到, 并成功地分析了多种机构的活动度, 尤其对活动度³⁷ 理解得好. 我 2004 年和 2006 年的文章也被引用为并联机构相关的旋量系理论. 另外, 我的旋量系理论也被其他著作所采用.

根据新生的提议, 将书中的旋量系关联关系定理、旋量系零空间构造定理以及约束旋量系分解定理列为旋量系理论的三大定理. 我加上旋量系对

³⁰Dai, J.S. (1993) Relationship between screw systems. Seminar Note, University of Salford, Manchester.

³¹Fichter, E.F. (1986) A Stewart platform-based manipulator: General theory and practical construction, *Int. J. Robot. Res.*, **5**: 157-182.

³²牧野洋 (1980) 自动机械机构学, 科学出版社, 北京.

³³Duffy, J. (1996) *Statics and kinematics with applications to robotics*, Cambridge University Press, New York.

³⁴Gan, D.M., Dai, J.S. and Caldwell, D.G. (2011) Constraint-based limb synthesis and mobility-change-aimed mechanism construction, *ASME J. Mech. Des.*, **133**(5): 051001.

³⁵Zhang, K., Dai, J.S. and Fang, Y. (2010) Topology and constraint analysis of phase change in the metamorphic chain and its evolved mechanism, *ASME J. Mech. Des.*, **132**(12): 121001-121011.

³⁶Zhang K., Dai, J. S., and Fang, Y. (2013) Geometric constraint and mobility variation of two 3SvPSv metamorphic parallel mechanisms, *ASME J. Mech. Des.*, **135**(1), 11001.

³⁷Gan, D.M., Dai, J.S. and Liao, Q.Z. (2010) Constraint analysis on mobility change in the metamorphic parallel mechanism, *Mech. Mach. Theory*, **45**(12): 1864-1876.

偶定理,这就形成了旋量系四大理论.

<2013.05.27> 理论研究

很多方面需要系统的理论,而这里面有很深的理论,还没有挖掘.回想我在1991年研究的Gibson和Hunt的两篇旋量系文章以及1992年研究的Rico和Duffy的三篇旋量系文章,他们都是一个系一个系地检查其相关关系.我当时想,这里面一定有规律,并研究出了雏形.我在Salford的研讨会上谈了,但都觉得玄.经过Fichter教授的肯定、到日本作高访时的再创作以及后来Duffy教授的首肯,这一理论得以缓慢发展.因此,任何事物都有规律,我的2004/2006年的并联机构旋量系文章已经很接近综合.这篇文章的后续就是综合,当时也同Lipkin谈到过这一点.

在学术道路上,路向何方?我想,关注理论问题就是方向.任何时候都不能被现象所迷惑,而要看到实质.

<2013.10.26> 例题 8.9

我一早起来,看了康熙(我的博士生,下同)的邮件.我在空间画了图,对这个空间机器人认真想了一下.首先这个第四旋转臂的 z 分量是对的.因为 S_4 的 $\sin(\theta)$ 投影只投影到了一个倾斜平面,投影线也是与 z 轴倾斜的.必须继续投影.所以这一分量是对的.由于是倾斜线,也同时产生了 x 与 y 的分量.所以 x 与 y 分量的第二部分由此产生.

另外,在第一次 S_4 的 $\sin(\theta)$ 投影时,又有 S_4 的 $\cos(\theta)$ 产生了与 z 轴垂直的分量.该分量分解产生了 x 与 y 分量的第一部分.所以 S_4 主部是正确的.如此看来,副部也是正确的.

作为一名出色的机构学家,还需要有非常好的三角几何,空间几何,与解析几何.请不要完全迷信矩阵运算与计算机的结果,自己要用最保险的方法进行验证.这种三角几何法是一种验证办法.任何东西不能偏听偏信,要自己验证,由此可以产生自己的想法、自己的文章.康熙做得很好.另外,三角几何法发的文章也很有特色.我将这一邮件转抄大家.

<2013.10.28> 由例题 8.9 引申到搞研究、写文章、审稿以及授课

我想这里有个哲理问题,我们大家都可以得到启示.首先请大家认真读一下我上面的周六(指10月26日,下同)早晨的邮件.从这一例题,我们可

以引申出许多要点.

一是如何开展研究, 找到研究的方向. 这就需要对这样一类问题进行探讨.

二是写文章. 文章中需要写出问题与数学公式的物理涵义, 而不是简单地列举一堆数学公式, 而没有解释. 这是学生做作业, 不是写文章. 文章中需要写出这些解释, 类似于我周六早晨所写的. 要写出这些, 就必须理解, 也才能写到位. 这就是一篇文章如何写就与如何写长的道理.

三是正如我对康熙所说, 一种方法做出的, 一定要用另一种方法进行验证. 而三角几何法更直观, 更不容易出错. 所以常常是做验证的手段. 审稿人常常采取这种方法验证论文. 如果你的简单推算被审稿人验证后是正确的, 审稿人就默认你的复杂推算是正确的. 例如, 我验证出康熙对旋量 S_4 主部的运算是正确的, 经过简单推理, 我就可以默认他运算出的副部也是正确的. 这种情况出现在我的一位博士生 Paresh Shah 在 2002 年的毕业答辩中. 他研究灵巧度定理, 做了许多工作. 当 Bath 大学名教授 Tony Medland 来答辩前, Tony Medland 先用几何方法进行了验证, 认为是对的. 这才让他通过, 结果答辩是成功的. 审稿人常常也是这样验证的.

四是能否用语言将一串数学公式讲清楚: 一是取决于你对问题理解的程度; 二是表达能力. 当一名好的教师, 一定要注意将这些问题的物理意义表达清楚. 这即是写一篇好文章的本领, 也是及早训练讲授本领的契机.

我觉得这四点你们现在与将来都很重要, 所以写出来, 希望对你们有启示. 请注意, 哲理与关联存在于每件小事中.

4. 旋量代数与李群、李代数的研究

<2012.01.04> 李群、李代数内容

我在元旦前后, 又做了一些工作, 主要是提炼这本书中关于李群、李代数的内容. 我的第二章 (现在为第三章) 内容事实上是李代数, 第三章 (现在为第四章)、第四章 (现在为第五章) 内容是李群. 所以我把这些概念又强化了一下. 同时我研读了 18、19 世纪欧洲数学史, 研究了旋量及李群、李代数的发展史, 研究了 1913 年起步的 *spinor* 和自 1830 年起步的旋量研究历史, 于昨天下午和晚上草拟了数学版的前言, 由于扫描仪有问题, 由新生在深夜 11 点钟将手稿拿去, 同康熙一起打字, 到今天凌晨 1 点钟我才收到稿件.

<2012.01.22> 有限位移旋量与李群以及旋量与李代数的关联

请见我对后五章的著述与修改. 对这五章, 我是一气呵成的, 似乎这五章形成了很好的结构. 在过去的几周, 我抓住一切空隙, 彻底地整理了前七章的思路, 并写出了额外一章作为绪论. 这段时间的突破是彻底贯通了有限位移旋量与李群以及旋量与李代数. 这一突破已经天衣无缝地吻合在前几章节的论述中.

当完成这一理论突破后, 我将重新回到前七章 (现在的前八章), 仔细作文字与内容的修改. 争取在二月初完成现在的前八章, 而后开始对剩下的六章再作修改.

<2012.02.18> 四大理论的历史发展与理论关联

在过去的两个月时间里, 我将全书又改了一遍, 并有重大理论突破. 这两个多月, 夜以继日, 没有周末和假日, 几乎没有休息, 我非常满意这一突破. 关键是将历来分散的理论综合起来, 抓住其内在的联系, 建立关联. 我将旋量、有限位移旋量、李群与李代数四方面理论从历史发展的角度及理论关联的角度建立了它们之间的联系. 从而在这一版书稿中, 我贯通了旋量代数和李群、李代数理论, 将这些理论有机地结合起来. 这使得本书成为国内外第一本将旋量理论、旋量代数与李群、李代数结合的专著.

在李群和李代数方面, 本书也不失为是一本入门书. 本书对李群与李代数表示论作了系统深入的归纳、总结和概括. 尤其注重由浅入深地阐述, 从大家最熟悉的线性代数、空间几何入手, 讲到直线几何、旋量代数、李群、李代数、四元数、对偶四元数, 直至 Clifford 代数, 将这些现代数学有机结合, 融会贯通.

英文专著已经基本完稿. 下面准备根据这两个月的突破与改写情况, 对去年 12 月前的中文稿进行再次改写.

<2013.04.17> 数学的三大支柱

“旋量代数与李群、李代数” 起始于 1990 年 5 月我撰写并于 1991 年发表在 IMechE 期刊上的三瞬心定理的向量研究³⁸, 涉及我 1993 年春的博士论文⁴、1994 年在英国科学与工程研究基金会 SERC (现在的工程与应用科学

³⁸Dai, J.S., and Kerr, D.R. (1991) Geometric analysis and optimisation of a symmetrical Watt six-bar mechanism, *J. Mech. Eng. Sci.*, **205**(4): 275-280.

基金会 EPSRC) 关于刚体姿态与灵巧度的报告³⁹、1995 年的有限旋量期刊论文⁶、2006 年的两百年理论运动学历史回顾¹⁴、2012 年的有限位移旋量算子⁴⁰。李群和李代数内容涉及我在 1993—1995 年期间的研究以及其后于 1995 年发表的文章⁶，还涉及 2011 年年底至 2013 年 4 月研究的与旋量相关的理论以及 2012 年发表的有限位移旋量的文章⁴⁰。

本书放在“现代数学基础”丛书中出版。至 2012 年底，书稿已经过数位国内著名数学专家的审读与论证。当我看到中国数学会与美国数学会会员，大连理工大学数学科学学院数学研究所应用数学系副主任侯中华教授的评论时，为之震撼。侯教授的评论高屋建瓴，从数学的三大支柱谈到代数的内在本质及其后续理论，令人印象深刻。请见他在读完我 2011 年年底的英文版著作后于当年 12 月 12 日发表的评论。

代数、几何、分析是数学的三大支柱。数学之所以能够发展到今天，是因为有了现实世界的迫切需要。然而，由于数学学科自身的特点，其发展过程可以超前于现实世界的需要。随之带来的问题就是数学学科所发展出来的理论和所取得的研究成果越来越不为其他学科的学者所熟知，更遑论加以有效地运用了。远的不说，就拿向量代数理论来说吧。学过线性代数和解析几何的人都知道，向量的引入，对于空间图形的定量表示起到了决定性的作用。向量的运算对于研究线性图形之间的关系起到了关键的作用。此外，向量代数在其他学科中也得到了有效的运用。然而，人们对这一理论的运用，却大多局限于借助于它的表现形式，而忽略了它的实质内涵。这使得它被误认为线性代数的一部分而险被“收编”。究其原因，至少有以下两条：一是因为大家只看到了它的代数表象，没有看到它的内在本质；二是因为当前的数学教学已很少讲授它的后续理论——旋量代数 (screw algebra) 和直线几何学 (line geometry)。国内有关直线几何学的介绍，大概只在苏步青的《微分几何学》(新一版) 中有所体现。

³⁹Dai, J.S., Malik, A. and Kerr, D.R. (1994) Orientation and dexterity of mechanisms and manipulators, *Report on EPSRC funded project*, University of Salford, Manchester.

⁴⁰Dai, J.S. (2012) Finite displacement screw operators with embedded Chasles' motion, *ASME J. Mech. Rob.*, 4(4): 041002.

这部专著从向量代数理论出发,循序渐进,由浅入深,详细而系统地阐述了旋量理论的数学基础.使人们看到了向量代数理论的进一步演化和应用.填补了国内此类专著的空白.同时,从直线几何学的角度阐述了射影几何学中的对偶原理以及泛复数理论中的对偶数理论的直观意义.对这些抽象的数学理论的学习大有裨益.与此同时,由于本书的内容只涉及向量代数和线性代数的基本理论,因此适合大学二年级以上的理工科学生阅读和参考.这使得阅读人群非常广泛.此外,本书对旋量理论在机构学、静力学和运动学中的应用作了系统而细致的介绍.与此同时,还对所涉及的数学处理过程给出了详细的推导过程,并在方法上有所创新.这对相关学科的学生和学者来说,无疑是一本难得的参考文献.

5. 本书写作的四个阶段

<2013.04.12>

在去往伦敦的飞机上,我全面拜读了 Karger 和 Novak⁴¹ 的 *Space Kinematics and Lie Groups* 一书,进一步对本书中的李群和李代数作了思考.这两天又对第二章至第五章中关于李群和李代数部分作了更深层次的归纳与修改.这些修改体现在我的目录中,故寄去参看.两个附件,含机构学版与数学版目录.这本专著的写作可以分为四个阶段.

(1) 英文专著初稿:英文专著在 2011 年 11 月完成初稿.在当年 10 月, Springer 邀请国际著名旋量理论与机构学专家对英文专著论证并通过;11 月,国内数位机构学专家对中文专著论证并通过;12 月,数位数学领域专家对中文专著前九章进行了论证,并建议将这九章放入“现代数学基础”丛书,以《旋量代数与李群、李代数》专著形式出版.

(2) 旋量与李群、李代数关联:从 2011 年 11 月到 2012 年 4 月,我将旋量理论与李群、李代数作了关联.至此,英文专著暂告段落.

(3) 中文专著初稿与全书的统一修改:在新生与晓菲(天津理工大学讲师)的研读与校对基础上,李瑞琴教授和我于今年 1—2 月在 Word 上对中文初稿进行了修改.

⁴¹Karger, A. and Novak, J. (1985) *Space kinematics and Lie groups* (translated by M. Basch), Gordon and Breach, New York.

(4) 全书的升华: 我于今年 2—4 月用全部力量进行改稿, 包括语言准确性的审核, 并加入了一系列定义, 提炼出一系列引理、定理与推论. 3 月, 根据新生的修改建议, 我对打印出来的全书作了两次彻底修改, 包含语言的可读性与通畅性, 并进一步修改了李群和李代数章节及其解释问题. 4 月回伦敦后, 又一次对旋量、有限位移旋量与李群、李代数的关联作了修改. 5 月准备对全书再作一次全面修改. 6—7 月回天津, 准备在编辑审读后作再次修改.

这本书有几个精华点: 一是详尽讲解了旋量代数及其运算与应用等, 可作为旋量理论入门书; 二是提出并完善了有限位移旋量理论; 三是提出并完善了旋量系理论; 四是将旋量理论与李群、李代数有机地结合起来; 五是首次将李群和李代数相关知识按照其与旋量及机构学的关联进行了有机归纳与整理, 使得本书成为一本很好的李群和李代数入门书. 希望我的学生们都好好读一读.

2011 年秋, Springer 出版社曾经聘请国际著名机构学专家对英文书稿作了详细的论证. 今天仔细阅读该论证意见时, 才无意中发现这是一篇不同寻常的论证报告, 是一篇充满高度赞誉的论证报告. 我将这一报告翻译如下:

这是第一本如此具有渐进性、全面性、彻底性, 且深邃而广博地阐述旋量理论及其应用的论著. 最打动人的部分是这本论著采用了一种新颖易懂的角度来阐述旋量理论, 并以代数的思路来教授旋量理论. 这本书是第一本基于几何与代数来全面阐述旋量理论的专著, 第一本全面阐述旋量理论在各种机构装置和机器人中的应用的论著, 包括了力学、运动学、活动度等. 这些章节(当时没有第一章的绪论以及第九章的对偶性)逻辑性极强, 可渐进地、顺其自然地将读者带到关于旋量理论的广博的知识王国. 论证者本人确实被这本书深深吸引.

论著作者是国际著名机构学专家, 在国际机构学界享有盛誉. 作者长期研究与应用旋量理论, 其广博的知识定能使这部书受到极大的关注. 该论著具有从基本概念到各种机器人应用的广度和深度, 一定会受到研究机构、高校及工业界的广大研究人员的欢迎. 该论著对于工程、计算机科学以及数学等多个领域的研究生和科研人员来说是一本极好的参考书, 一本不可多得的专著. 该论著在旋量代数、旋量系理论、李群、李代数及其在机构学与机器人

学的应用方面提供了丰富的内容. 据此种种理由, 应该认真考虑将本论著作为研究生教科书使用. 总之, 我相信这部论著非常适用于研究运动学、机构学与机器人学的研究生与研究人员.

该论证报告的原文如下:

This is the first such progressive, comprehensive and thorough book with great depth and wide scope in screw theory and its uses. The most impressive part of this book is to take a new angle and easily accessed way from which to learn screw theory and to start teaching screw theory from an algebraic point of view. The book is the first to comprehensively present the screw theory from geometry and algebra and is the first to systematically present the use of screw theory in various mechanisms, devices and robots in a wide range of topics including mechanics, kinematics, mobility and stiffness. The book concentrates on screw algebra, screw system relations, matrix theory and its application in various mechanisms and robot devices. The twelve chapters are rationally presented with excellent logic and progressive steps to introduce readers into the wealth of knowledge of screw theory. I am hugely impressed by the book.

The author is very well established, internationally renowned and highly regarded in the community. He also has a long experience in the use of screw theory. His book will definitely attract a great deal of attention.

In conclusion, I believe the book is highly suitable for postgraduate students and researchers in kinematics, robotics and mechanism research and I would have no hesitation in recommending it to many universities in their teaching. I fully believe it will be welcomed by researchers in academic institutions, universities and industrial research centers evolving in robotics due to its breadth and depth by covering basic concepts and to various robotic applications. This book is a good reference for postgraduate students and researchers in many disciplines including engineering,

computer sciences, and mathematics. The book provides a rich content in screw algebra, screw system theory, Lie groups and Lie algebras and their relations and applications in mechanisms and robots, and should be seriously considered to be as a postgraduate textbook, a monograph and a reference book.

中国科学院数学与系统科学研究院副院长高小山教授、中国科学院数学机械化重点实验室主任李洪波⁴²教授在审读 2011 年底初稿后于当年 12 月 28 日给出以下评论:

旋量理论被广泛应用于机构学、机器人学、力学以及计算几何等领域. 在 Google 上搜索 screw theory, 有四千多万条相关信息. 但是, 除了 1900 年 Ball 和 1978 年 Hunt 的旋量理论英文书外, 几乎没有一部完整的叙述旋量理论方法的著作. 旋量理论的大部分内容散见于研究论文与有关机构学的专著中, 这对于旋量理论的发展与应用十分不利.

作者基于自己二十余年的研究成果, 以及近十多年来在国内一些大学授课、讲座的教案和经验, 整理出关于旋量代数以及旋量系的理论专著, 详细而系统地阐述了旋量理论的数学基础, 介绍了作者自己的一些研究成果, 并深入讲解了旋量代数在运动学和力学中的应用. 这对于旋量代数在我国的发展与应用有重要意义.

南开大学数学科学学院邓少强教授在审读 2011 年年底初稿后于 2012 年 1 月 4 日给出以下评论:

我的感觉是, 这本专著确实是难得的宝贵的知识财富. 目前国内外出版的著作中, 除了 1900 年 Ball 和 1978 年 Hunt 的旋量理论英文书外, 几乎没有一部完整的讲述旋量理论的著作. 本书的出版将填补这一空白. 本书的特点是循序渐进、深入浅出, 从最基本的线性代数和矢量空间出发, 通过系统的推理和论述, 将复杂而高深的旋量理论展现于读者面前. 与其他介绍一些旋量理论的著作不

⁴²Li, H, Hestenes and Rockwood, A. (2001) Generalized homogeneous coordinates for computational geometry, in *Geometric computing with clifford algebra*, ed. Sommer, G., Springer-Verlag, 25-58.

同,这本专著通过推导过程,使读者容易掌握旋量理论的本质.此外,该专著既展现了数学的严谨,又充分显示了几何直观性和旋量理论的广泛应用,是难得的一部研究生教材及科研工作者的参考书.该专著的出版必将极大地推动旋量理论的发展及在这一领域的研究.

<2013.11.5>

谢谢你们(这里指张新生、高志广、康熙和马学思)的勤奋努力,你们是我的第一批读者,提出了不少看法与建议.你们从不同的层面,不同的方位,提出了很好的意见,虽然没全部被我采纳,但对我的思考起到很大的帮助,由此使我对本书的推理、逻辑、撰写深度等做了很好的思考.例如康熙提出的问题,虽然我没将原来的10.5.4节、10.5.6节与原来的10.6节合并,但是他的问题促使我做思考,尤其考虑了逻辑贯通性的问题.这样,我在保留原来10.6节的基础上,又派生出一大节.见我寄去修改后的第十章.

我觉得你们四人都很有才华,经过这段时间的翻来覆去,对本书理解得已经较好了,这也显示出你们的理论才能.我对你们的发展很满意,但是希望你们不要自满,要继续潜心钻研理论,从而取得更好、更快的发展.这就需要大家互相帮助,互相鼓励.目前,我对学生的研究没有限制,大家对本书里感兴趣的问题都可以去研究.有问题可以共同讨论,讨论后可以分别研究,而后我再作论证.希望你们充分利用研读本书的契机,写一些读书报告,从而发展与提升自己,同时要注意结合实例.你们现在做的实例太少,经验太少,虽然具有一些理论,但需要理论联系实际.你们应该经常看各种文章,不但要观察我们实验室里的各种机构与机器人,还要观察其他实验室里的机构与机器人.你们应思考如何运用本书里的理论去研究、设计、开发新机构,并充分利用我们实验室的优势,好好发展自己.我觉得有两条很重要:一是任何时候都不要自满;二是任何时候都不要泄气.博士学习是发展与训练的关键阶段,对你们以后终生工作都有益处!

康熙曾说我喜欢写邮件,其实我很忙,很多时候是没有时间写!但是,只要我认为有些话要说,需要将我的体会告诉大家,以对你们有所帮助,我就一定要写的.事实上这样一写,又使我对本书的修改推迟了一些,会被许多其他的事情压下,又不得不熬夜了.所以,希望要珍惜我每次写给你们邮

件. 我觉得一些问题是共性问题, 大家都应该知道.

<2014.01.03> 定稿

很高兴地告诉大家, 这本数学专著在初次撰写后又经历了长达一年半的反复修改与论证, 今天下午终于全部修改完毕, 即将由高等教育出版社出版发行. 数学版的这九章内容确实不好写, 这是本书的中心. 回想整整三年的写书历程, 深有感慨. 这三年分三个阶段, 并且是部分重合的. 第一阶段是从 2011 年 1 月到 2012 年 5 月, 我完成了全书的英文版写作. 第二阶段是从 2011 年秋到 2012 年 10 月, 我的在读与已毕业博士生们共同完成了英文版的中文翻译. 第三阶段是从 2012 年 8 月至今天, 一直处于修改之中. 在第三阶段的一年半时间里, 前半年是对中文译稿的修订、更正与校对. 从 2012 年 2 月起的两个月, 是提炼引理、定理与推论的过程, 也是改变一些叙述手法的过程. 接下来的两个月则是理论的提升与升华. 2012 年 5 月中旬正式交稿, 6 月通过一审并做出许多修改, 7 月在天津从新生、志广与康熙的问题中提炼著作, 9 月在天津再次从志广、康熙的问题中提炼著作, 10 月至 11 月又对论著进行了全面的修改, 12 月在二审、三审的建议下又多次反复修改, 并由刘占伟编辑不厌其烦地将我多次的修改内容誊抄到出版稿上.

本书中许多定理和公式都经历过反复的验证, 其中一部分是由孙杰 (博士生) 做的验证. 全书的定义和名词等都经过我的反复查证与修订. 对书中这些定义, 可以说是博览百家, 取其精华, 而去其糟粕. 我对这本书确实是付出了无数的心血. 书中有些地方原来是想略写的, 但越写越认真, 最后是较真儿, 这可能也是秉性所致. 今天凌晨两点半, 我发现有几章修改文字没发出去, 便又将文档发送给刘编辑, 以备他今天在编辑部做最后的誊写与修改. 我常常对国外的朋友说, 我遇见了一位脾气非常好的编辑, 任何时候都可以让我修改, 任何时候都会将我的修订放入出版稿中. 在我的硬盘中就存有不断修改而产生的诸多文件包, 如 11 月 11 日修订的文件包、11 月 22 日修订的文件包、11 月 29 日修订的文件包、12 月 13 日修订的文件包、二审后修订的文件包、三审后修订的文件包等, 这些修改都由编辑及时接收并处理. 同时, 国武对书中的许多图修改了多次, 有的图甚至修改了十来次.

可以说, 本书的撰写是一个浩大的工程, 它涉及多个数学分支、诸多理论以及各种机构研究领域. 也只有靠你们的共同帮助, 这一工程, 才能完成.

谨以上面的回顾向各位表示感谢! 另外附上定稿的数学版前言和目录以供一阅.

6. 文学、爱好及其他

<2013.05.03>

自今年1月初起,我一直在全力修改与完成书稿.在我的已毕业与在读博士生们的研读和建议下以及李瑞琴老师统一修改的基础上,我于2月独立地逐字逐句地对稿件作了全面彻底的修改与更正,同时归纳出全部引理、定理与推论,增加了许多定义、注释与论注.在此基础上,我于3月在打印装订本上再次逐字逐句地修改,4月在新的装订本上又作了第三遍文字修改与章节调整,5月开始作全面的检查与修订.

在1989—1998年的十年间,虽然我彻底地放弃了中文,专攻英文,但是在1998年后每年回国时又逐步捡起.尤其在这两三年中,中文水平基本上恢复到较好的程度.出版社与杂志社的编辑们常常认可我在编辑后的修改.我从小爱好写作,爱好文学.当全班同学高中毕业作文都是70分左右的时候,文学老师给我批了99分.在1972年的高中毕业晚会上,我编写了五幕话剧,并自编自演了相声,当时不敢称为“相声”,称为“对口剧”.1973—1975年当“知青”时,我在武汉市有20万人的公司的小报上发表了一整版的诗歌.1977年高考时,父亲极力劝说我报考理科,而我这一选择令全校老师感到吃惊.

在上海交通大学期间,我曾在校报上刊登了一篇《偌大一个校园放不下一张平静的书桌》的短文以及一篇对我本科毕业同学采访的稿件.但后来,我还是选择了与文学绝别的道路,开始沉醉于数学与逻辑的理性世界,放弃了梦幻与狂野的文学世界.然而,正如父亲力劝我考理科时所说,理科需要发表文章,而文学好可以在这方面得到充分发挥.中文写作的理念、逻辑的贯通使我这二十多年的英文写作受益匪浅.在我看来,如果中文作文写不好,英文也不会太好,当然这不是充分条件.种种缘由可以说明,语言与文字素养是经过长时间的培养与锤炼而成的,当然,世界上任何事物都不是绝对的.这也引出了一个道理:在科学研究中,哲理是统帅一切的.需要超脱,也需要 down to earth (脚踏实地).

从高考案头的“莫等闲,白了少年头,空悲切”的警句到上海交大的“学习,学习,再学习”的广播声,从 Salford 的埋头研究以致回家路上自喻为“行尸走肉”到伦敦校园繁忙中的“没时间回头看”,这么多年我就这么一直忙过来.由于较真,我便更加繁忙.从父亲不断传教的“世界上怕就怕‘认真’二字”的警句到陆元章⁴³先生下午一点一刻到寝室探讨小数点后第四位,从 David Kerr 对新名词的反复论证到 John Rees Jones 抱来牛津大词典查阅,我一直较真儿惯了.

20 世纪 90 年代我放弃了中文,全面沉湎于英文世界,爱看英文报刊的小短文以及一些富有哲理且有趣味性的评论员文章.语言的美妙使我的爱好转向英文写作. Darwin Caldwell⁴⁴与人谈到我的英文写作时称,“盖住名字,看起来与英语母语好的人的文章没两样”.同时,我在语法上可以纠正以英语为母语的人的错误;在辩论中可以据理力争,获取优势,赢得尊重.2006 年,我的并联机构旋量系理论的文章被 McGill 大学语言老学究 Paul Zsombor 称为“雅致优美,朗朗上口,在茶余饭后阅读是一种享受”.我的一些重点文章十分讲究与注重文字的使用,力求流畅贯通.我觉得好的文字给人一种美感、一种境界.2011 年,我的英文书稿拿给 Greg Chirikjian⁴⁵看时,他的第一句评语是“英文写得这么好”;给 Brian Davies⁴⁶看时,他的评语是“前言与绪论是诗歌般的 (poetic) 篇章”;给 Maria Fox⁴⁷看时,她说“喜欢这种写法,贴切,近距离,吸引读者”.新生在 2011 年开始研读时说过,我的英文书写得生动,许多词用得确切、深奥,尤其是词汇量大,变化多端,丰富多彩,这是许多英文书都没有达到的.可以说,只因十年的“放弃中文”,才有今天英文的美感;只因过去“中文的风采”,才有今天英文的丰满.

⁴³陆元章 (1921—) 系上海交通大学著名教授,是作者的本科和研究生阶段的指导老师.1946 年 2 月其在美国密歇根大学获得机械工程硕士学位,1956—1976 年在机械科学研究总院 (英文简称 CAM) 工作,1977 年起任上海交通大学教授,1987—1998 年任中国机械工程学会流体传动与控制分会第一届委员会主任委员.

⁴⁴Darwin Caldwell 是欧洲机器人尤其是人形机器人的领军人物,1989—2004 年在 Salford 大学任教,2005 年至今为意大利理工大学先进机器人中心主任.

⁴⁵Greg Chirikjian 为著名国际期刊 *Robotica* 的总编,约翰·霍普金斯大学的数学科学、计算机科学与机构学教授.

⁴⁶Brian Davies 为伦敦帝国理工大学教授,英国皇家工程院院士,于 1988 年发明了世界第一台临床手术机器人.

⁴⁷Maria Fox 为伦敦国王学院计算机系教授.

今年初我同新生、志广、学思以及康熙一同在天津连续待了四个月。新生从我对写书与理论问题的投入感受到这是我的真正爱好,说希望以后也像我一样,做自己爱好的事情。新生是对的!正如我2011年英文版书稿⁴⁸的前言所说,我是沉湎于研究的乐趣,陶醉于知识的海洋。回到我写书的案板,是我最幸福的时刻。但是这种时候不长久,常常要干自己不喜欢的事。这就是生活,这就是工作。不过,我现在已经将研究、工作与日常生活糅合到一块,融为一体。当然,我更喜欢没有任何打搅,沉心于研究与写作。归结起来说,我是爱研究、爱写作的。

从2011年著述书稿起,我就对各种名词术语严格地进行核对。从去年起,为了校对中文书稿的名词术语,我翻阅了无数的中文书与英文原版书(包括数学书),并查看了许多网站与网页。我一般不寻常规,不随便苟同。前些年我就对我的学生们推荐唐代文学家与哲学家韩愈所写的《进学解》中的名句:“行成于思毁于随”。要达到这种境界,就需要有对“业勤于勤荒于嬉”的深刻理解。我将顺序倒了一下,但这就给出了一种逻辑关联关系。记得自2000年起,我就对学生们提出“三个P”的要求,即 proficient (精通)、professional (专业)、perfect (完美)。记得2003年与一位访问学者在伦敦国王学院共同撰写他在 IMechE 期刊上的第一篇传动系统数学模型论文时,我提出不能参照存在问题的常规,要重新建立坐标系,要做到规范化,与国际接轨。我觉得任何研究都要与国际学术界接轨,与数学界接轨,因此我这本书中的许多名词术语都经过了严格审阅与反复论证。尤其是这十几年,我很注重同国内专家学者交流,对这些中文名词术语的理解更上升了一个层次。在最近这几个月中,除了我本人广泛查询以外,我已毕业的学生们也经常在网上共同进行讨论,提出了一些很好的建议,尤其是大家经常引经据典,多方考证,将一个问题探讨到底。同时,我也与廖启征教授、邓少强教授、赵景山教授等通过邮件与电话对书中一些具体表述进行了讨论与论证。

前几天,我将书稿送予南开大学专攻李群与微分几何的邓少强教授,他说“我又浏览了一遍,觉得您的著作已经很完美了,因此提不出什么修改建议了。再次祝贺您的著作即将出版!”。廖启征教授说“这本书量非常大,几乎涵盖了各个方面”。

⁴⁸Dai, J.S.(2014)*Screw algebra and kinematic approaches of mechanisms and robotics*, Springer, London.

今天在外面有事等了两小时, 顺便写了这一随笔, 与大家共享.

经邹慧君教授推荐, 高等教育出版社于 2010 年与我取得联系, 随后产生了撰写本书的念头. 我的英文专著的写作是从 2011 年 1 月开始的, 到 2012 年初基本完稿, 而中文数学版和机械版专著⁴⁹的写作是在 2011 年下半年至 2012 年下半年进行的. 书稿的全面修订、扩充与升华始于 2012 年下半年, 到 2013 年 7 月基本完成, 9—10 月又进行了一轮修改与验证, 11—12 月作了最后一轮的修改与校正. 这一扩充与升华将用来帮助英文专著的全面修改. 这一实践使我认识到, 两种语言的写作可以在很大程度上加深对问题的认识和理解, 使得论著的阐述更为明晰. 常常在一种语言中不容易发现的问题, 在另一种语言中可以充分彰显出来. 这样就可以对该问题作充分且详细的阐述, 使得著作更为系统、详尽与完整. 这种写作的反复以及两种语言的相互论证推迟了英文专著的出版时间. 在中文书稿出版后, 将对英文稿作全面的修改, 拟于 2014 年年底面世.

戴建生

2013 年冬于北洋园

⁴⁹戴建生 (2014) 机构学与机器人学的几何基础与旋量代数, 高等教育出版社, 北京. 英文引用为“Dai, J.S. (2014) *Geometrical foundations and screw algebra for mechanisms and robotics*, Higher Education Press, Beijing.”