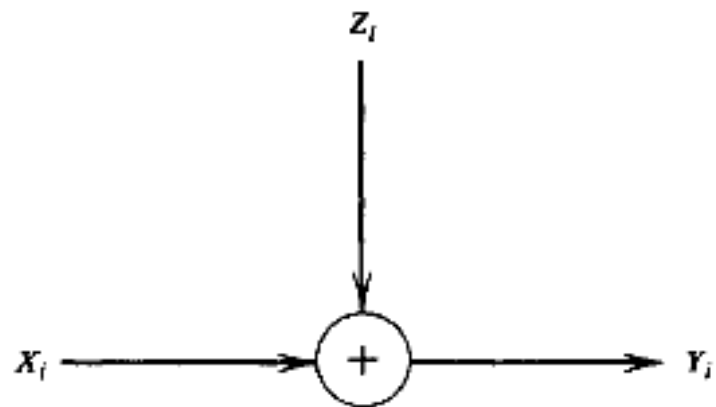
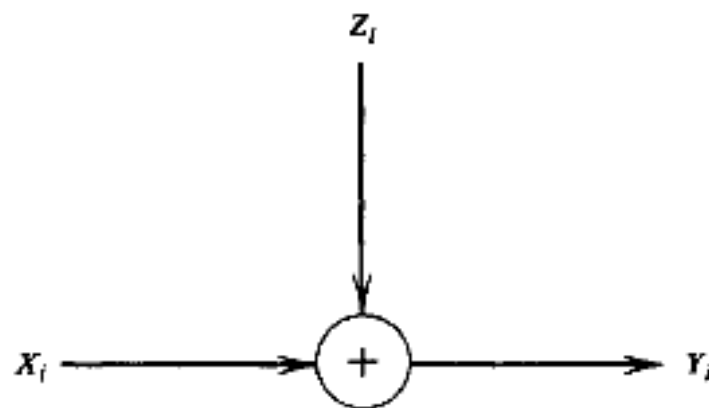


第9章 高斯信道



- 高斯信道: $Y_i = X_i + Z_i, \quad Z_i \sim \mathcal{N}(0, N)$
 - ✓ 离散时间信道
 - ✓ 噪声和信号相互独立

第9章 高斯信道



➤ 高斯信道: $Y_i = X_i + Z_i, \quad Z_i \sim \mathcal{N}(0, N)$

✓ 若噪声方差为0或对输入信号没有限制, 信道容量为无穷。

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq P$$

高斯信道的例子

$$Y_i = X_i + Z_i, \quad Z_i \sim \mathcal{N}(0, N)$$

➤ **例** 每次使用信道传输**1**比特的信息，

✓ 发送方： $+\sqrt{P}$ $-\sqrt{P}$

✓ 接收方： $Y > 0 \rightarrow +\sqrt{P}$

✓ 误差概率： $P_e = 1 - \Phi(\sqrt{P/N})$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

✓ 转化成离散二元对称信道

✓ 离散信道的特点：可纠错，但有量化损失

高斯信道的信道容量

- **定义** 功率限制为 P 的高斯信道的信道容量定义为:

$$C = \max_{f(x): EX^2 \leq P} I(X; Y)$$

- 高斯信道的信道容量为:

$$C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{N} \right)$$

最大值在 $X \sim \mathcal{N}(0, P)$ 时达到。

高斯信道的 (M, n) 码

➤ 功率限制为 P 的高斯信道的 (M, n) 码:

1. 下标集 $\{1, 2, \dots, M\}$

2. 编码函数 $X^n : \{1, 2, \dots, M\} \rightarrow \mathcal{X}^n$ 生成码字 $x^n(1), x^n(2), \dots, x^n(M)$ ，且满足功率限制 P ,

$$\sum_{i=1}^n x_i^2(w) \leq nP, \quad w = 1, 2, \dots, M$$

3. 译码函数 $g : \mathcal{Y}^n \rightarrow \{1, 2, \dots, M\}$

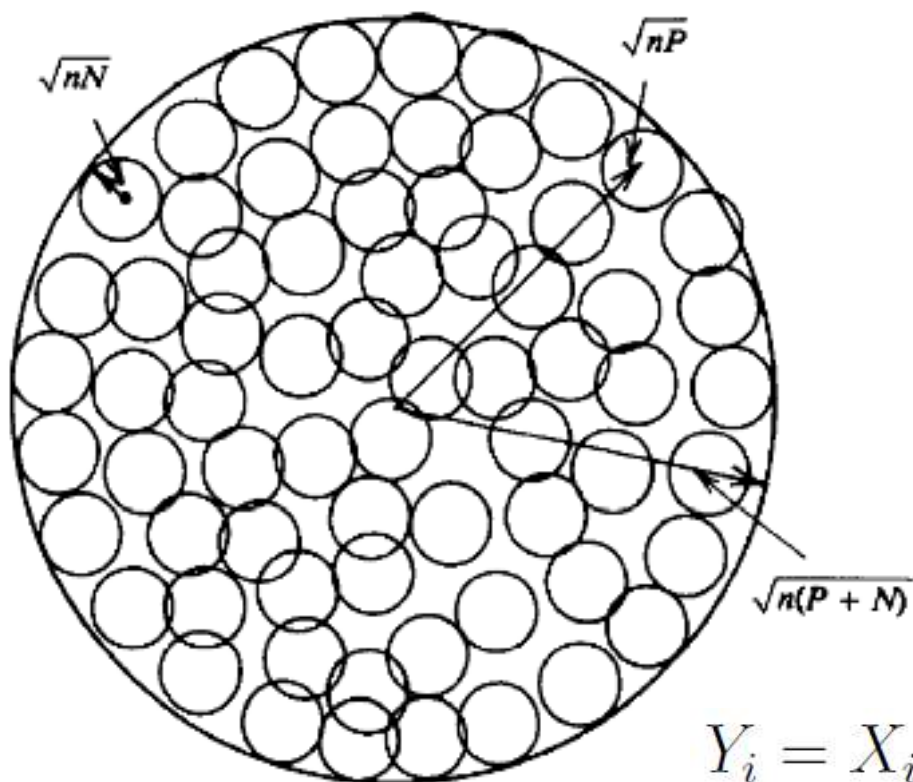
4. 平均误差概率: $P_e^{(n)} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \lambda_i$

高斯信道的信道编码定理

- **定义** 对于一个功率限制为 P 的高斯信道，如果存在满足功率限制的一个 $(2^{nR}, n)$ 码序列，使得最大误差 $\lambda^{(n)} \rightarrow 0$ ，则称码率 R 关于该功率限制为 P 的高斯信道是可达的。
- 高斯信道的信道容量即是所有可达码率的上确界。

$$R \rightarrow C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{N} \right)$$

高斯信道信道编码定理的证明



$$Y_i = X_i + Z_i, \quad Z_i \sim \mathcal{N}(0, N)$$

高斯信道信道编码定理的证明

1. 码簿的生成：令 $X_i(w)$ 为 i.i.d. $\sim \mathcal{N}(0, P - \epsilon)$ ，形成码字 $X^n(1), X^n(2), \dots, X^n(2^{nR}) \in \mathcal{R}^n$
2. 编码：码簿生成之后，将其告知发送者和接收者。对消息下标 w ，发送器发送 $X^n(w)$
3. 译码：联合典型译码
 - ✓ $(X^n(\hat{w}), Y^n)$ 是联合典型的
 - ✓ 不存在其他的下标 $w' \neq \hat{w}$ 满足 $(X^n(w'), Y^n) \in A_\epsilon^{(n)}$
4. 误差概率：不失一般性，假设码字 **1** 被发送

高斯信道信道编码定理的逆定理

- **定理** 对于功率限制为 P 的高斯信道中的一个 $(2^{nR}, n)$ 序列，当 $P_e^{(n)} \rightarrow 0$ 时，则

$$R \leq C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{N} \right)$$

- $W \rightarrow X^n(W) \rightarrow Y^n \rightarrow \hat{W}$

带宽有限信道

➤ 带白噪声的带宽有限信道

✓ 时间连续信道

$$Y(t) = (X(t) + Z(t)) * h(t)$$

- 采样定理：最大频率为 **W** 的信号可由间隔为 **$1/2W$** 秒的采样序列完全决定。
- 考虑信号：绝大部分能量集中在带宽 **W** 内，且在一个有限时间区间 **T** 内。
- 该信号可以视作一个 **$2TW$** 维的向量。

带宽有限信道的信道容量

➤ 高斯白噪声：功率谱密度 $N_0/2$ 瓦特/赫兹，带宽 W 赫兹。

✓ $2TW$ 个采样，每个样本方差 $N_0/2$

➤ 信号：功率 P

✓ $2TW$ 个采样，每个样本功率 $P/2W$

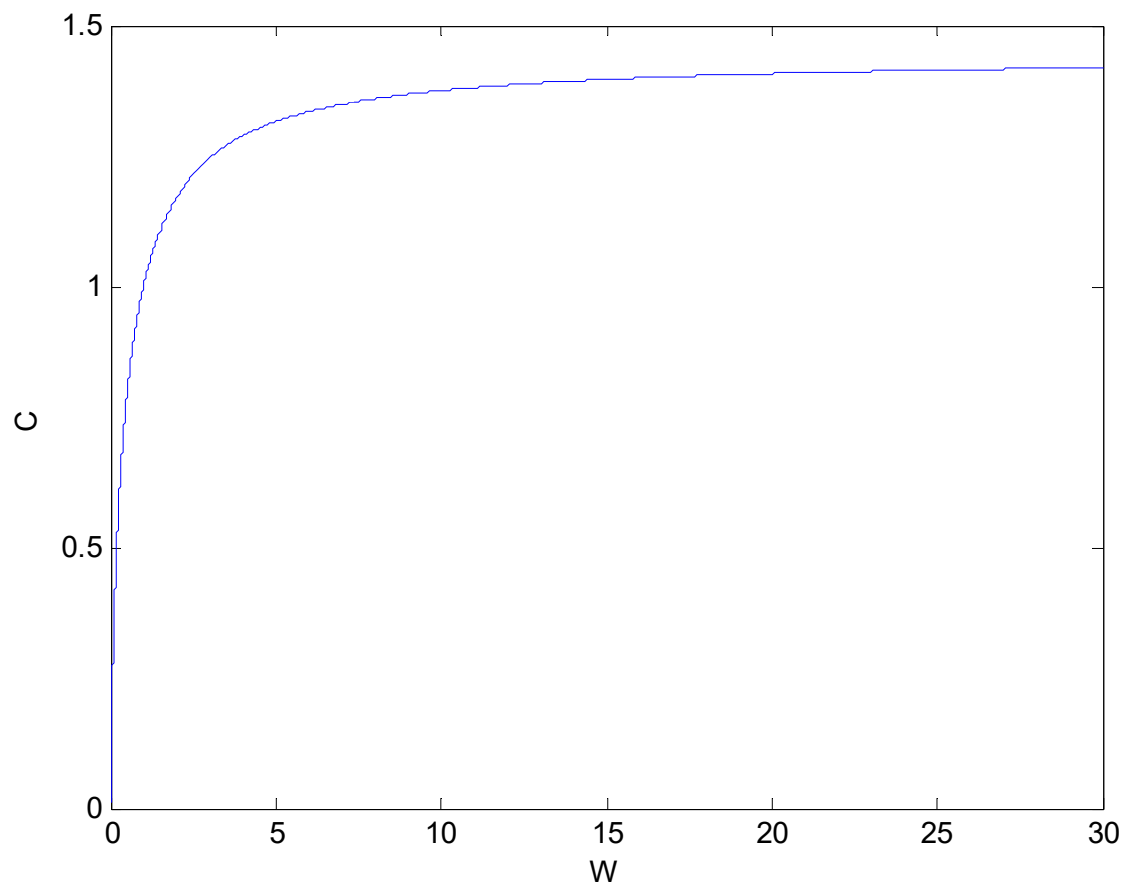
➤ 信道容量：

$$C = W \log \left(1 + \frac{P}{N_0 W} \right) \text{ 比特/秒}$$

➤ 无限带宽信道的信道容量： $C = \frac{P}{N_0} \log_2 e$ 比特/秒

信道容量和带宽的关系

$$C = W \log \left(1 + \frac{P}{N_0 W} \right) \text{ 比特/秒}$$



带宽有限信道的信道容量

- 香农公式的物理意义为：当信道容量一定时，增大信道的带宽，可以降低对信噪功率比的要求；反之，当信道频带较窄时，可以通过提高信噪功率比来补偿。香农公式是在噪声信道中进行可靠通信的信息传输率的上限值。

$$C = W \log \left(1 + \frac{P}{N_0 W} \right) \text{ 比特/秒}$$

带宽有限信道的例子

➤ 例 电话线传输

- ✓ 带宽：3300赫兹
- ✓ 信噪比 (P/N_0W) : 33dB
- ✓ 信道容量：36000 比特/秒
- ✓ 实际传输率： 33600 比特/秒
- ✓ 发展：1967 4.8k bps, 1971 9.6k bps, 1980 14.4k bps, 1985 19.2k bps

并联高斯信道

- 独立的并联信道:

$$Y_j = X_j + Z_j, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

$$Z_j \sim \mathcal{N}(0, N_j)$$

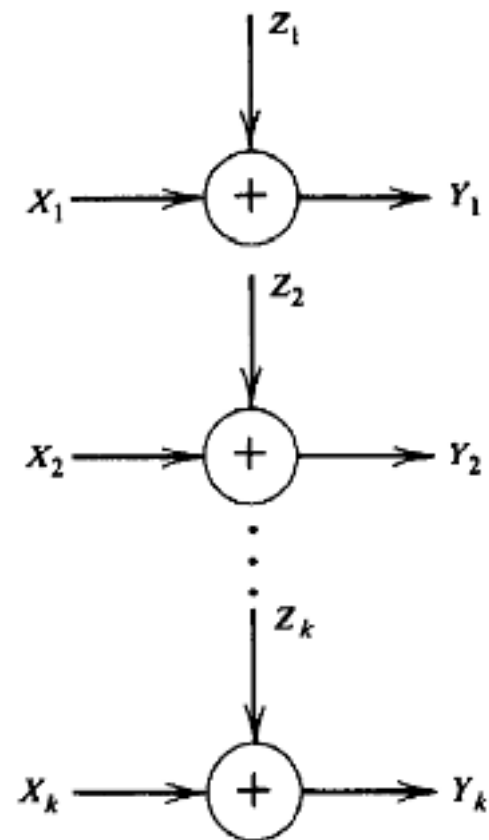
- 总功率的限制:

$$E \sum_{j=1}^k X_j^2 \leq P$$

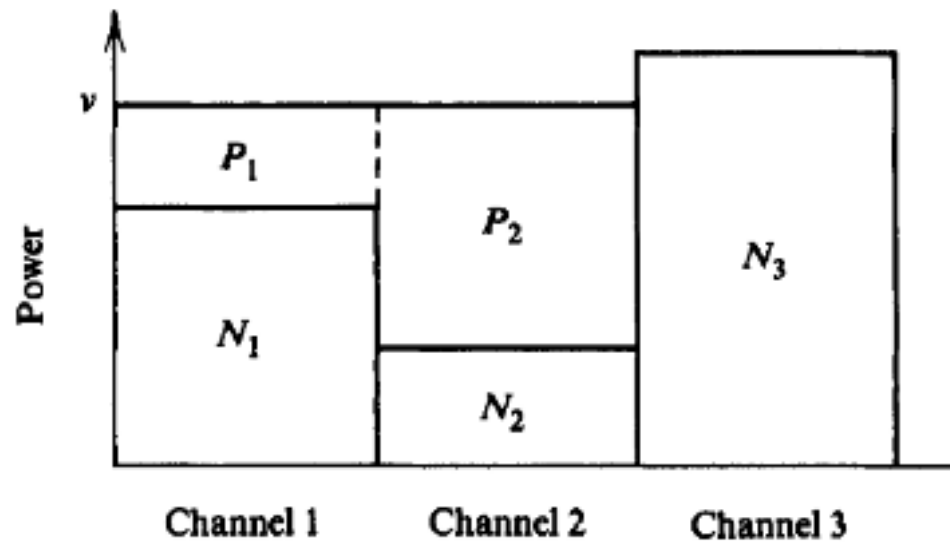
- 总信道容量:

$$C = \max I(X_1, X_2, \dots, X_k; Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$$

- 目标: 功率分配使总容量最大



注水法 (Water Filling)



$$P_i = (v - N_i)^+$$
$$\sum (v - N_i)^+ = P$$

高斯彩色噪声信道

- 噪声互相相关：
 - ✓ 相关并联信道
 - ✓ 有记忆高斯噪声信道
- 功率限制：

$$\frac{1}{n} \sum_i EX_i^2 \leq P$$

$$\frac{1}{n} \text{tr}(K_X) \leq P$$

高斯彩色噪声信道的信道容量

➤ $C = \max I(X_1, X_2, \dots, X_k; Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$

➤ $I(X^n; Y^n) = \frac{1}{2} \log \frac{|K_X + K_Z|}{|K_Z|}$

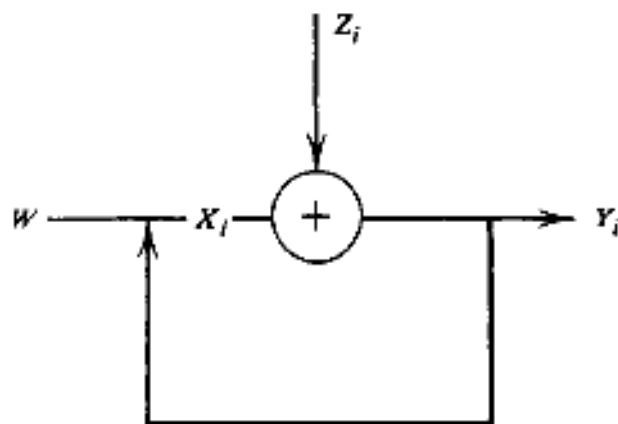
➤ 对角化 $K_Z = Q\Lambda Q^t$

➤ $A = Q^t K_X Q$

➤ 阿达玛 (Hadamard) 不等式: $|K| \leq \prod_{i=1}^n K_{ii}$

➤ 互信息最大化: $A_{ii} = (v - \lambda_i)^+$

带反馈的高斯信道



- 无记忆高斯信道：反馈不增加信道容量
- 有记忆高斯信道： $Y_i = X_i + Z_i, Z_i \sim \mathcal{N}(0, K_Z)$
- 编码： $X_i(W, Y^{i-1})$

带反馈高斯信道的信道容量

➤ 无反馈:

$$C_n = \max_{\frac{1}{n}\text{tr}(K_X) \leq P} \frac{1}{2n} \log \frac{|K_X + K_Z|}{|K_Z|}$$

➤ 有反馈:

$$C_{n,FB} = \max_{\frac{1}{n}\text{tr}(K_X) \leq P} \frac{1}{2n} \log \frac{|K_{X+Z}|}{|K_Z|}$$

➤ **定理** 对于带反馈的高斯信道, 使得 $P_e^{(n)} \rightarrow 0$ 的任意 $(2^{nR}, n)$ 码的码率满足

$$R_n \leq C_{n,FB} + \epsilon_n$$

反馈对信道容量的影响

- $K_{X+Z} + K_{X-Z} = 2K_X + 2K_Z$
- 对于非负定矩阵A, B, 若A-B是非负定的, 则 $|A| \geq |B|$
- $|K_{X+Z}| \leq 2^n |K_X + K_Z|$
- 对于任意两个非负定矩阵A, B, 以及 $0 \leq \lambda \leq 1$

$$|\lambda A + (1 - \lambda)B| \geq |A|^\lambda |B|^{1-\lambda}$$

反馈对信道容量的影响

➤ 因果关系: $f(x^n, z^n) = f(z^n) \prod_{i=1}^n f(x_i | x^{i-1}, z^{i-1})$

➤ 若 X^n 和 Z^n 是因果关系, 则

$$h(X^n - Z^n) \geq h(Z^n)$$

$$|K_{X-Z}| \geq |K_Z|$$

➤ **定理** $C_{n,FB} \leq C_n + \frac{1}{2}$ 比特/传输

➤ **定理** $C_{n,FB} \leq 2C_n$