

第六讲 IIR DF

无限长单位冲激响应

数字滤波器的设计

数字滤波器：

是指输入输出均为数字信号，通过一定运算关系改变输入信号所含频率成分的相对比例或者滤除某些频率成分的器件。

优点：

高精度、稳定、体积小、重量轻、灵活，不要求阻抗匹配，可实现特殊滤波功能

学习目标

- 理解数字滤波器的基本概念
- 了解最小相位延时系统
- 理解全通系统的特点及应用
- 掌握冲激响应不变法
- 掌握双线性变换法
- 掌握Butterworth、Chebyshev低通滤波器的特点
- 了解利用模拟滤波器设计IIR数字滤波器的设计过程
- 了解利用频带变换法设计各种类型数字滤波器的方法

一、数字滤波器的基本概念

1、数字滤波器的分类

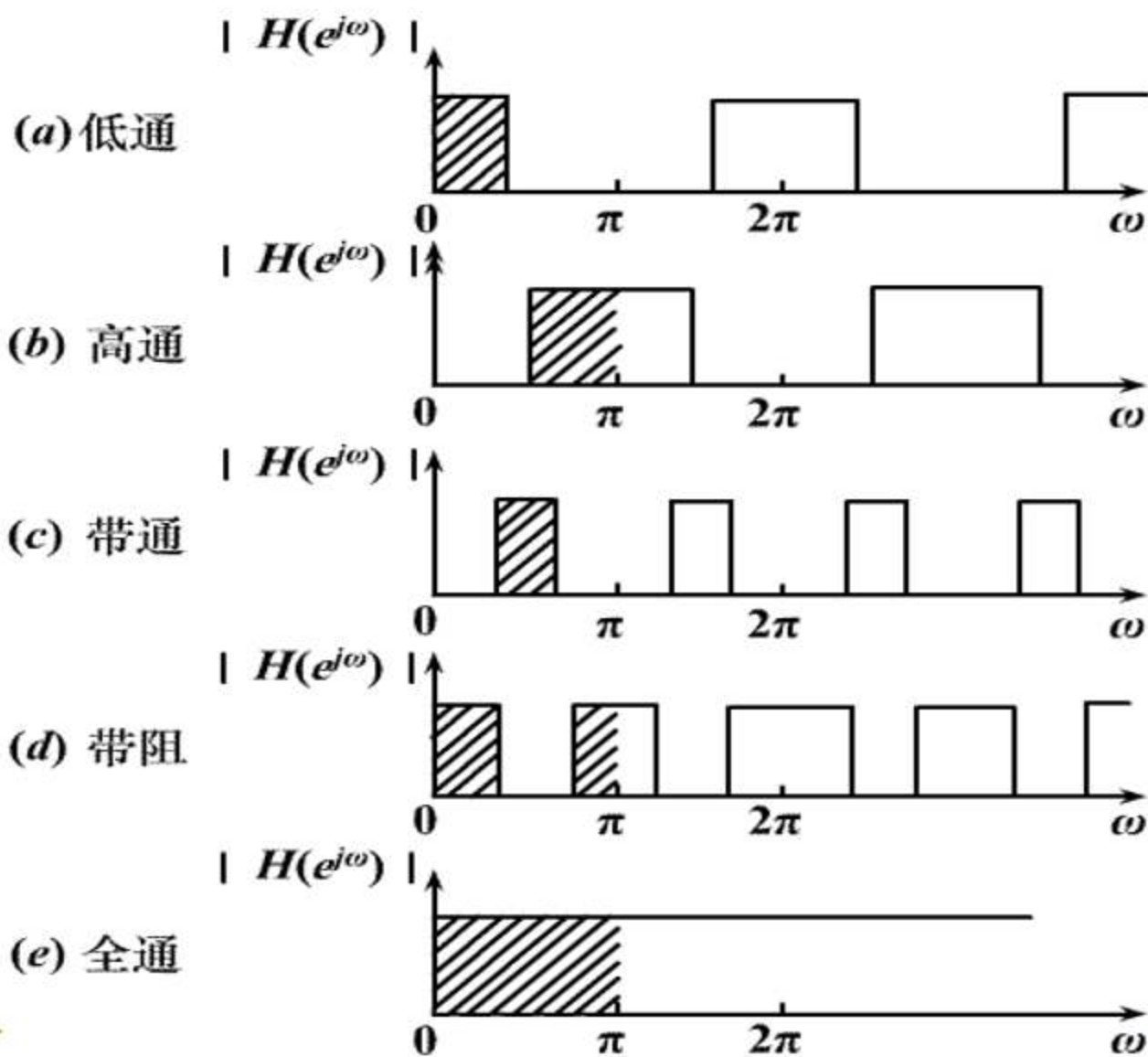
经典滤波器： 选频滤波器

现代滤波器： 维纳滤波器

卡尔曼滤波器

自适应滤波器等

按功能分：低通、高通、带通、带阻、全通滤波器



其特点为:

- (1) 频率变量以数字频率 ω 表示, $\omega = \Omega T$, Ω 为模拟角频率, T 为抽样时间间隔;
- (2) 以数字抽样频率 $\omega_s = 2\pi f_s \times T = 2\pi$ 为周期;
- (3) 频率特性只限于 $|\omega| \leq \omega_s/2 = \pi$ 范围, 这是因为依取样定理, 实际频率特性只能为抽样频率的一半。

按实现的网络结构或单位抽样响应分：

IIR滤波器（ N 阶）

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

FIR滤波器（ $N-1$ 阶）

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

2、数字滤波器的设计过程

- 按设计任务，确定滤波器性能要求，制定技术指标
- 用一个因果稳定的离散LSI系统的系统函数 $H(z)$ 逼近此性能指标
- 利用有限精度算法实现此系统函数：如运算结构、字长的选择等
- 实际技术实现：软件法、硬件法或DSP芯片法

3、数字滤波器的技术要求

- 选频滤波器的频率响应:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\beta(j\omega)}$$

$|H(e^{j\omega})|$ 为幅频特性：表示信号通过该滤波器后各频率成分的衰减情况

$\beta(j\omega)$ 为相频特性：反映各频率成分通过滤波器后在时间上的延时情况

理想滤波器不可实现，只能以实际滤波器逼近

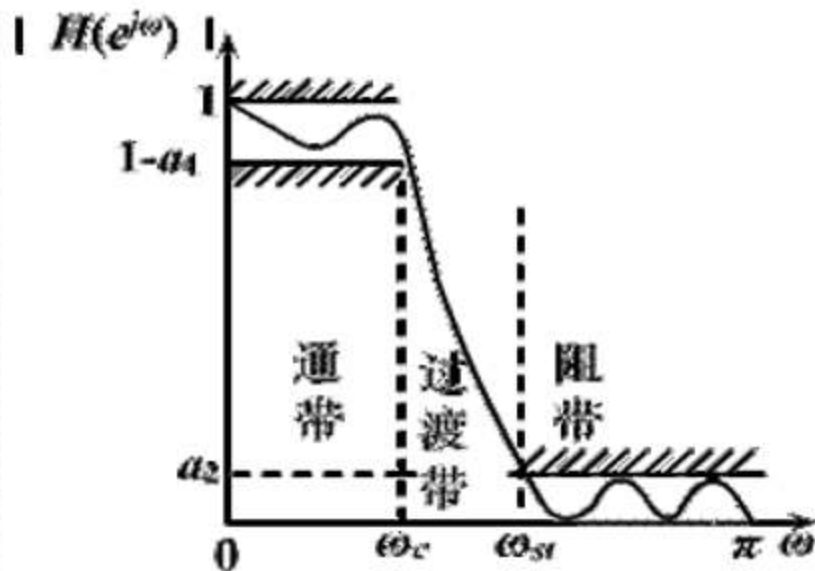
- 通带: $|\omega| \leq \omega_c$ $1 - \alpha_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1$
- 阻带: $\omega_{st} \leq |\omega| \leq \pi$ $|H(e^{j\omega})| \leq \alpha_2$
- 过渡带: $\omega_c \leq |\omega| \leq \omega_{st}$

ω_c : 通带截止频率

ω_{st} : 阻带截止频率

α_1 : 通带容限

α_2 : 阻带容限



通带最大衰减： δ_1

$$\delta_1 = 20\lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_c})|} = -20\lg |H(e^{j\omega_c})| = -20\lg(1 - \alpha_1)$$

阻带最小衰减： δ_2

$$\delta_2 = 20\lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_{st}})|} = -20\lg |H(e^{j\omega_{st}})| = -20\lg \alpha_2$$

其中： $|H(e^{j0})| = 1$

当 $|H(e^{j\omega_c})| = \sqrt{2}/2 = 0.707$ 时， $\delta_1 = 3dB$

称 ω_c 为3dB通带截止频率

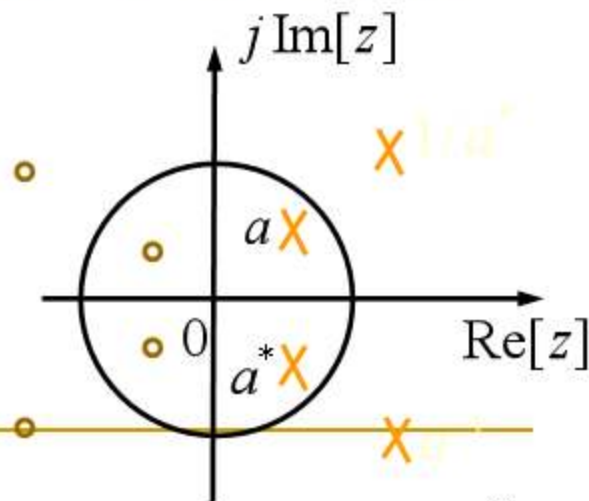
4、表征滤波器频率响应的特征参量

■ 幅度平方响应

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})|^2 &= H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) \\ &= H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}) = H(z)H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}} \end{aligned}$$

$H(z)H(z^{-1})$ 的极点既是共轭的，又是以单位圆成镜像对称的

$H(z)$ 的极点：单位圆内的极点



■ 相位响应

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\beta(e^{j\omega})} = \operatorname{Re}[H(e^{j\omega})] + j\operatorname{Im}[H(e^{j\omega})]$$

$$\text{相位响应: } \beta(e^{j\omega}) = \arctan \left\{ \frac{\operatorname{Im}[H(e^{j\omega})]}{\operatorname{Re}[H(e^{j\omega})]} \right\}$$

$$H^*(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\beta(e^{j\omega})} \quad \frac{H(e^{j\omega})}{H^*(e^{j\omega})} = e^{2j\beta(e^{j\omega})}$$

$$\beta(e^{j\omega}) = \frac{1}{2j} \ln \left[\frac{H(e^{j\omega})}{H^*(e^{j\omega})} \right] = \frac{1}{2j} \ln \left[\frac{H(z)}{H(z^{-1})} \right]_{z=e^{j\omega}}$$

↓
 $H(e^{-j\omega})$

■ 群延迟响应

相位对角频率的导数的负值

$$\begin{aligned}\tau(e^{j\omega}) &= -\frac{d\beta(e^{j\omega})}{d\omega} \\ &= -\operatorname{Re} \left[z \frac{dH(z)}{dz} \frac{1}{H(z)} \right]_{z=e^{j\omega}}\end{aligned}$$

若滤波器通带内 $\tau(e^{j\omega}) = \text{常数}$ ，则为线性相位滤波器

5、IIR数字滤波器的设计方法

用一因果稳定的离散LSI系统逼近给定的性能要求：

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

即为求滤波器的各系数： a_k, b_k

s 平面逼近：模拟滤波器

z 平面逼近：数字滤波器

- 先设计模拟滤波器，再转换为数字滤波器
- 计算机辅助设计法

二、最小与最大相位延时系统、最小与最大相位超前系统

LSI系统的系统函数：

$$H(z) = K \frac{\prod_{m=1}^M (1 - c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} = K z^{(N-M)} \frac{\prod_{m=1}^M (z - c_m)}{\prod_{k=1}^N (z - d_k)}$$

频率响应：

$$H(e^{j\omega}) = K e^{j(N-M)\omega} \frac{\prod_{m=1}^M (e^{j\omega} - c_m)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_k)} = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg[H(e^{j\omega})]}$$

■ 模:

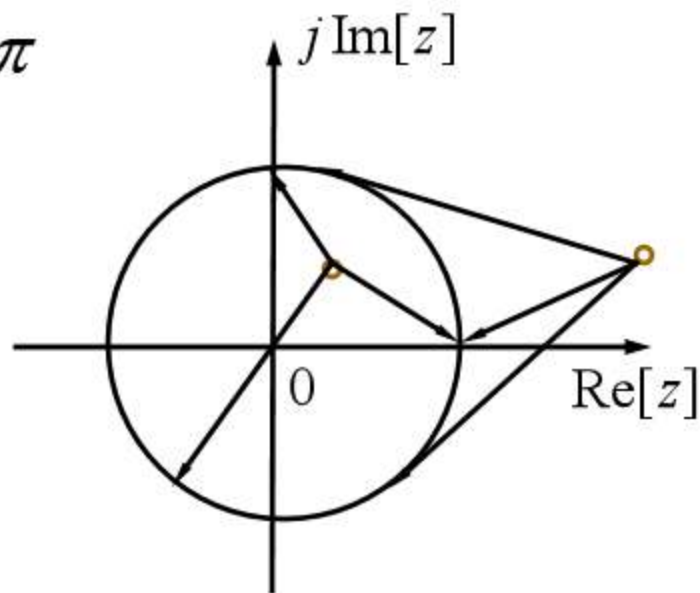
$$\left| \frac{H(e^{j\omega})}{K} \right| = \frac{\prod_{m=1}^M |e^{j\omega} - c_m|}{\prod_{k=1}^N |e^{j\omega} - d_k|} = \frac{\text{各零矢量模的连乘积}}{\text{各极矢量模的连乘积}}$$

■ 相角:

$$\arg \left[\frac{H(e^{j\omega})}{K} \right] = \sum_{m=1}^M \arg[e^{j\omega} - c_m] - \sum_{k=1}^N \arg[e^{j\omega} - d_k] + (N - M)\omega$$

$$\arg \left[\frac{H(e^{j\omega})}{K} \right] = \sum_{m=1}^M \arg[e^{j\omega} - c_m] - \sum_{k=1}^N \arg[e^{j\omega} - d_k] + (N - M)\omega$$

当 $\omega = 0 \rightarrow 2\pi$, $\Delta\omega = 2\pi$



位于单位圆内的零/极矢量角度变化为 2π

位于单位圆外的零/极矢量角度变化为 0

$$\arg \left[\frac{H(e^{j\omega})}{K} \right] = \sum_{m=1}^M \arg[e^{j\omega} - c_m] - \sum_{k=1}^N \arg[e^{j\omega} - d_k] + (N - M)\omega$$

令： 单位圆内零点数为 m_i

$$m_i + m_o = M$$

单位圆外的零点数为 m_o

单位圆内的极点数为 p_i

$$p_i + p_o = N$$

单位圆外的极点数为 p_o

则：

$$\Delta \arg \left[\frac{H(e^{j\omega})}{K} \right]_{\Delta \omega = 2\pi} = 2\pi(N - M) + 2\pi m_i - 2\pi p_i$$

- 因果稳定系统 $|z| > r, r < 1$ $n < 0$ 时, $h(n) = 0$

全部极点在单位圆内: $p_o = 0, p_i = N$

$$\begin{aligned}\Delta \arg \left[\frac{H(e^{j\omega})}{K} \right]_{\Delta \omega = 2\pi} &= 2\pi m_i - 2\pi p_i + 2\pi(N - M) \\ &= 2\pi m_i - 2\pi M = -2\pi m_o \leq 0\end{aligned}$$

相位延时系统

- 1) 全部零点在单位圆内: $m_i = M, m_o = 0$

$\Delta \arg[] = 0$ 为最小相位延时系统

- 2) 全部零点在单位圆外: $m_i = 0, m_o = M$

$\Delta \arg[] = -2\pi M$ 为最大相位延时系统

- 逆因果稳定系统 $|z| < r, r > 1$ $n > 0$ 时, $h(n) = 0$

全部极点在单位圆外: $p_o = N, p_i = 0$

$$\begin{aligned}\Delta \arg \left[\frac{H(e^{j\omega})}{K} \right]_{\Delta \omega = 2\pi} &= 2\pi m_i - 2\pi p_i + 2\pi(N - M) \\ &= 2\pi m_i + 2\pi(N - M) \geq 0\end{aligned}$$

相位超前系统

- 1) 全部零点在单位圆内: $m_i = M, m_o = 0$

$\Delta \arg[] = 2\pi N$ 为最大相位超前系统

- 2) 全部零点在单位圆外: $m_i = 0, m_o = M$

$\Delta \arg[] = 2\pi(N - M)$ 为最小相位超前系统

◆ 最小相位延时系统的性质

- 1) 在 $|H(e^{j\omega})|$ 相同的系统中，具有最小的相位滞后
- 2) 最小相位延时系统的能量集中在 $n=0$ 附近，而总能量相同

$$\sum_{n=0}^m |h(n)|^2 < \sum_{n=0}^m |h_{\min}(n)|^2 \quad m < N-1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} |h(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |h_{\min}(n)|^2$$

- 3) 最小相位序列的 $h_{\min}(0)$ 最大： $h_{\min}(0) > h(0)$
- 4) 在 $|H(e^{j\omega})|$ 相同的系统中， $h_{\min}(n)$ 唯一
- 5) 级联一个全通系统，可以将一最小相位系统转变成一相同幅度响应的非最小相位延时系统

三、全通系统

对所有 ω ，满足： $|H_{ap}(e^{j\omega})|=1$

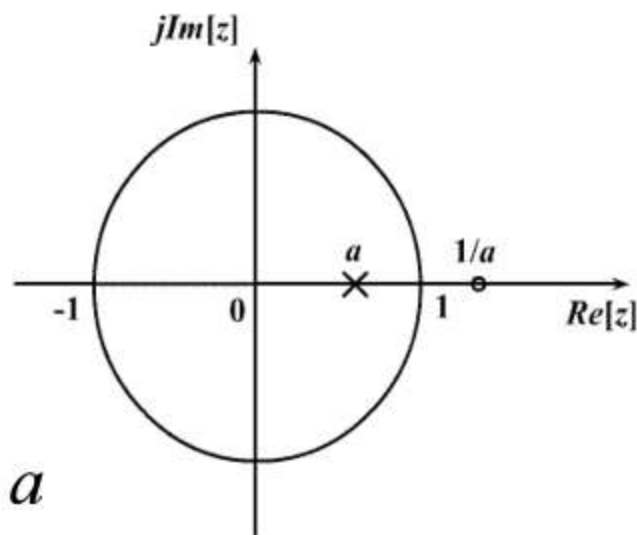
称该系统为全通系统

■ 一阶全通系统:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \quad a \text{ 为实数}$$

$$0 < |a| < 1$$

极点: $z = a$ 零点: $z = 1/a$

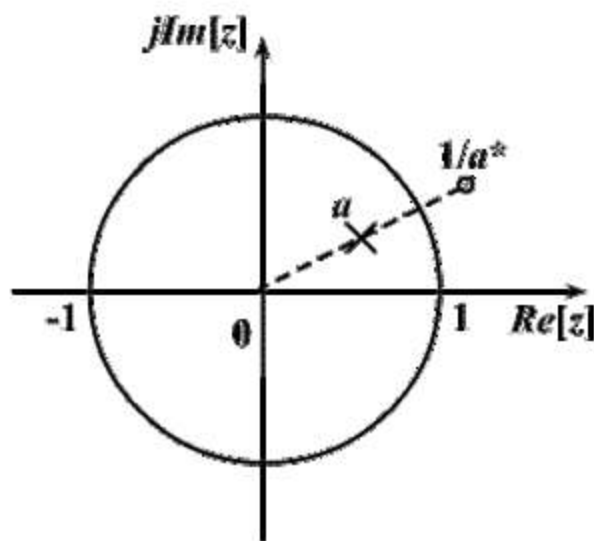


a 为实数, $0 < a < 1$ 时, 一阶全通系统的零点-极点位置

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \quad a \text{ 为复数}$$

$$0 < |a| < 1$$

极点: $z = a$ 零点: $z = 1/a^*$



a 为复数, $0 < |a| < 1$ 时, 一阶全通节的零点-极点位置

零极点以单位圆为镜像对称

■ 实系数二阶全通系统

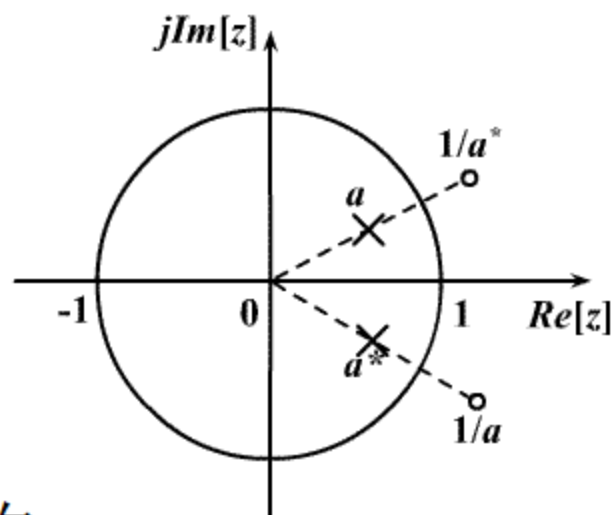
$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - a}{1 - a^*z^{-1}} \quad |a| < 1$$

极点： $z = a, a^*$

零点： $z = 1/a^*, 1/a$

两个零点（极点）共轭对称

零点与极点以单位圆为镜像对称



二阶全通系统的零点-极点位置

■ N 阶数字全通滤波器

$$\begin{aligned} H(z) &= \pm \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}} \\ &= \pm \frac{d_N + d_{N-1}z^{-1} + \dots + d_1z^{-(N-1)} + z^{-N}}{1 + d_1z^{-1} + \dots + d_{N-1}z^{-(N-1)} + d_Nz^{-N}} \\ &= \pm \frac{z^{-N}D(z^{-1})}{D(z)} \end{aligned}$$

极点: $D(z)$ 的根 $z_p = re^{\pm j\omega} \quad r < 1$

零点: $D(z^{-1})$ 的根 $z_o = \frac{1}{r}e^{\pm j\omega} \quad r < 1$

■ 全通系统的应用

- 1) 任一因果稳定系统 $H(z)$ 都可以表示成全通系统 $H_{ap}(z)$ 和最小相位系统 $H_{min}(z)$ 的级联

$$H(z) = H_{min}(z) \cdot H_{ap}(z)$$

令： $H(z) = H_1(z)(z^{-1} - z_0)(z^{-1} - z_0^*)$

其中： $H_1(z)$ 为最小相位延时系统，

$1/z_0, 1/z_0^*, |z_0| < 1$ 为单位圆外的一对共轭零点

$$\begin{aligned}
 H(z) &= H_1(z) (z^{-1} - z_0) (z^{-1} - z_0^*) \frac{1 - z_0^* z^{-1}}{1 - z_0^* z^{-1}} \cdot \frac{1 - z_0 z^{-1}}{1 - z_0 z^{-1}} \\
 &= H_1(z) (1 - z_0^* z^{-1}) (1 - z_0 z^{-1}) \frac{z^{-1} - z_0}{1 - z_0^* z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - z_0^*}{1 - z_0 z^{-1}} \\
 &= H_{\min}(z) \cdot H_{ap}(z)
 \end{aligned}$$

把 $H(z)$ 单位圆外的零点： $z = 1/z_0, 1/z_0^*, |z_0| < 1$

映射到单位圆内的镜像位置： $z = z_0, z_0^*$

构成 $H_{\min}(z)$ 的零点。

而幅度响应不变：

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})| \cdot |H_{ap}(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$$

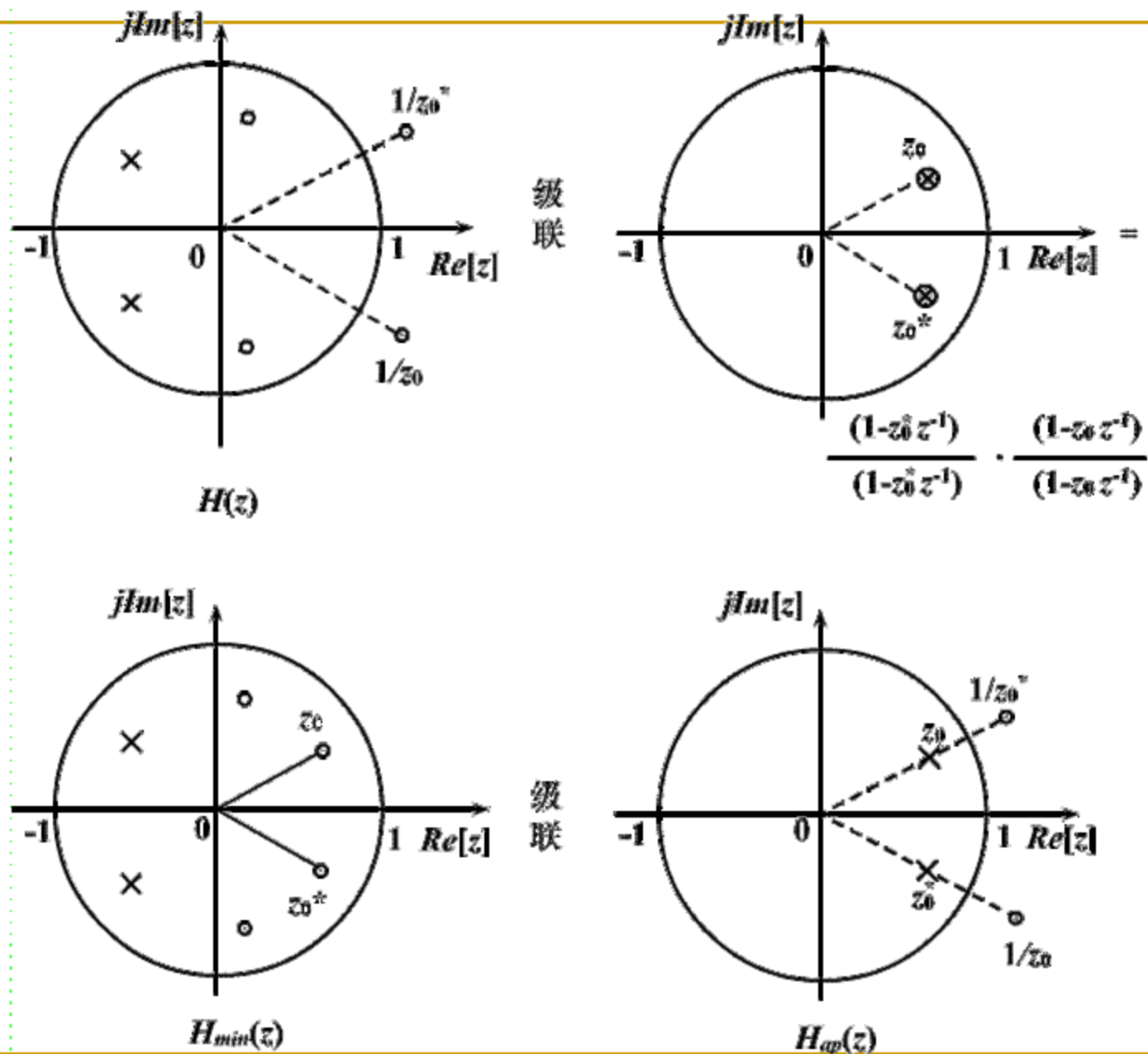


图6-6 系统的等效变换

2) 级联一个全通系统可以使非稳定滤波器变成一个稳定滤波器

单位圆外极点: $z = \frac{1}{r}e^{\pm j\theta}$, $|r| < 1$

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - re^{j\theta}}{1 - re^{-j\theta}z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - re^{-j\theta}}{1 - re^{j\theta}z^{-1}}$$

把非稳定系统的单位圆外的极点映射到单位圆内

3) 作为相位均衡器，校正系统的非线性相位，而不改变系统的幅度特性

$$H(z) = H_d(z) \cdot H_{ap}(z)$$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H_d(e^{j\omega}) \cdot H_{ap}(e^{j\omega}) \\ &= |H_d(e^{j\omega})| \cdot |H_{ap}(e^{j\omega})| \cdot e^{j[\varphi_d(\omega) + \varphi_{ap}(\omega)]} \end{aligned}$$

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \tau_d(\omega) + \tau_{ap}(\omega) \rightarrow \tau_0$$

$$e^2 = [\tau(\omega) - \tau_0]^2 = [\tau_{ap}(\omega) + \tau_d(\omega) - \tau_0]^2$$

利用均方误差最小准则求均衡器 $H_{ap}(z)$ 的有关参数

四、用模拟滤波器设计IIR数字滤波器

- 设计思想:

s 平面 \rightarrow z 平面

模拟系统 $H_a(s) \rightarrow H(z)$ 数字系统

- $H(z)$ 的频率响应要能模仿 $H_a(s)$ 的频率响应, 即 s 平面的虚轴映射到 z 平面的单位圆
- 因果稳定的 $H_a(s)$ 映射到因果稳定的 $H(z)$, 即 s 平面的左半平面 $\text{Re}[s] < 0$
映射到 z 平面的单位圆内 $|z| < 1$

◆ 设计方法：

- 冲激响应不变法
- 阶跃响应不变法
- 双线性变换法

五、冲激响应不变法

1、变换原理

数字滤波器的单位冲激响应 $h(n)$

模仿模拟滤波器的单位冲激响应 $h_a(t)$

$$h(n) = h_a(t) \Big|_{t=nT} \quad T \text{—抽样周期}$$

$$\downarrow \quad \quad \downarrow$$

$$H(z) \quad H_a(s)$$

$$H(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \hat{H}_a(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a \left(s - j \frac{2\pi}{T} k \right)$$

$$H(z)\Big|_{z=e^{sT}} = \hat{H}_a(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(s - j\frac{2\pi}{T}k\right)$$

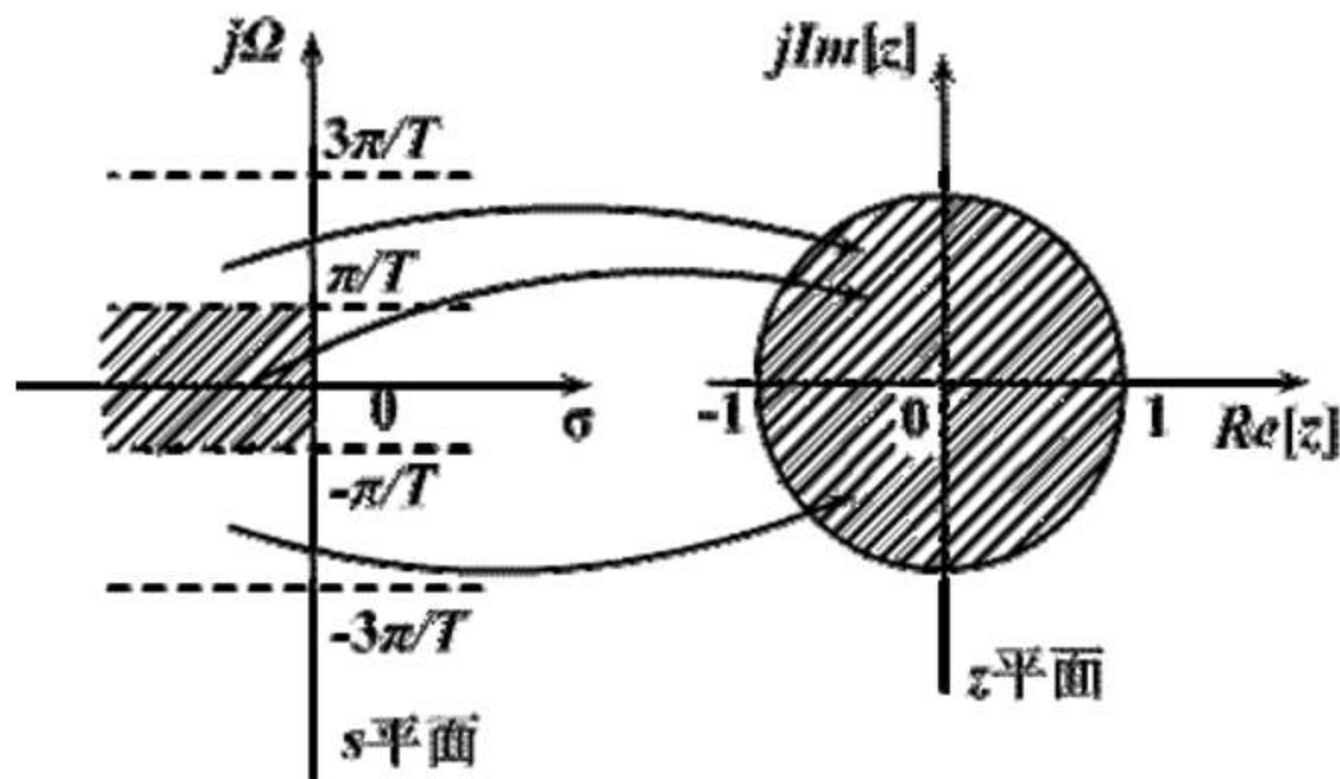


图6-7 冲激响应不变法映射关系

2、混迭失真

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\omega - 2\pi k}{T}\right)$$

数字滤波器的频率响应是模拟滤波器频率响应的周期延拓，周期为 $2\pi / T$

$$\text{仅当 } H_a(j\Omega) = 0 \quad |\Omega| \geq \frac{\pi}{T} = \frac{\Omega_s}{2}$$

数字滤波器的频响在折叠频率内重现模拟滤波器的频响而不产生混迭失真：


$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right) \quad |\omega| < \pi$$

- 实际系统不可能严格限带，都会混迭失真，在 $|\Omega| > \Omega_s / 2$ 处衰减越快，失真越小
- $f_s \uparrow \quad T \downarrow \quad \frac{\pi}{T} \uparrow \quad \frac{\Omega_s}{2} \uparrow \quad \text{混迭} \downarrow$
- 当滤波器的设计指标以数字域频率 ω_c 给定时，不能通过提高抽样频率来改善混迭现象

$$f_s \uparrow \quad T \downarrow \quad \frac{\pi}{T} \uparrow \quad \left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T} \right] \uparrow$$

$$T \downarrow \quad \Omega_c = \frac{\omega_c}{T} \uparrow$$

3、模拟滤波器的数字化方法

$$H_a(s) \rightarrow h_a(t) \rightarrow h_a(nT) \rightarrow h(n) \rightarrow H(z)$$


$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

$$h_a(t) = L^{-1}[H_a(s)] = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t)$$

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} u(nT) = \sum_{k=1}^N A_k \left(e^{s_k T} \right)^n u(n)$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^N A_k \left(e^{s_k T} \right)^n z^{-n}$$

$$= \sum_{k=1}^N A_k \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{s_k T} z^{-1} \right)^n = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad \rightarrow \quad H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

- 极点: s 平面 $s = s_k \rightarrow z$ 平面 $z = e^{s_k T}$
- 系数相同: A_k
- 稳定性不变: s 平面 $\text{Re}[s_k] < 0 \rightarrow z$ 平面 $|e^{s_k T}| < 1$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a \left(j \frac{\omega}{T} \right)$$

当 T 很小时，数字滤波器增益很大，易溢出，需修正

$$\text{令： } h(n) = T h_a(nT)$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{T A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

$$\begin{aligned} \text{则： } H(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a \left(j \frac{\omega - 2\pi k}{T} \right) \\ &\approx H_a \left(j \frac{\omega}{T} \right) \quad |\omega| < \pi \end{aligned}$$

例：设模拟滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$$

试用冲激响应不变法，设计IIR数字滤波器

解：据题意，得数字滤波器的系统函数：

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{T}{1 - e^{-T}z^{-1}} - \frac{T}{1 - e^{-3T}z^{-1}} \\ &= \frac{T(e^{-T} - e^{-3T})z^{-1}}{1 - (e^{-T} + e^{-3T})z^{-1} + e^{-4T}z^{-2}} \end{aligned}$$

设 $T = 1\text{s}$ ，则

$$H(z) = \frac{0.318z^{-1}}{1 - 0.4177z^{-1} + 0.01831z^{-2}}$$

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

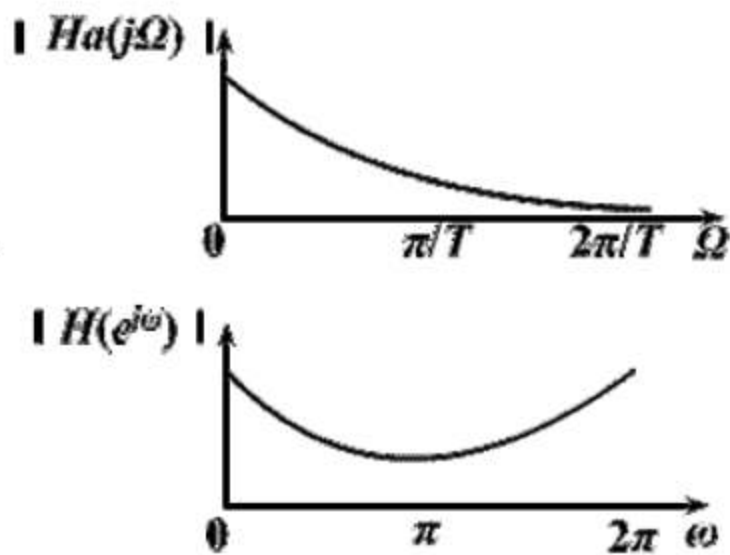
↓

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{0.318z^{-1}}{1 - 0.4177z^{-1} + 0.01831z^{-2}}$$

模拟滤波器的频率响应:

$$H_a(j\Omega) = \frac{2}{(3 - \Omega^2) + j4\Omega}$$



数字滤波器的频率响应:

图6-8 冲激响应不变法的频率响应幅度

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0.318e^{-j\omega}}{1 - 0.4177e^{-j\omega} + 0.01831e^{-j2\omega}}$$

4、优缺点

- 优点:

- $h(n)$ 完全模仿模拟滤波器的单位抽样响应 $h_a(t)$ 时域逼近良好
- 保持线性关系: $\omega = \Omega T$
线性相位模拟滤波器转变为线性相位数字滤波器

- 缺点:

- 频率响应混迭
只适用于限带的低通、带通滤波器

六、阶跃响应不变法

变换原理

数字滤波器的阶跃响应 $g(n)$

模仿模拟滤波器的阶跃响应 $g_a(t)$

$$g(n) = g_a(t) \Big|_{t=nT} = g_a(nT)$$

T — 抽样周期

$$\begin{array}{ccc}
 u(n) & \xrightarrow{\quad} & \boxed{\begin{array}{c} h(n) \\ H(z) \end{array}} & \xrightarrow{\quad} & g(n) = u(n) * h(n) \\
 \frac{z}{z-1} & & & & G(z) = \frac{z}{z-1} H(z)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 u(t) & \xrightarrow{\quad} & \boxed{\begin{array}{c} h_a(t) \\ H_a(s) \end{array}} & \xrightarrow{\quad} & g_a(t) = u(t) * h_a(t) \\
 \frac{1}{s} & & & & G_a(s) = \frac{1}{s} H_a(s)
 \end{array}$$

$$H_a(s) \rightarrow G_a(s) = \frac{1}{s} H_a(s) \rightarrow g_a(t) = L^{-1}[G_a(s)]$$

$$\rightarrow g(n) = g_a(nT) \rightarrow G(z) = ZT[g(n)] \rightarrow H(z) = \frac{z-1}{z} G(z)$$

$$g(n) = g_a(t)|_{t=nT} = g_a(nT)$$

$$G(z)|_{z=e^{sT}} = \hat{G}_a(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_a\left(s - jk \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$G(z) = \frac{z}{z-1} H(z)$$

$$\frac{z}{z-1} H(z)|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_a\left(s - jk \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{H_a\left(s - jk \frac{2\pi}{T}\right)}{s - jk \frac{2\pi}{T}} \quad G_a(s) = \frac{1}{s} H_a(s)$$

阶跃响应不变法同样有频率响应的混叠失真现象
但比冲激响应不变法要小。

七、双线性变换法

1、变换原理

使数字滤波器的频率响应

与模拟滤波器的频率响应相似。

冲激响应不变法、阶跃响应不变法：时域模仿逼近

缺点是产生频率响应的混叠失真

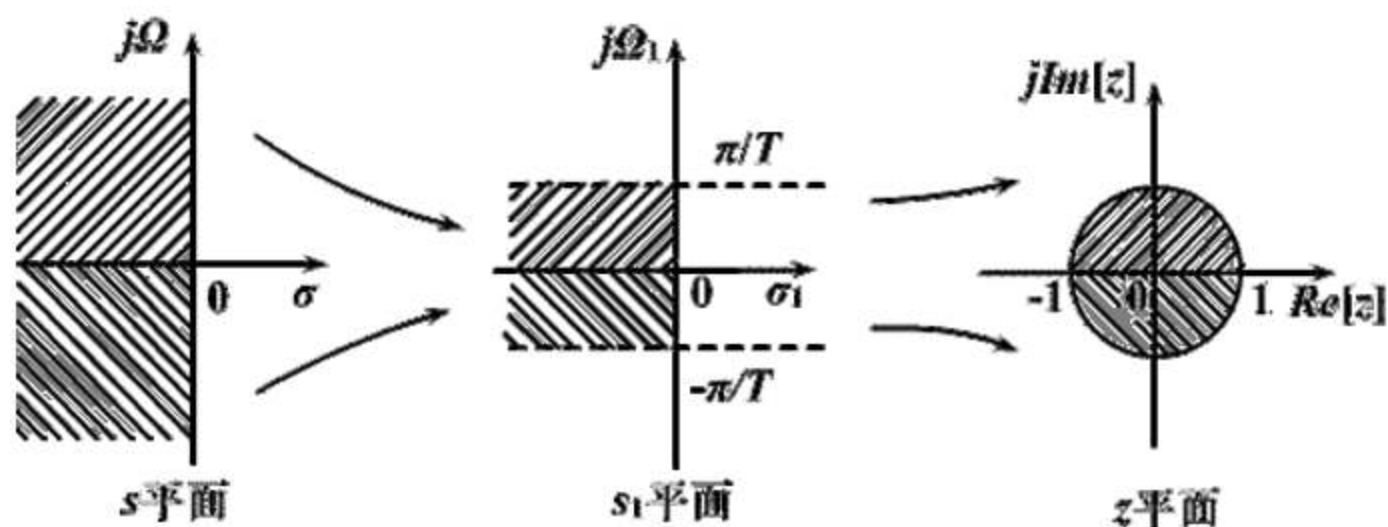


图6-11 双线性变换的映射关系

$$\Omega: [-\infty, \infty] \quad \Omega_1: \left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T} \right]$$

$$\Omega = \operatorname{tg} \frac{\Omega_1 T}{2} \quad z = e^{s_1 T}$$

$$\Omega = \operatorname{tg} \frac{\Omega_1 T}{2} = \frac{\sin \frac{\Omega_1 T}{2}}{\cos \frac{\Omega_1 T}{2}} = \frac{e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} - e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}}}{2j} \cdot \frac{2}{e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} + e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}}}$$

$$s = j\Omega$$

$$s_1 = j\Omega_1$$

$$s = j\Omega = \frac{e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} - e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}}}{e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} + e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}}} = \frac{e^{\frac{s_1 T}{2}} - e^{-\frac{s_1 T}{2}}}{e^{\frac{s_1 T}{2}} + e^{-\frac{s_1 T}{2}}} \quad \times e^{-\frac{s_1 T}{2}}$$

$$= \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad z = e^{s_1 T}$$

$$\therefore s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad z = \frac{1 + s}{1 - s}$$

- 为使模拟滤波器某一频率与数字滤波器的任一频率有对应关系，引入系数 c

$$\Omega = c \cdot \operatorname{tg} \frac{\Omega_1 T}{2}$$

$$s = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad z = \frac{c + s}{c - s}$$

2、变换常数 c 的选择

1) 低频处有较确切的对应关系: $\Omega \approx \Omega_1$

$$\Omega_1 \approx \Omega = c \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\Omega_1 T}{2} \right) \approx c \cdot \frac{\Omega_1 T}{2} \quad c = \frac{2}{T}$$

2) 某一特定频率严格相对应: $\Omega_c \leftrightarrow \omega_c$

$$\Omega_c = c \cdot \operatorname{tg} \frac{\Omega_{1c} T}{2} = c \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega_c}{2} \quad c = \Omega_c c \operatorname{tg} \frac{\omega_c}{2}$$

特定频率处频率响应严格相等, 可以较准确地控制截止频率位置

3、逼近情况

$$1) s = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Big|_{z=e^{j\omega}} = c \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = jc \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = j\Omega$$

s平面虚轴 \longleftrightarrow **z**平面单位圆

$$2) z = \frac{c + s}{c - s} = \frac{c + \sigma + j\Omega}{c - \sigma - j\Omega} \quad |z| = \frac{\sqrt{(c + \sigma)^2 + \Omega^2}}{\sqrt{(c - \sigma)^2 + \Omega^2}}$$

s平面 \longleftrightarrow **z**平面

$\sigma < 0$ $|z| < 1$ 左半平面 \longleftrightarrow 单位圆内

$\sigma > 0$ $|z| > 1$ 右半平面 \longleftrightarrow 单位圆外

$\sigma = 0$ $|z| = 1$ 虚轴 \longleftrightarrow 单位圆上

4、优缺点

- 优点：避免了频率响应的混迭现象

$$\Omega = c \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$$

s 平面与 **z** 平面为单值变换

$$\Omega > 0 \quad \omega > 0$$

$$\Omega < 0 \quad \omega < 0$$

$$\Omega \rightarrow \infty \quad \omega = \pi$$

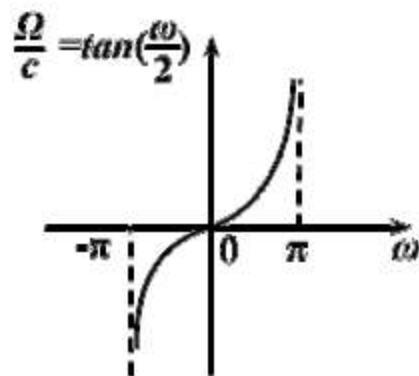


图6-12 双线性变换的频率间非线性关系

- 缺点：除了零频率附近， Ω 与 ω 之间严重非线性

- 1) 线性相位模拟滤波器 \rightarrow 非线性相位数字滤波器
- 2) 要求模拟滤波器的幅频响应为分段常数型，不然会产生畸变

分段常数型模拟滤波器经变换后仍为分段常数型数字滤波器，但临界频率点产生畸变

$$\Omega_1 = \omega_1 / T$$

$$\omega = 2 \cdot \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\Omega_1}{c} \right) \neq \omega_1$$

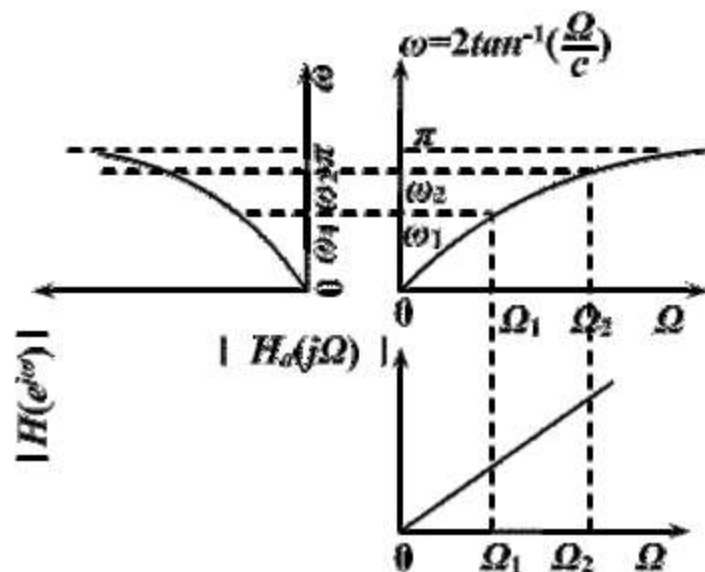


图6-13 理想微分器经双线性变换后幅频响应产生畸变

■ 预畸变

给定数字滤波器的截止频率 ω_1 ，则

$$\Omega_1 = c \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega_1}{2}$$

按 Ω_1 设计模拟滤波器，经双线性变换后，即可得到 ω_1 为截止频率的数字滤波器

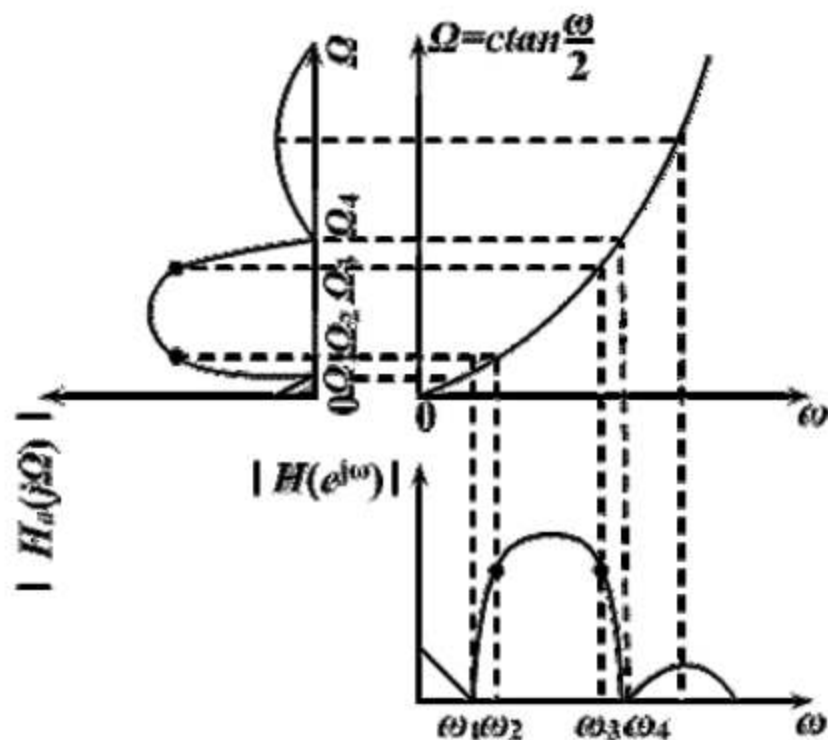


图6-14 双线性变换的频率非线性预畸

6、模拟滤波器的数字化方法

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = H_a \left(c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$$

可分解成级联的低阶子系统

$$H_a(s) = H_{a_1}(s)H_{a_2}(s)\cdots H_{a_m}(s)$$

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)\cdots H_m(z)$$

$$\text{其中: } H_i(z) = H_{a_i}(s) \Big|_{s=c\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

可分解成并联的低阶子系统

$$H_a(s) = \bar{H}_{a_1}(s) + \bar{H}_{a_2}(s) + \cdots + \bar{H}_{a_m}(s)$$

$$H(z) = \bar{H}_1(z) + \bar{H}_2(z) + \cdots + \bar{H}_m(z)$$

$$\text{其中: } \bar{H}_i(z) = \bar{H}_{a_i}(s) \Big|_{s=c\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

八、常用模拟低通滤波器特性

- 将数字滤波器技术指标转变成模拟滤波器技术指标，设计模拟滤波器，再转换成数字滤波器
- 模拟滤波器
 - 巴特沃斯 Butterworth 滤波器
 - 切比雪夫 Chebyshev 滤波器
 - 椭圆 Ellipse 滤波器
 - 贝塞尔 Bessel 滤波器

1、由幅度平方函数 $|H_a(j\Omega)|^2$ 确定模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$

$$\begin{aligned}|H_a(j\Omega)|^2 &= H_a(j\Omega)H_a^*(j\Omega) \\ &= H_a(j\Omega)H_a(-j\Omega) \\ &= H_a(s)H_a(-s)\Big|_{s=j\Omega}\end{aligned}$$

$h(t)$ 是实函数

将左半平面的极点归 $H_a(s)$

将以虚轴为对称轴的对称零点的任一半作为 $H_a(s)$ 的零点，虚轴上的零点一半归 $H_a(s)$

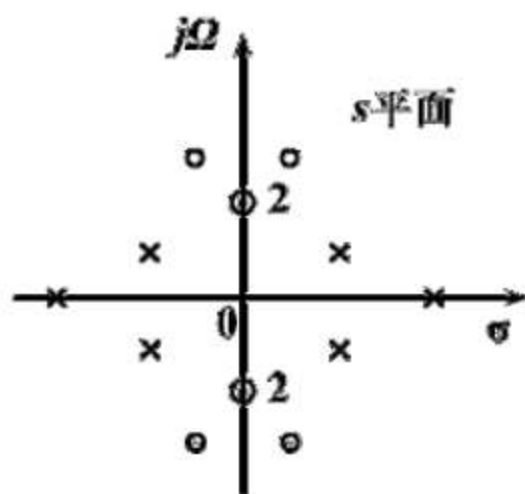


图6-16 $H_a(s)H_a(-s)$ 的零点、极点分布(成象限对称, 虚轴零点上的“2”字表示是二阶零点)

由 $|H_a(j\Omega)|^2$ 确定 $H_a(s)$ 的方法

- ◆ 由幅度平方函数得象限对称的 s 平面函数
- 将 $H_a(s)H_a(-s)$ 因式分解, 得到各零极点
- 对比 $H_a(j\Omega)$ 和 $H_a(s)$, 确定增益常数
- 由零极点及增益常数, 得 $H_a(s)$

例：已知幅度平方函数：

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{16(25 - \Omega^2)^2}{(49 + \Omega^2)(36 + \Omega^2)}, \quad \text{求系统函数 } H_a(s)$$

$$\text{解： } H_a(s)H_a(-s) = |H_a(j\Omega)|^2_{\Omega^2=-s^2} = \frac{16(25 + s^2)^2}{(49 - s^2)(36 - s^2)}$$

极点： $s = \pm 7, s = \pm 6$ 零点： $s = \pm j5$ （二阶）

$H_a(s)$ 的极点： $s = -7, s = -6$ 零点： $s = \pm j5$

$$\text{设增益常数为 } K_0 \quad H_a(s) = \frac{K_0(s^2 + 25)}{(s + 7)(s + 6)}$$

由 $H_a(s)|_{s=0} = H_a(j\Omega)|_{\Omega=0}$ ，得 $K_0 = 4$

$$\therefore H_a(s) = \frac{4(s^2 + 25)}{(s + 7)(s + 6)} = \frac{4s^2 + 100}{s^2 + 13s + 42}$$

2、Butterworth 低通逼近

幅度平方函数：
$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

N 为滤波器的阶数

Ω_c 为通带截止频率

当 $|H_a(j\Omega_c)|^2 = 1/2$ 时
$$\delta_1 = 20 \lg \left| \frac{H_a(j0)}{H_a(j\Omega_c)} \right| = 3dB$$

称 Ω_c 为Butterworth低通滤波器的3分贝带宽

1) 幅度函数特点:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

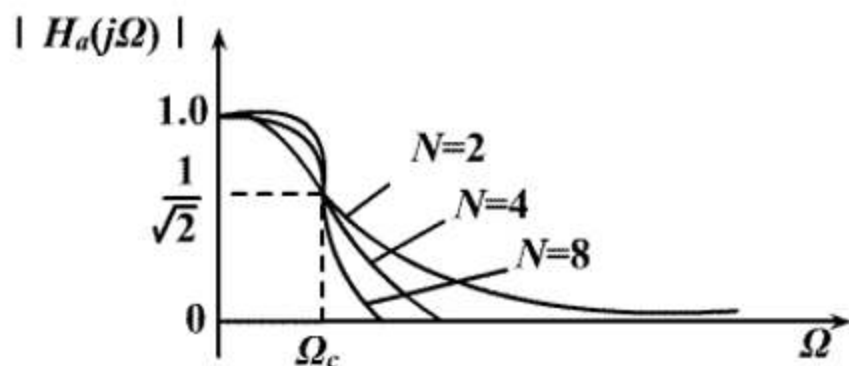


图6-17 巴特沃思滤波器幅度特性及其与 N 的关系

- $\Omega = 0$ $|H_a(j\Omega)|^2 = 1$
- $\Omega = \Omega_c$ $|H_a(j\Omega)|^2 = 1/2$ $\delta_1 = 3dB$ 3dB不变性
- ◆ $\Omega < \Omega_c$ 通带内有最大平坦的幅度特性, 单调减小
- ◆ $\Omega > \Omega_c$ 过渡带及阻带内快速单调减小

当 $\Omega = \Omega_{st}$ (阻带截止频率) 时, 衰减 δ_2 为阻带最小衰减

2) 幅度平方特性的极点分布:

$$\left|H_a(j\Omega)\right|_{\Omega=s/j}^2 = H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

Butterworth滤波器是一个全极点滤波器，其极点:

$$s_k = (-1)^{\frac{1}{2N}} j\Omega_c = \Omega_c e^{j\left[\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right]\pi} \quad k = 1, 2, \dots, 2N$$

- 极点在 s 平面呈象限对称，分布在Butterworth圆上，共 $2N$ 点
- 极点间的角度间隔为 $\pi / N \text{ rad}$
- 极点不落在虚轴上
- N 为奇数，实轴上有极点， N 为偶数，实轴上无极点

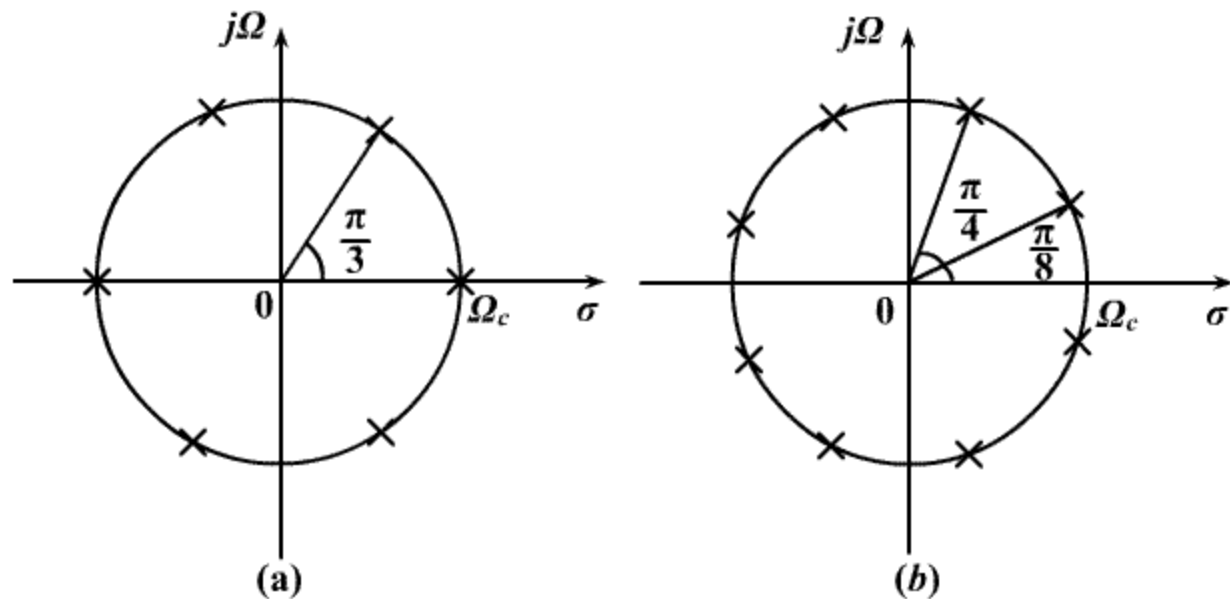


图6-18 巴特沃思滤波器 $H_a(s)H_a(-s)$ 在 s 平面的极点位置
 (a) $N=3$ (三阶);(b) $N=4$ (四阶)

3) 滤波器的系统函数:

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)}$$

$$s_k = \Omega_c e^{j\left[\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right]\pi} \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$\Omega_c = \Omega_{cr} = 1 \text{ rad/s}$$

为归一化系统的系统函数 $H_{an}(s)$

$$\text{去归一化, 得 } H_a(s) = H_{an}(s) \Big|_{s = \frac{\Omega_{cr}}{\Omega_c} s} = H_{an}\left(\frac{\Omega_{cr}s}{\Omega_c}\right)$$

4) 滤波器的设计步骤:

- 确定技术指标: Ω_p δ_1 Ω_s δ_2

- 根据技术指标求出滤波器阶数 N :

$$\text{由 } \delta_1 = -20 \lg |H_a(j\Omega_p)| \quad |H_a(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\text{得: } 1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{0.1\delta_1}$$

$$\text{同理: } 1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{0.1\delta_2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_s}\right)^N = \sqrt{\frac{10^{0.1\delta_1} - 1}{10^{0.1\delta_2} - 1}}$$

$$\text{令 } \lambda_{sp} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} \quad k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\delta_1} - 1}{10^{0.1\delta_2} - 1}} \quad \text{则: } N = -\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}}$$

- 求出归一化系统函数:

$$H_{an}(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)}$$

其中极点:

$$s_k = e^{j\left[\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right]\pi} \quad k = 1, 2, \dots, N$$

或者由 N , 直接查表得 $H_{an}(s)$

- 去归一化

$$H_a(s) = H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)$$

其中技术指标 Ω_c 给出或由下式求出:

$$\Omega_c = \Omega_p \left(10^{0.1\delta_1} - 1\right)^{-\frac{1}{2N}} \quad \text{阻带指标有富裕}$$

或 $\Omega_c = \Omega_s \left(10^{0.1\delta_2} - 1\right)^{-\frac{1}{2N}} \quad \text{通带指标有富裕}$

- 例：设计Butterworth数字低通滤波器，要求在频率低于 $0.2\pi \text{ rad}$ 的通带内幅度特性下降小于 1dB 。在频率 0.3π 到 π 之间的阻带内，衰减大于 15dB 。分别用冲激响应不变法和双线性变换法。

1、用冲激响应不变法设计

1) 由数字滤波器的技术指标：

$$\omega_p = 0.2\pi \text{ rad} \quad \delta_1 = 1\text{dB}$$

$$\omega_s = 0.3\pi \text{ rad} \quad \delta_2 = 15\text{dB}$$

2) 得模拟滤波器的技术指标：选 $T = 1 \text{ s}$

$$\Omega_p = \omega_p / T = 0.2\pi \text{ rad/s} \quad \delta_1 = 1\text{dB}$$

$$\Omega_s = \omega_s / T = 0.3\pi \text{ rad/s} \quad \delta_2 = 15\text{dB}$$

3) 设计Butterworth模拟低通滤波器

a) 确定参数

$$\lambda_{sp} = \Omega_s / \Omega_p = 1.5 \quad k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\delta_1} - 1}{10^{0.1\delta_2} - 1}} = 0.092$$

$$N = -\lg k_{sp} / \lg \lambda_{sp} = 5.884 \quad \text{取} N = 6$$

$$\Omega_c = \Omega_p \left(10^{0.1\delta_1} - 1\right)^{-\frac{1}{2N}} = 0.7032 \quad \text{rad/s}$$

用通带技术指标，使阻带特性较好，改善混迭失真

b) 求出极点（左半平面）

$$s_k = \Omega_c e^{j\left[\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right]\pi} \quad k = 1, 2, \dots, 6$$

c) 构造系统函数

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^6}{\prod_{k=1}^6 (s - s_k)}$$

或者

b') 由 $N = 6$ ，直接查表得

$$H_{an}(s) = \frac{1}{1 + 3.8637s + 7.4641s^2 + 9.1416s^3 + 7.4641s^4 + 3.8637s^5 + s^6}$$

c') 去归一化

$$H_a(s) = H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) = \frac{0.1209}{s^6 + 2.716s^5 + 3.691s^4 + 3.179s^3 + 1.825s^2 + 0.121s + 0.1209}$$

4) 将 $H_a(s)$ 展成部分分式形式:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

变换成Butterworth数字滤波器:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \\ &= \frac{0.2871 - 0.4466z^{-1}}{1 - 0.1297z^{-1} + 0.6949z^{-2}} + \frac{-2.1428 + 1.1454z^{-1}}{1 - 1.0691z^{-1} + 0.3699z^{-2}} \\ &\quad + \frac{1.8558 - 0.6304z^{-1}}{1 - 0.9972z^{-1} + 0.2570z^{-2}} \end{aligned}$$

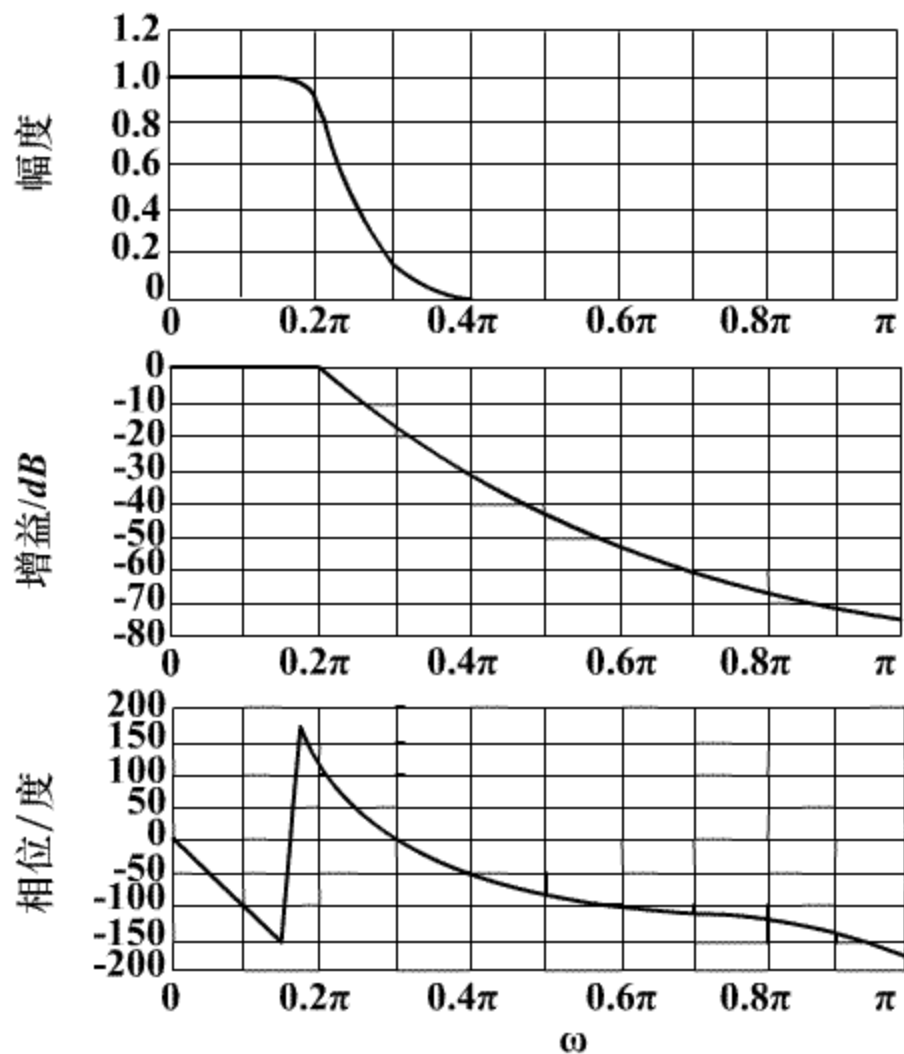


图6-24 用冲激响应不变法设计出的六阶巴特沃思低通数字滤波器频率响应

2、用双线性变换法设计

1) 由数字滤波器的技术指标:

$$\omega_p = 0.2\pi \text{ rad} \quad \delta_1 = 1\text{dB}$$

$$\omega_s = 0.3\pi \text{ rad} \quad \delta_2 = 15\text{dB}$$

2) 考虑预畸变, 得模拟滤波器的技术指标:

选 $T = 1\text{s}$

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_p}{2} = 0.65 \text{ rad/s} \quad \delta_1 = 1\text{dB}$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_s}{2} = 1.019 \text{ rad/s} \quad \delta_2 = 15\text{dB}$$

3) 设计Butterworth模拟低通滤波器

a) 确定参数

$$\lambda_{sp} = \Omega_s / \Omega_p = 1.568 \quad k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\delta_1} - 1}{10^{0.1\delta_2} - 1}} = 0.092$$

$$N = -\lg k_{sp} / \lg \lambda_{sp} = 5.306 \quad \text{取} N = 6$$

$$\Omega_c = \Omega_s \left(10^{0.1\delta_2} - 1\right)^{-\frac{1}{2N}} = 0.7662 \quad \text{rad/s}$$

用阻带技术指标，使通带特性较好，因无混迭问题

b) 求出极点（左半平面）

$$s_k = \Omega_c e^{j\left[\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right]\pi} \quad k = 1, 2, \dots, 6$$

c) 构造系统函数

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^6}{\prod_{k=1}^6 (s - s_k)}$$

或者

b') 由 $N = 6$, 直接查表得

$$H_{an}(s) = \frac{1}{1 + 3.8637s + 7.4641s^2 + 9.1416s^3 + 7.4641s^4 + 3.8637s^5 + s^6}$$

c') 去归一化

$$H_a(s) = H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)$$

$$= \frac{0.2024}{(s^2 + 0.396s + 0.5871)(s^2 + 1.083s + 0.5871)(s^2 + 1.480s + 0.5871)}$$

4) 将 $H_a(s)$ 变换成 **Butterworth** 数字滤波器:

$$H(z) = H_a(s) \Bigg|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$
$$= \frac{1}{(1 - 1.268z^{-1} + 0.7051z^{-2})} \cdot \frac{1}{(1 - 1.010z^{-1} + 0.358z^{-2})}$$
$$\cdot \frac{1}{(1 - 0.9044z^{-1} + 0.2155z^{-2})}$$

3、Chebyshev低通逼近

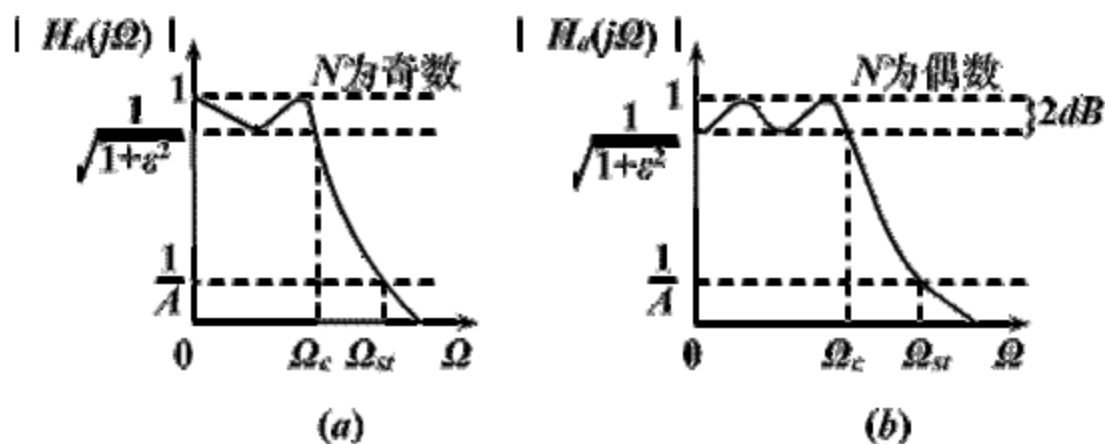


图6-19 切贝雪夫I型滤波器的幅度特性(通带波纹2dB)

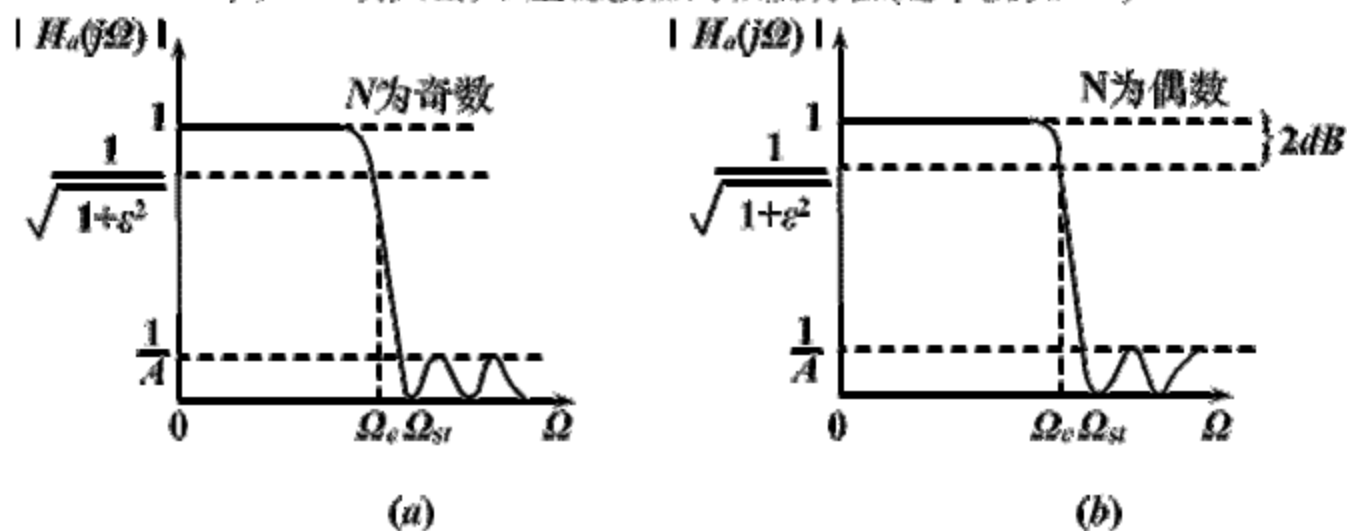


图6-20 切贝雪夫II型滤波器的幅度特性

幅度平方函数:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$$

$0 < \varepsilon < 1$, 表示通带波纹大小, ε 越大, 波纹越大

Ω_c : 截止频率, 不一定为3dB带宽

N : 滤波器的阶数

$C_N(x)$: N 阶Chebyshev多项式

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x) & |x| \leq 1 \\ ch(Nch^{-1} x) & |x| > 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{等波纹幅度特性} \\ \text{单调增加} \end{array}$$

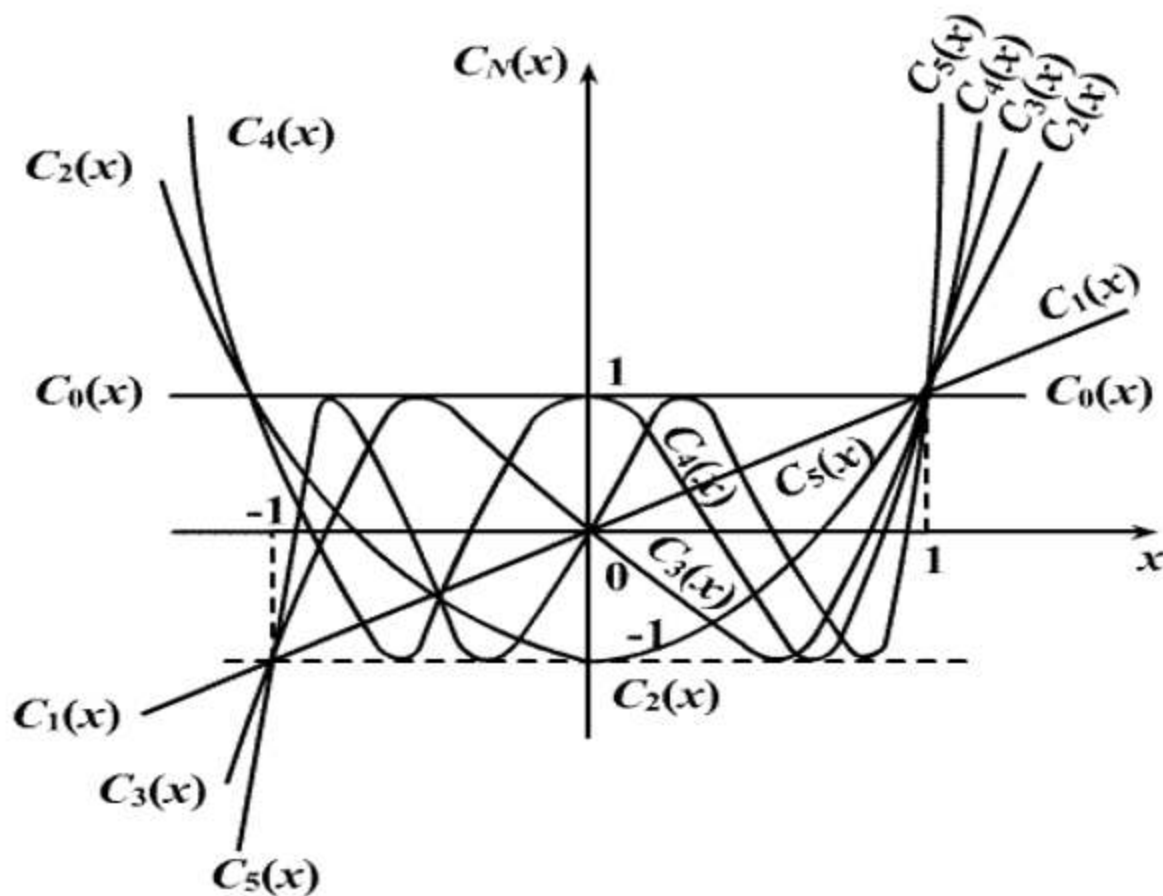
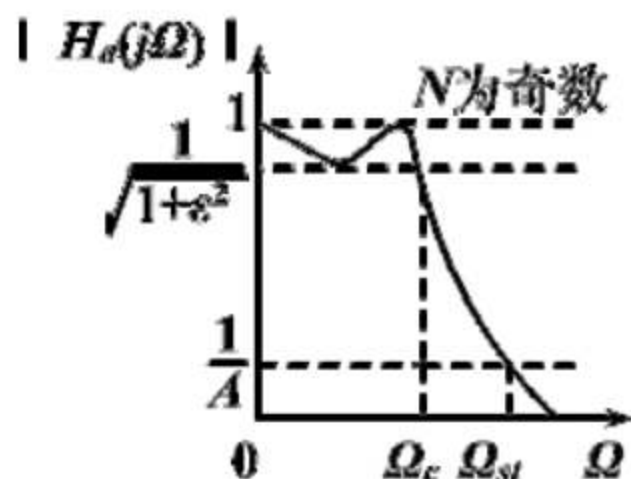


图6-21 $N=0,1,2,3,4,5$ 等各阶切贝雪夫多项式 $C_N(x)$

1) 幅度函数特点:

$$|H_a(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}}$$



- $\Omega = 0$
 - N 为奇数 $|H_a(j0)| = 1$
 - N 为偶数 $|H_a(j0)| = 1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}$
- $\Omega = \Omega_c$ $|H_a(j\Omega)| = 1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}$
- $\Omega < \Omega_c$ 通带内: 在1和 $1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}$ 间等波纹起伏
- $\Omega > \Omega_c$ 通带外: 迅速单调下降趋向0

2) Chebyshev滤波器的三个参量:

- Ω_c : 通带截止频率, 给定
- ε : 表征通带内波纹大小

$$\delta_1 = 20 \lg \frac{|H_a(j\Omega)|_{\max}}{|H_a(j\Omega)|_{\min}} = 20 \lg \sqrt{1 + \varepsilon^2}$$

$$\varepsilon^2 = 10^{0.1\delta_1} - 1 \quad \text{由通带衰减决定}$$

- N : 滤波器阶数, 等于通带内最大最小值的总数

$$N \geq \frac{ch^{-1} \left[\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{10^{0.1\delta_2} - 1} \right]}{ch^{-1} \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c} \right)}$$

Ω_s 为阻带截止频率
阻带衰减越大
所需阶数越高

3) 幅度平方特性的极点分布:

$$\left|H_a(j\Omega)\right|_{\Omega=s/j}^2 = H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)}$$

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k \quad k = 1, 2, \dots, 2N$$

$$\frac{\sigma_k^2}{(\Omega_c a)^2} + \frac{\Omega_k^2}{(\Omega_c b)^2} = 1$$

$$\gamma = \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1}$$

$$a = \frac{1}{2} \left(\gamma^{\frac{1}{N}} - \gamma^{-\frac{1}{N}} \right)$$

$$b = \frac{1}{2} \left(\gamma^{\frac{1}{N}} + \gamma^{-\frac{1}{N}} \right)$$

$$\sigma_k = -\Omega_c a \sin \left[\frac{\pi}{2N} (2k-1) \right]$$

$$\Omega_k = \Omega_c b \cos \left[\frac{\pi}{2N} (2k-1) \right]$$

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k \quad k = 1, 2, \dots, 2N$$

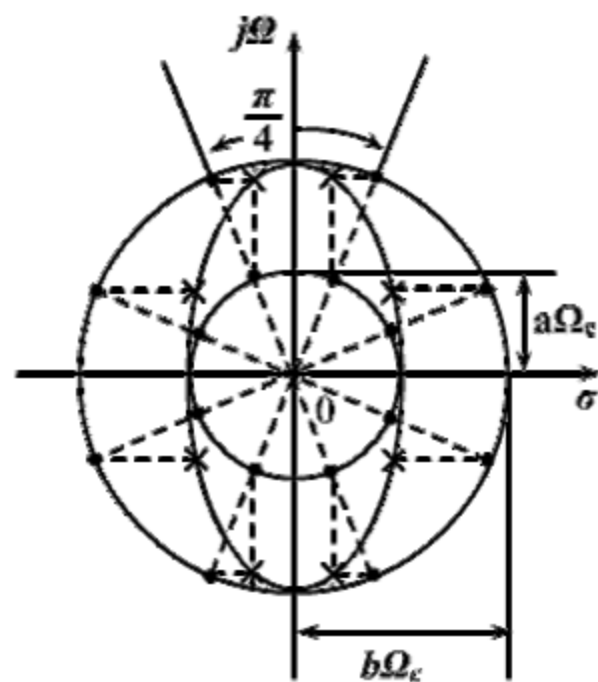


圖6-22 $N=4$ 時模擬切貝雪夫 I 型濾波器極點位置圖

4) 滤波器的系统函数:

$$H_a(s) = \frac{K}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)} \quad K = \frac{\Omega_c^N}{\varepsilon \cdot 2^{N-1}}$$

其中:

$$s_k = -\Omega_c a \sin \left[\frac{\pi}{2N} (2k - 1) \right] + j\Omega_c b \cos \left[\frac{\pi}{2N} (2k - 1) \right]$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

5) 滤波器的设计步骤:

- 确定技术指标: Ω_p δ_1 Ω_s δ_2

归一化:

$$\lambda_p = \frac{\Omega_p}{\Omega_p} = 1 \quad \lambda_s = \frac{\Omega_s}{\Omega_p}$$

- 根据技术指标求出滤波器阶数 N 及 ε :

$$N \geq \frac{ch^{-1}(k_1^{-1})}{ch^{-1}\lambda_s} \quad \text{其中: } k_1^{-1} = \sqrt{\frac{10^{0.1\delta_2} - 1}{10^{0.1\delta_1} - 1}}$$

$$\varepsilon^2 = 10^{0.1\delta_1} - 1$$

- 求出归一化系统函数:

$$H_{an}(s) = \frac{1}{\varepsilon \cdot 2^{N-1} \prod_{k=1}^N (s - s_k)}$$

其中极点由下式求出:

$$\gamma = \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1}$$

$$a = \frac{1}{2} \left(\gamma^{\frac{1}{N}} - \gamma^{-\frac{1}{N}} \right)$$

$$b = \frac{1}{2} \left(\gamma^{\frac{1}{N}} + \gamma^{-\frac{1}{N}} \right)$$

$$s_k = -a \sin \left[\frac{\pi}{2N} (2k-1) \right] + jb \cos \left[\frac{\pi}{2N} (2k-1) \right]$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

或者由 N 和 δ_1 , 直接查表得 $H_{an}(s)$

- 去归一化 $H_a(s) = H_{an} \left(\frac{s}{\Omega_p} \right)$

- 例：用双线性变换法设计Chebyshev数字低通滤波器，要求在频率低于 $0.2\pi \text{ rad}$ 的通带内幅度特性下降小于 1dB 。在频率 0.3π 到 π 之间的阻带内，衰减大于 15dB 。

1) 由数字滤波器的技术指标：

$$\omega_p = 0.2\pi \text{ rad} \quad \delta_1 = 1\text{dB}$$

$$\omega_s = 0.3\pi \text{ rad} \quad \delta_2 = 15\text{dB}$$

2) 考虑预畸变，得模拟滤波器的技术指标：

选 $T = 1\text{s}$

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_p}{2} = 0.65 \text{ rad/s} \quad \delta_1 = 1\text{dB}$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_s}{2} = 1.019 \text{ rad/s} \quad \delta_2 = 15\text{dB}$$

3) 设计Chebyshev模拟低通滤波器

a) 确定参数

$$\Omega_c = \Omega_p = 0.65 \text{ rad/s}$$

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1\delta_1} - 1} = 0.5088$$

$$N \geq \frac{ch^{-1} \left[\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{10^{0.1\delta_2} - 1} \right]}{ch^{-1} \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c} \right)} = 3.0141 \quad \text{取} N = 4$$

b) 求左半平面极点

$$\gamma = \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} = 4.1702$$

$$a = \frac{1}{2} \left(\gamma^{\frac{1}{N}} - \gamma^{-\frac{1}{N}} \right) = 0.3646$$

$$b = \frac{1}{2} \left(\gamma^{\frac{1}{N}} + \gamma^{-\frac{1}{N}} \right) = 1.0644$$

$$s_k = -\Omega_c a \sin \left[\frac{\pi}{2N} (2k-1) \right] + j\Omega_c b \cos \left[\frac{\pi}{2N} (2k-1) \right]$$

$$= \begin{cases} -0.0907 \pm j0.6390 & k = 1, 4 \\ -0.2189 \pm j0.2647 & k = 2, 3 \end{cases}$$

c) 构造系统函数

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^4}{\varepsilon \cdot 2^3} \cdot \frac{1}{\prod_{k=1}^4 (s - s_k)}$$

$$= \frac{0.04381}{(s^2 + 0.4378s + 0.1180)(s^2 + 0.1814s + 0.4166)}$$

或者：

b') 由 $N=4, \delta_1 = 1dB$ 直接查表得

$$H_{an}(s) = \frac{0.2756}{0.2756 + 0.7426s + 1.4539s^2 + 0.9528s^3 + s^4}$$

c') 去归一化

$$\begin{aligned} H_a(s) &= H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) \\ &= \frac{0.04381}{(s^2 + 0.4378s + 0.1180)(s^2 + 0.1814s + 0.4166)} \end{aligned}$$

4) 将 $H_a(s)$ 变换成Chebyshev数字滤波器:

$$H(z) = H_a(s) \Bigg|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$
$$= \frac{0.001836}{(1 - 1.4996z^{-1} + 0.8482z^{-2})} \cdot \frac{(1 + z^{-1})^4}{(1 - 1.5548z^{-1} + 0.6493z^{-2})}$$

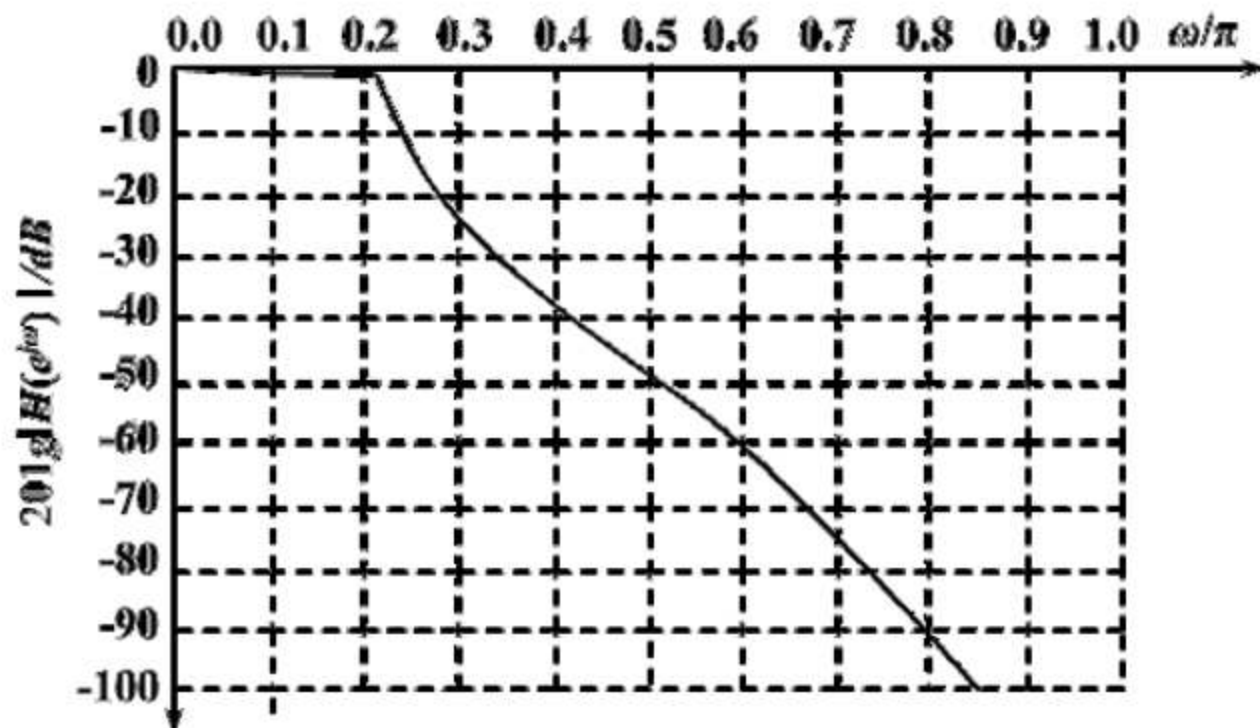


图6-25 用双线性变换法设计出的四阶切贝雪夫低通数字滤波器幅频响应

小结：利用模拟滤波器设计IIR数字滤波器的步骤

■ 确定数字滤波器的技术指标：

通带截止频率 ω_p 、通带衰减 δ_1

阻带截止频率 ω_s 、阻带衰减 δ_2

■ 将数字滤波器的技术指标转变成模拟滤波器的技术指标

□ 冲激响应不变法

通带截止频率 $\Omega_p = \omega_p / T$

阻带截止频率 $\Omega_s = \omega_s / T$

□ 双线性变换法

δ_1 、 δ_2 不变

通带截止频率 $\Omega_p = c \cdot \operatorname{tg}(\omega_p / 2)$

阻带截止频率 $\Omega_s = c \cdot \operatorname{tg}(\omega_s / 2)$

- 按模拟滤波器的技术指标设计模拟低通滤波器
 - Butterworth低通滤波器
 - Chebyshev低通滤波器
- 将模拟低通滤波器转换成数字低通滤波器
 - 冲激响应不变法
 - 双线性变换法

九、设计IIR滤波器的频率变换法

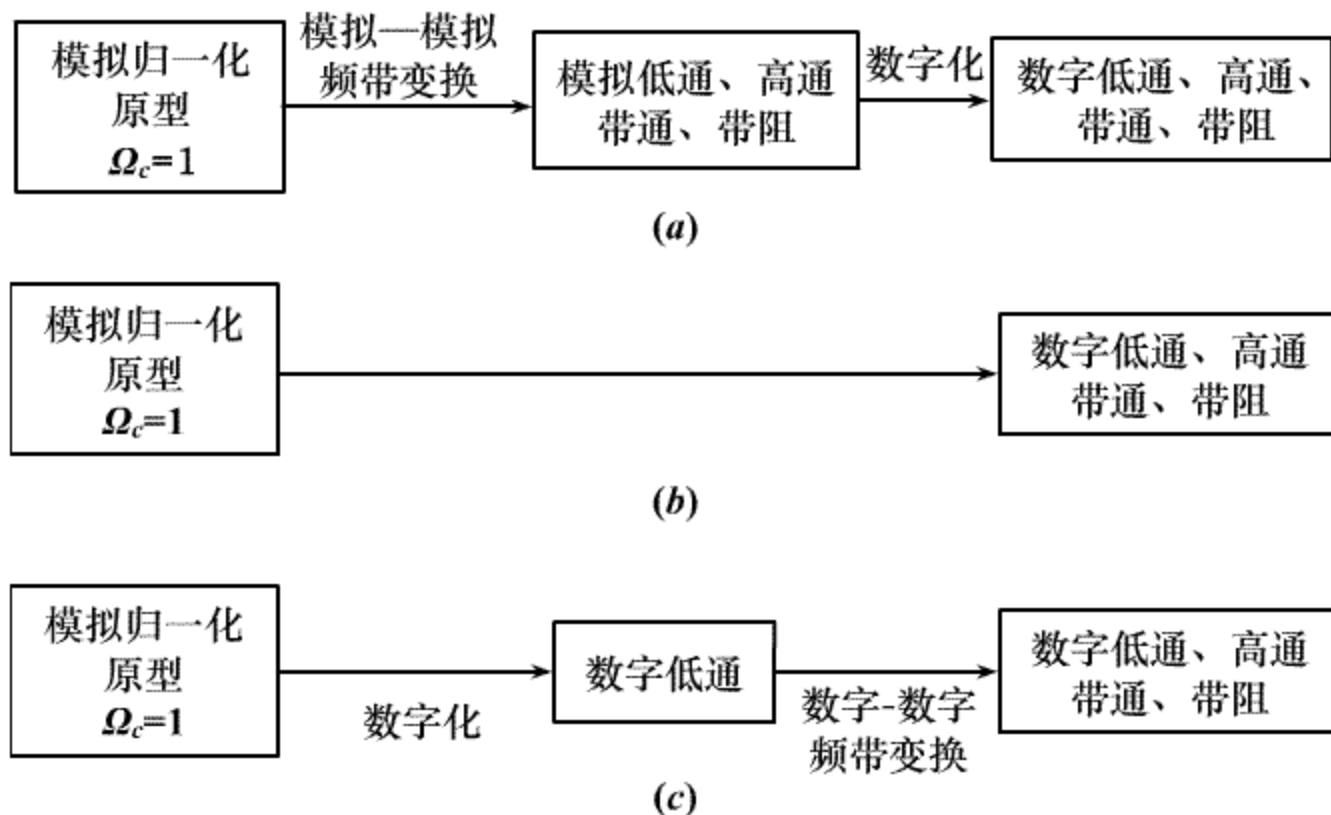
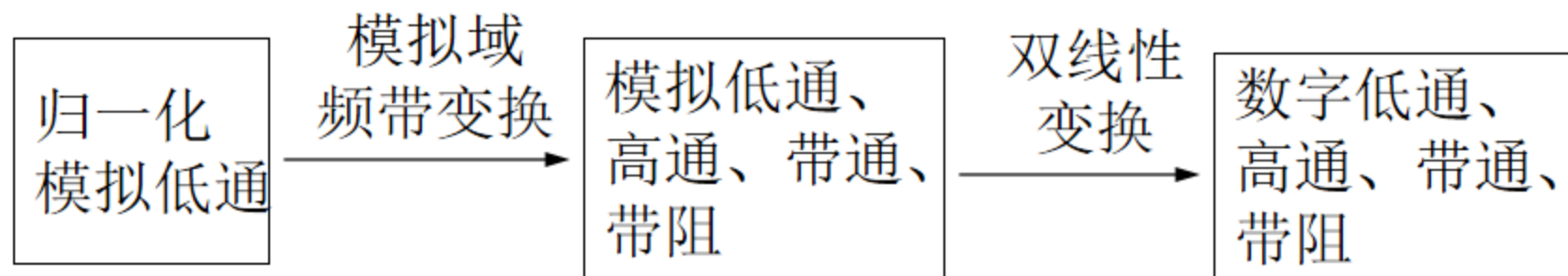


图6-23 设计IIR数字滤波器的频率变换法
(a)先模拟频带变换，再数字化;(b)把(a)的两步合成一步直接设计;
(c)先数字化，再进行数字频带变换

十、模拟域频带变换法



$$H_a(s)$$

$$s = \sigma + j\Omega$$

$$\text{归一化: } \lambda$$

$$\bar{H}_a(\bar{s})$$

$$\bar{s} = \bar{\sigma} + j\bar{\Omega}$$

$$\text{归一化: } \eta$$

$$H(z)$$

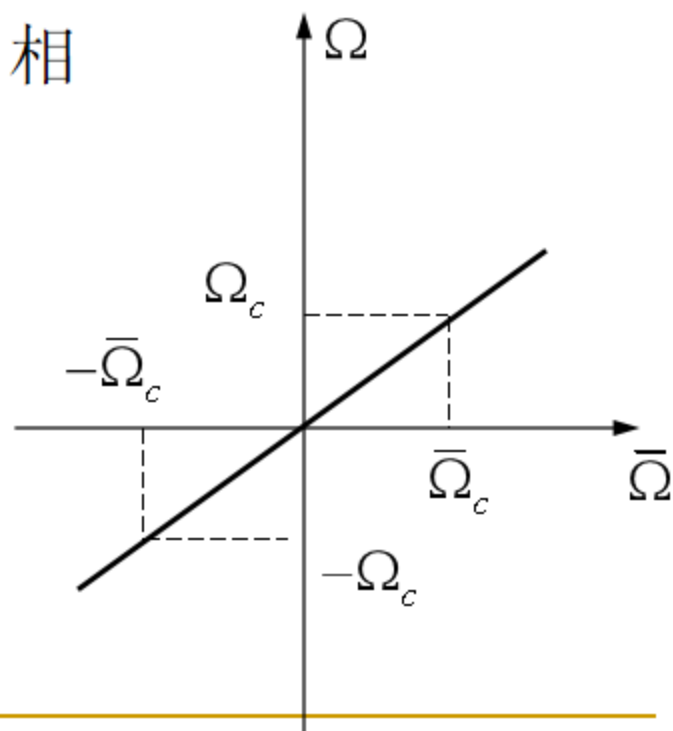
$$\bar{H}_a(\bar{s}) = H_a(s) \Big|_{s=f(\bar{s})}$$

$$\bar{H}_a(j\bar{\Omega}) = H_a(j\Omega) \Big|_{\Omega=f(\bar{\Omega})}$$

1、模拟低通—模拟低通

$$s = \frac{\Omega_c \bar{s}}{\bar{\Omega}_c}$$

当通带截止频率 $\Omega_c = 1$ 时，相当于去归一化



2、模拟低通—模拟带通

- 变换关系:

$$s = \frac{\bar{s}^2 + \bar{\Omega}_0^2}{\bar{s}}$$

$$\text{由 } s = j\Omega \quad \bar{s} = j\bar{\Omega}$$

$$\Omega = \frac{\bar{\Omega}^2 - \bar{\Omega}_0^2}{\bar{\Omega}}$$

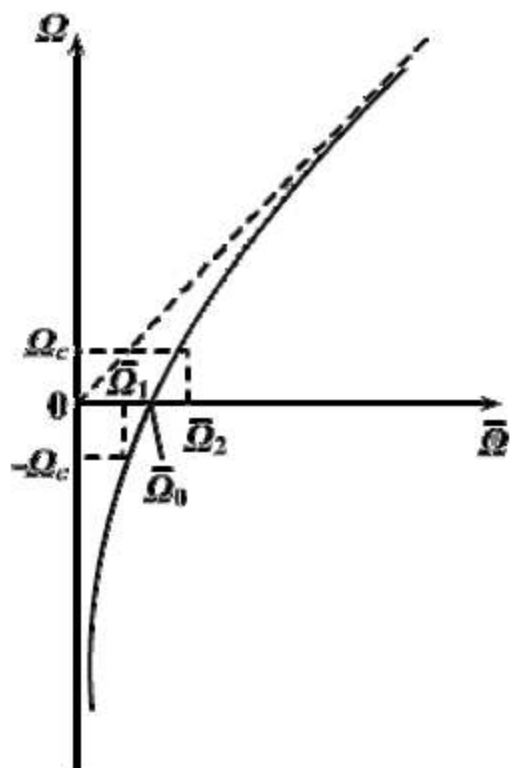


图6-26 模拟低通滤波器到 模拟带通滤波器频率的变换关系

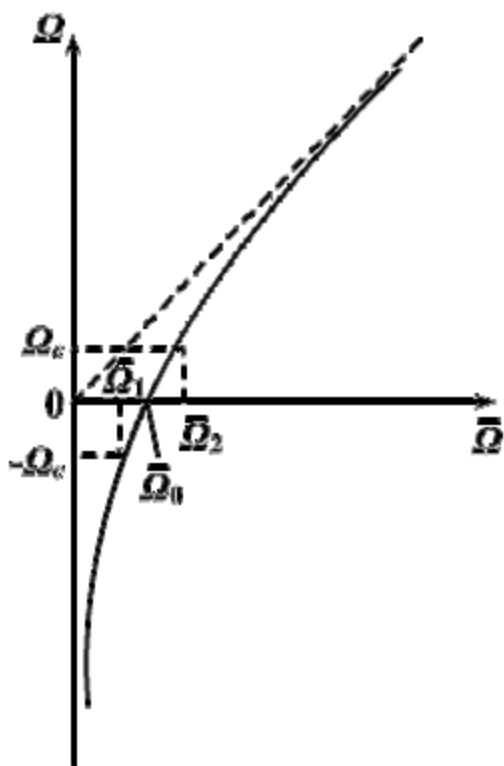


图6-26 模拟低通滤波器到 模拟带通滤波器频率的变换关系

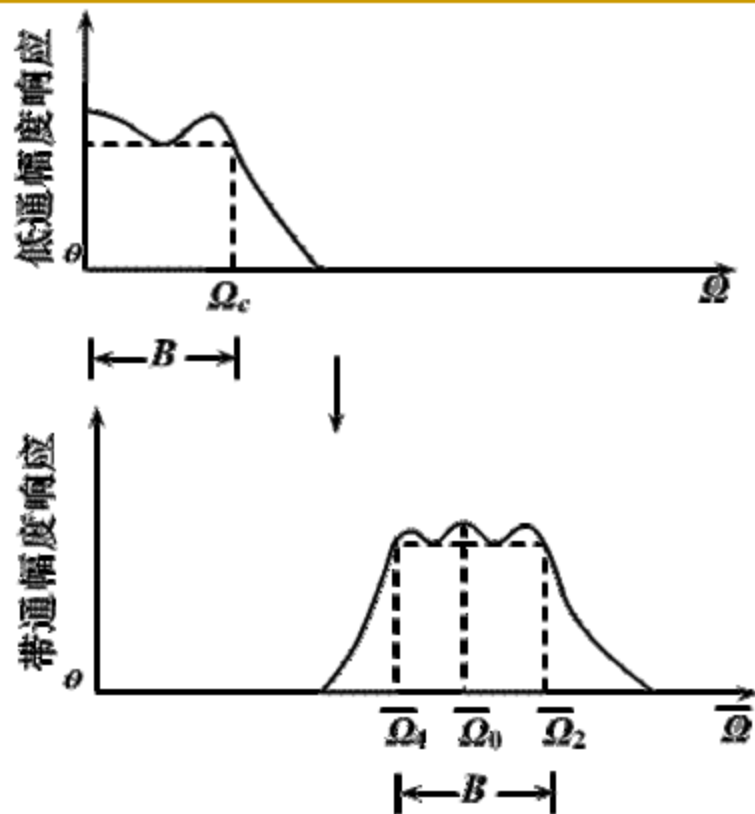


图6-27 低通幅度响应到带通幅度响应的变换

$$\Omega = \frac{\bar{\Omega}^2 - \bar{\Omega}_0^2}{\bar{\Omega}}$$

λ	$-\infty$	$-\lambda_s$	$-\lambda_c$	0	λ_c	λ_s	∞
Ω	$-\infty$	$-\Omega_s$	$-\Omega_c$	0	Ω_c	Ω_s	∞
$\bar{\Omega}$	0	$\bar{\Omega}_{s1}$	$\bar{\Omega}_1$	$\bar{\Omega}_0$	$\bar{\Omega}_2$	$\bar{\Omega}_{s2}$	∞
η	0	η_{s1}	η_1	η_0	η_2	η_{s2}	∞

$$\Omega = \frac{\bar{\Omega}^2 - \bar{\Omega}_0^2}{\bar{\Omega}} \quad \Omega_c \leftrightarrow \bar{\Omega}_2 \quad -\Omega_c \leftrightarrow \bar{\Omega}_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_c = \frac{\bar{\Omega}_2^2 - \bar{\Omega}_0^2}{\bar{\Omega}_2} \\ -\Omega_c = \frac{\bar{\Omega}_1^2 - \bar{\Omega}_0^2}{\bar{\Omega}_1} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_0^2 = \bar{\Omega}_1 \bar{\Omega}_2 \\ B = \bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1 = \Omega_c \end{array} \right.$$

$\bar{\Omega}_0$ 为通带几何对称中心角频率

B 为通带带宽

$$s = \frac{\bar{s}^2 + \bar{\Omega}_0^2}{\bar{s}} \quad \Omega = \frac{\bar{\Omega}^2 - \bar{\Omega}_0^2}{\bar{\Omega}} \quad \begin{cases} \bar{\Omega}_0^2 = \bar{\Omega}_1 \bar{\Omega}_2 \\ B = \bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1 = \Omega_c \end{cases}$$

■ 归一化变换:

$$s \leftarrow \frac{s}{\Omega_c} = \frac{\bar{s}^2 + \bar{\Omega}_0^2}{\bar{s} \Omega_c} \quad s = \frac{\bar{s}^2 + \bar{\Omega}_0^2}{\bar{s} B}$$

$$\frac{\Omega}{\Omega_c} = \frac{\bar{\Omega}^2 - \bar{\Omega}_0^2}{\bar{\Omega} \Omega_c} = \frac{\bar{\Omega}^2 - \bar{\Omega}_0^2}{\bar{\Omega} B}$$

$$= \frac{(\bar{\Omega}^2 - \bar{\Omega}_0^2) / B^2}{\bar{\Omega} B / B^2} \quad \lambda = \frac{\eta^2 - \eta_0^2}{\eta}$$

其中: $\lambda = \Omega / \Omega_c$ $\eta = \bar{\Omega} / B$ $\eta_0^2 = \eta_1 \eta_2$

例：设计一个数字带通滤波器，通带范围为 $0.3\pi \text{ rad}$ 到 $0.4\pi \text{ rad}$ ，通带内最大衰减为 3dB ， $0.2\pi \text{ rad}$ 以下和 $0.5\pi \text{ rad}$ 以上为阻带，阻带内最小衰减为 18dB 。采用Butterworth模拟低通滤波器、双线性变换法。

解：1) 确定数字带通滤波器的技术指标：

$$\omega_{s1} = 0.2\pi \text{ rad} \quad \omega_1 = 0.3\pi \text{ rad} \quad \delta_1 = 3\text{dB}$$

$$\omega_{s2} = 0.5\pi \text{ rad} \quad \omega_2 = 0.4\pi \text{ rad} \quad \delta_2 = 18\text{dB}$$

2) 转换为模拟带通滤波器的技术指标：（选 $T=1\text{s}$ ）

$$\bar{\Omega}_{s1} = \frac{2}{T} \text{tg} \frac{\omega_{s1}}{2} = 0.65 \text{ rad/s}$$

$$\bar{\Omega}_1 = \frac{2}{T} \text{tg} \frac{\omega_1}{2} = 1.019 \text{ rad/s}$$

$$\bar{\Omega}_2 = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_2}{2} = 1.453 \quad \text{rad/s}$$

$$\bar{\Omega}_{s2} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_{s2}}{2} = 2 \quad \text{rad/s}$$

$$\bar{\Omega}_0 = \sqrt{\bar{\Omega}_1 \bar{\Omega}_2} = 1.217 \quad \text{rad/s}$$

$$B = \bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1 = 0.434 \quad \text{rad/s}$$

归一化:

$$\eta_{s1} = \bar{\Omega}_{s1} / B = 1.498 \quad \eta_1 = \bar{\Omega}_1 / B = 2.348$$

$$\eta_{s2} = \bar{\Omega}_{s2} / B = 4.608 \quad \eta_2 = \bar{\Omega}_2 / B = 3.348$$

$$\eta_0^2 = \eta_1 \eta_2 = \bar{\Omega}_0 / B = 2.804$$

3) 转换为归一化模拟低通滤波器技术指标:

$$\lambda_s = \frac{\eta_{s2}^2 - \eta_0^2}{\eta_{s2}} = 2.902 \quad -\lambda_s = \frac{\eta_{s1}^2 - \eta_0^2}{\eta_{s1}} = -3.7506$$

取小者: $\lambda_s = 2.902$ $\lambda_s \leftrightarrow \eta_{s2}$ $-\lambda_s \leftrightarrow \eta_{s1}$

又有 $\lambda_p = 1$ $\delta_1 = 1dB$ $\delta_2 = 18dB$ $\lambda = \frac{\eta^2 - \eta_0^2}{\eta}$

4) 设计归一化模拟低通滤波器:

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\delta_1} - 1}{10^{0.1\delta_2} - 1}} = 0.127 \quad \lambda_{sp} = \lambda_s / \lambda_p = 2.902$$

$$N = -\lg k_{sp} / \lg \lambda_{sp} = 1.940 \quad \text{取 } N = 2$$

查表得: $H_a(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$

5) 将归一化模拟低通滤波器转换成模拟带通滤波器:

$$\bar{H}_a(\bar{s}) = H_a(s) \left|_{s = \frac{\bar{s}^2 + \bar{\Omega}_0^2}{\bar{s}B}}$$

6) 通过双线性变化法将模拟带通滤波器转换成数字带通滤波器:

$$H(z) = \bar{H}_a(\bar{s}) \left|_{\bar{s} = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = H_a(s) \left|_{s = \frac{4(1-z^{-1})^2 + \bar{\Omega}_0^2(1+z^{-1})^2}{2(1-z^{-2})B}}$$

$$= \frac{0.021(1 - 2z^{-2} + z^{-4})}{1 - 1.491z^{-1} + 2.848z^{-2} - 1.68z^{-3} + 1.273z^{-4}}$$

◆ 模拟低通到数字带通的直接变换:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=D \frac{1-Ez^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}}}$$

其中: $D = \Omega_c \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right)$

$$E = 2 \frac{\cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right)} = 2 \cos \omega_0$$

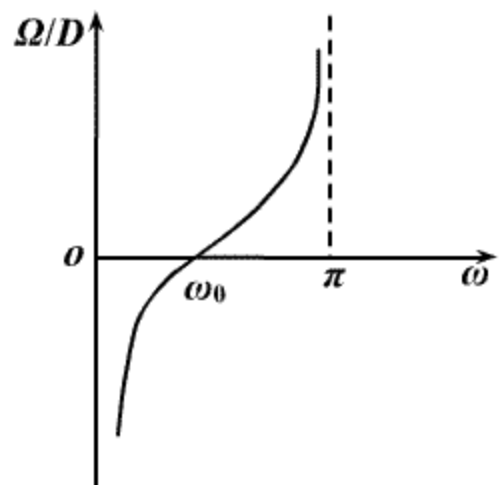


图6-28 从模拟低通变换到数字带通是频率间关系的曲线

$$\Omega = D \frac{\cos \omega_0 - \cos \omega}{\sin \omega}$$

例：设计一个采样频率为 $f_s=1\text{kHz}$ 的数字带通滤波器，其性能要求为：通带范围从200Hz到250Hz，在此两频率处衰减不大于3dB，在100Hz和400Hz频率处衰减不得小于20dB，采用巴特沃斯型滤波器。

解：先求出所设计数字滤波器的技术指标：

$$\omega_2 = \Omega_2 T = \frac{\Omega_2}{f_s} = \frac{2\pi \times 250}{1000} = 0.5\pi \quad \omega_{st2} = \Omega_{st2} T = \frac{\Omega_{st2}}{f_s} = \frac{2\pi \times 400}{1000} = 0.8\pi \quad \delta_1 = 3\text{dB}$$

$$\omega_1 = \Omega_1 T = \frac{\Omega_1}{f_s} = \frac{2\pi \times 200}{1000} = 0.4\pi \quad \omega_{st1} = \Omega_{st1} T = \frac{\Omega_{st1}}{f_s} = \frac{2\pi \times 100}{1000} = 0.2\pi \quad \delta_2 = 20\text{dB}$$

可求得： $D = \Omega_c \cdot \text{ctg}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) = \Omega_c \cdot \text{ctg}\left(\frac{0.5\pi - 0.4\pi}{2}\right) = \Omega_c \cdot \text{ctg}(0.05\pi)$

令 $\Omega_c = 1\text{rad/s}$ ，则 $D = 6.313751515$

同样可得：

$$E = 2 \cos \omega_0 = 2 \frac{\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)} = 0.31676888$$

设 λ_{s1} 为归一化模拟低通原型的阻带起始频率；则由频率对应关系，可得：

取

$$\lambda_{s1} = D \frac{\cos \omega_0 - \cos \omega_{st1}}{\sin \omega} = -6.98883225 \quad \lambda_{s2} = D \frac{\cos \omega_0 - \cos \omega_{st2}}{\sin \omega} = 10.39143462$$

$$\lambda_s = \min(|\lambda_{s1}|, |\lambda_{s2}|) = 6.98883225 \quad k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\delta_1} - 1}{10^{0.1\delta_2} - 1}} = 0.10026542$$

$$N = -\lg k_{sp} / \lg \lambda_{sp} = 1.1829 \quad \text{取 } N = 2$$

查表可得二阶归一化模拟低通巴特沃斯滤波器：

所设计带通滤波器：
$$H_{an}(s) = \frac{1}{1 + 1.4142136s + s^2}$$

$$H(z) = H_{an}(s) \Big|_{s=D \frac{1-Ez^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}}} = \frac{0.02025069(1-z^{-2})^2}{1 - 0.5636968z^{-1} + 1.639294z^{-2} - 0.4496743z^{-3} + 0.6400452z^{-4}}$$

3、模拟低通—模拟带阻

- 变换关系:

$$s = \frac{\bar{\Omega}_0^2 \bar{s}}{\bar{s}^2 + \bar{\Omega}_0^2}$$

$$\Omega = \frac{\bar{\Omega}_0^2 \bar{\Omega}}{\bar{\Omega}_0^2 - \bar{\Omega}^2}$$

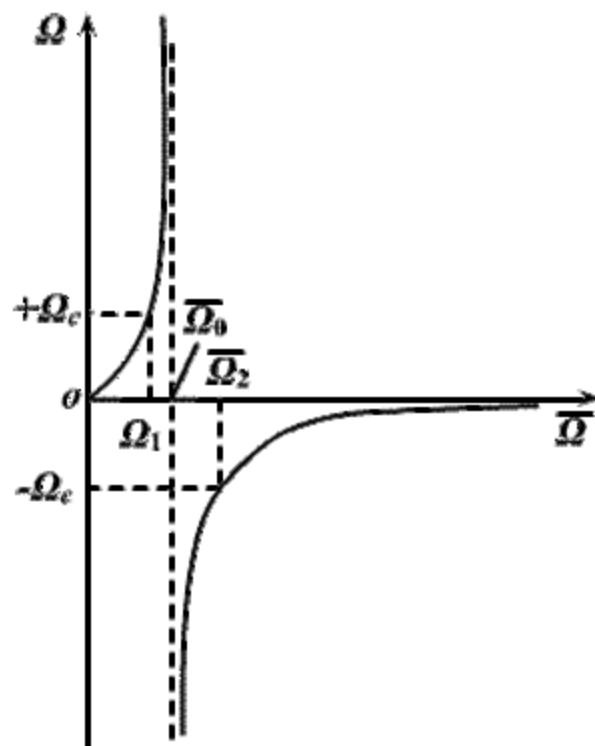


图6-29 模拟低通滤波器到模拟带阻滤波器频率的变换关系

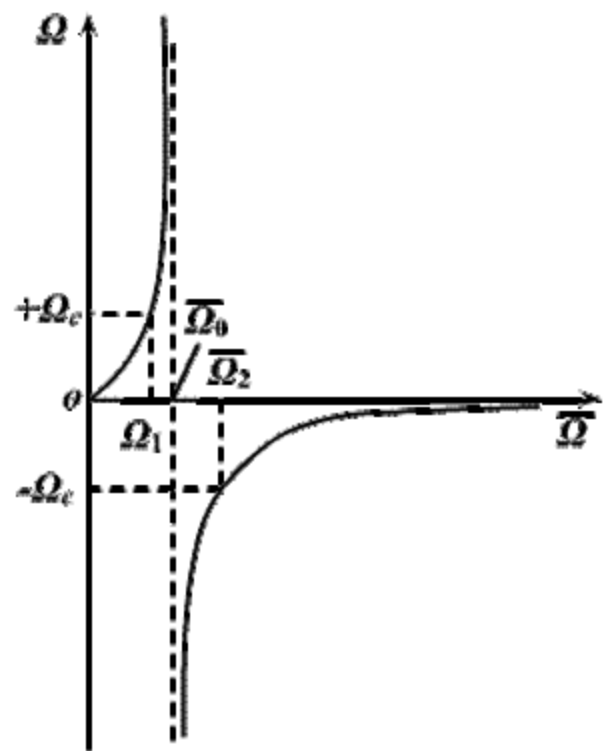


图6-29 模拟低通滤波器到模拟带阻滤波器频率的变换关系

$$\Omega = \frac{\bar{\Omega}_0^2 \bar{\Omega}}{\bar{\Omega}_0^2 - \bar{\Omega}^2}$$

λ :	$-\infty$	$-\lambda_s$	$-\lambda_c$	0	0	λ_c	λ_s	∞
Ω :	$-\infty$	$-\Omega_s$	$-\Omega_c$	0	0	Ω_c	Ω_s	∞
$\bar{\Omega}$:	$\bar{\Omega}_0$	$\bar{\Omega}_{s2}$	$\bar{\Omega}_2$	∞	0	$\bar{\Omega}_1$	$\bar{\Omega}_{s1}$	$\bar{\Omega}_0$
η :	η_0	η_{s2}	η_2	∞	0	η_1	η_{s1}	η_0

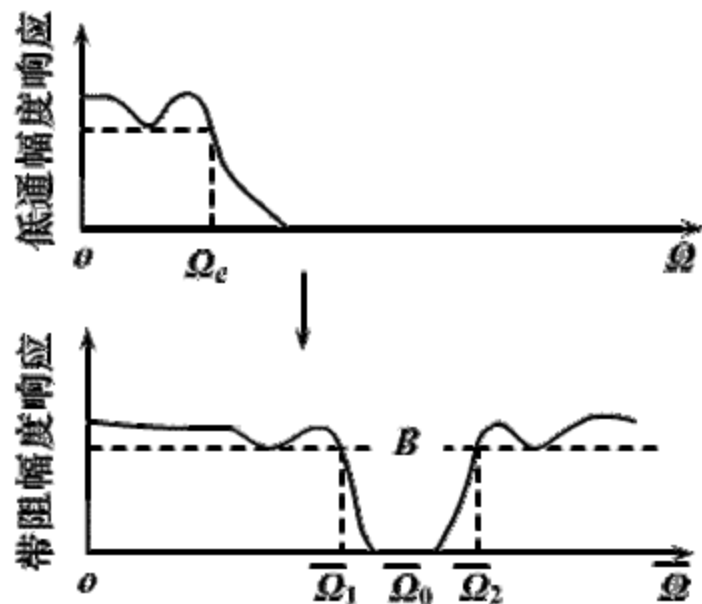


图6-30 低通幅度响应到带阻幅度响应的变换

$$\Omega = \frac{\bar{\Omega}_0^2 \bar{\Omega}}{\bar{\Omega}_0^2 - \bar{\Omega}^2} \quad -\Omega_c \leftrightarrow \bar{\Omega}_2 \quad \Omega_c \leftrightarrow \bar{\Omega}_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Omega_c = \frac{\bar{\Omega}_0^2 \bar{\Omega}_2}{\bar{\Omega}_0^2 - \bar{\Omega}_2^2} \\ \Omega_c = \frac{\bar{\Omega}_0^2 \bar{\Omega}_1}{\bar{\Omega}_0^2 - \bar{\Omega}_1^2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_0^2 = \bar{\Omega}_1 \bar{\Omega}_2 \\ B = \bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega}_0^2 / \Omega_c \end{array} \right.$$

$\bar{\Omega}_0$ 为阻带几何对称中心角频率

B 为阻带带宽

$$s = \frac{\bar{\Omega}_0^2 \bar{s}}{\bar{s}^2 + \bar{\Omega}_0^2} \quad \Omega = \frac{\bar{\Omega}_0^2 \bar{\Omega}}{\bar{\Omega}_0^2 - \bar{\Omega}^2} \quad \begin{cases} \bar{\Omega}_0^2 = \bar{\Omega}_1 \bar{\Omega}_2 \\ B = \bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega}_0^2 / \Omega_c \end{cases}$$

■ 归一化变换:

$$s \leftarrow \frac{s}{\Omega_c} = \frac{\bar{\Omega}_0^2 \bar{s}}{(\bar{s}^2 + \bar{\Omega}_0^2) \Omega_c} \quad s = \frac{\bar{s} B}{\bar{s}^2 + \bar{\Omega}_0^2}$$

$$\frac{\Omega}{\Omega_c} = \frac{\bar{\Omega}_0^2 \bar{\Omega}}{(\bar{\Omega}_0^2 - \bar{\Omega}^2) \Omega_c} = \frac{B \bar{\Omega}}{\bar{\Omega}_0^2 - \bar{\Omega}^2}$$

$$= \frac{B \bar{\Omega} / B^2}{(\bar{\Omega}_0^2 - \bar{\Omega}^2) / B^2}$$

$$\lambda = \frac{\eta}{\eta_0^2 - \eta^2}$$

其中: $\lambda = \Omega / \Omega_c$ $\eta = \bar{\Omega} / B$ $\eta_0^2 = \eta_1 \eta_2$

◆ 模拟低通到数字带阻的直接变换:

$$H(z) = H_a(s) \left|_{s = \frac{D_1(1-z^{-2})}{1-E_1z^{-1}+z^{-2}}}\right.$$

其中: $D_1 = \Omega_c \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)$

$$E_1 = 2 \frac{\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)} = 2 \cos \omega_0$$

$$\Omega = D_1 \frac{\sin \omega}{\cos \omega - \cos \omega_0}$$

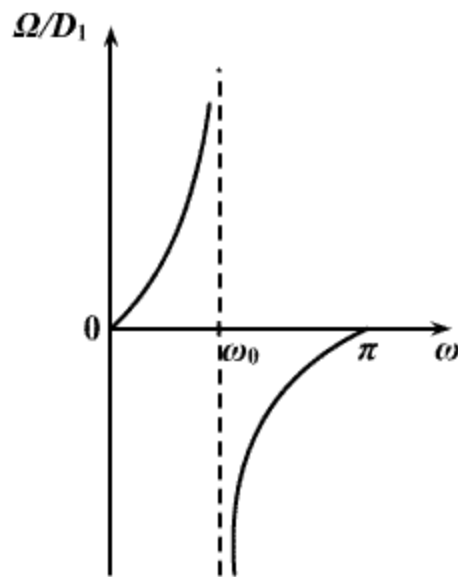


图6-31 从模拟低通变换到数字带阻时, 频率间关系的曲线

4、模拟低通—模拟高通

- 变换关系:

$$s = \frac{\Omega_c \bar{\Omega}_c}{\bar{s}}$$

$$\Omega = -\frac{\Omega_c \bar{\Omega}_c}{\bar{\Omega}}$$

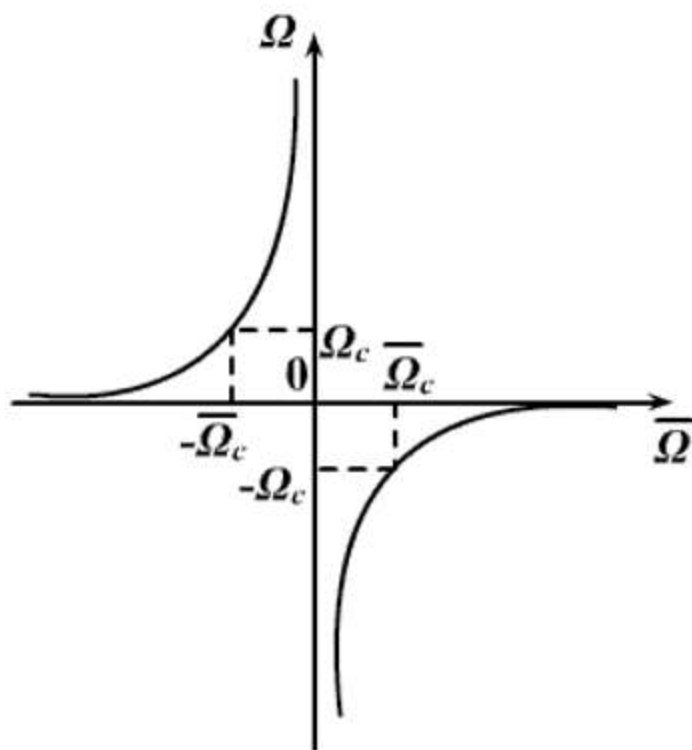


图6-32 模拟低通滤波器到模拟高通滤波器频率的变换关系

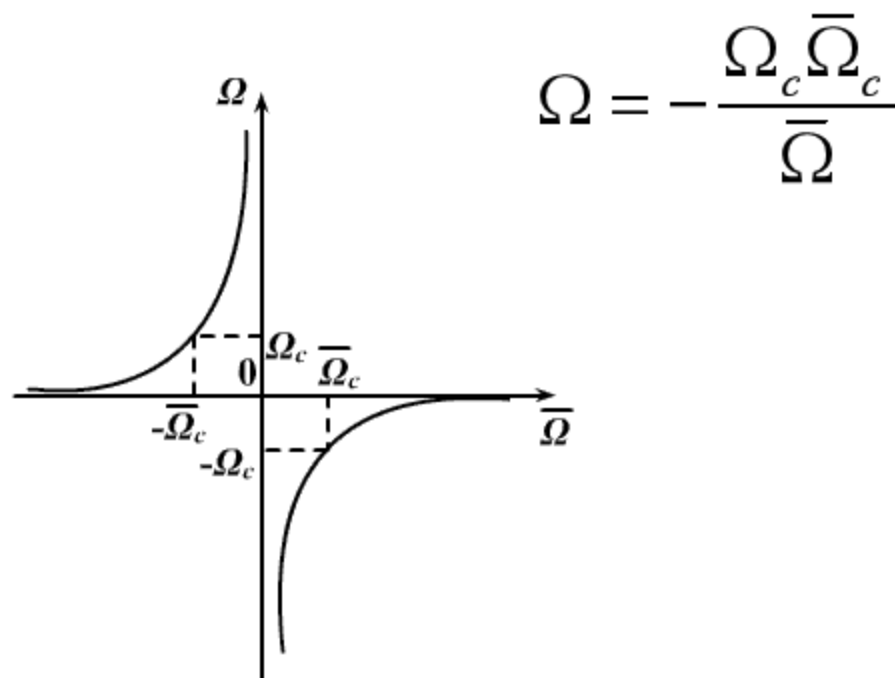


图6-32 模拟低通滤波器到模拟高通滤波器频率的变换关系

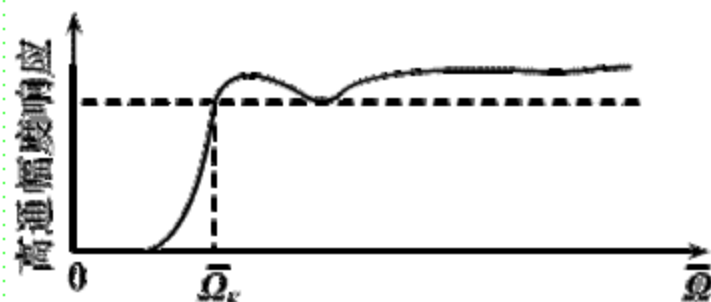
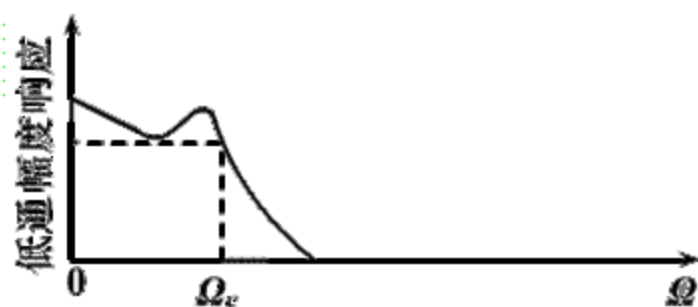


图5-33 低通幅度响应到高通幅度响应的变换

λ :	$-\infty$	$-\lambda_s$	$-\lambda_c$	0	0	λ_c	λ_s	∞
Ω :	$-\infty$	$-\Omega_s$	$-\Omega_c$	0	0	Ω_c	Ω_s	∞
$\bar{\Omega}$:	0	$\bar{\Omega}_s$	$\bar{\Omega}_c$	∞	$-\infty$	$-\bar{\Omega}_c$	$-\bar{\Omega}_s$	0
η :	0	η_s	η_c	∞	$-\infty$	$-\eta_c$	$-\eta_s$	0

$$s = \frac{\Omega_c \bar{\Omega}_c}{\bar{s}} \quad \Omega = -\frac{\Omega_c \bar{\Omega}_c}{\bar{\Omega}}$$

■ 归一化变换:

$$s = \frac{\bar{\Omega}_c}{\bar{s}} \quad \lambda = -\frac{1}{\eta}$$

其中: $\lambda = \Omega / \Omega_c$ $\eta = \bar{\Omega} / \bar{\Omega}_c$

◆ 模拟低通到数字高通的直接变换:

$$H(z) = H_a(s) \Bigg|_{s=C_1 \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}}$$

其中: $C_1 = \Omega_c \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c}{2}\right)$

$$\Omega = C_1 \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

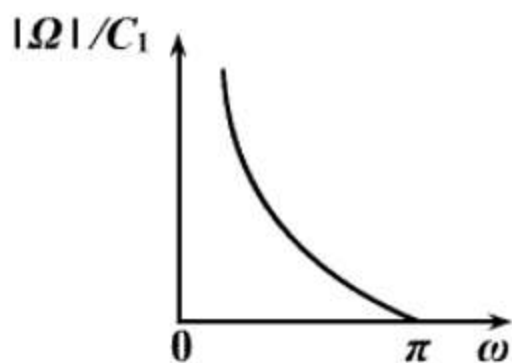
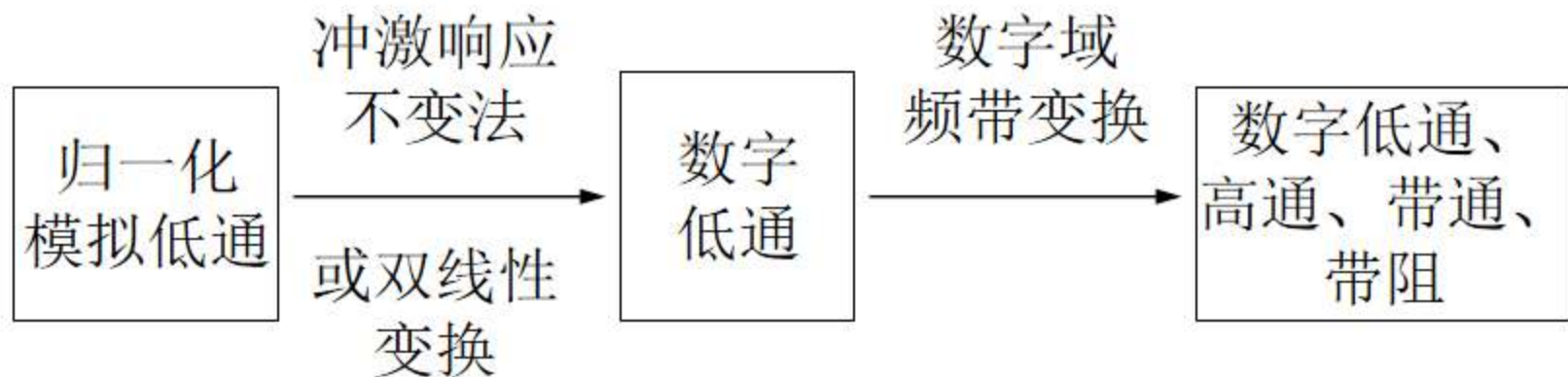


图6-34 从模拟低通变换到数字高通时
频率间关系的曲线

十一、数字域频带变换法



z 平面 \longrightarrow Z 平面

$H_L(z)$ \longrightarrow $H_d(Z)$

$= H_L(z)_{z^{-1}=G(Z^{-1})}$

要求:

- 1) z 平面单位圆 \rightarrow Z 平面单位圆
- 2) 保持因果稳定: z 平面单位圆内 \rightarrow Z 平面单位圆内
- 3) 系统函数 $G(Z^{-1})$ 是 Z^{-1} 的有理函数

$$H_d(Z) = H_L(z)_{z^{-1}=G(Z^{-1})}$$

$$\text{令 } z = e^{j\theta}, \quad Z = e^{j\omega}$$

$$\text{则: } z^{-1} = e^{-j\theta} = G(Z^{-1}) = G(e^{-j\omega}) = |G(e^{-j\omega})| e^{j \arg[G(e^{-j\omega})]}$$

$$\text{即: } \begin{cases} |G(e^{-j\omega})| = 1 \\ \theta = -\arg[G(e^{-j\omega})] \end{cases} \quad \text{为全通函数}$$

$$z^{-1} = G(Z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^N \frac{Z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k Z^{-1}}$$

$$\text{极点: } a_k, |a_k| < 1$$

$$\text{零点: } 1/a_k^*$$

$$\text{阶数: } N$$

$$\omega: 0 \rightarrow \pi \quad \Delta \arg[G(e^{-j\omega})] = N\pi$$

选择合适的 N , a_k , 即得各类变换

1、数字低通 — 数字低通

$$\omega : 0 \rightarrow \pi \quad \theta : 0 \rightarrow \pi \quad \therefore N = 1$$

$$\therefore z^{-1} = G(Z^{-1}) = \frac{Z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha Z^{-1}}$$

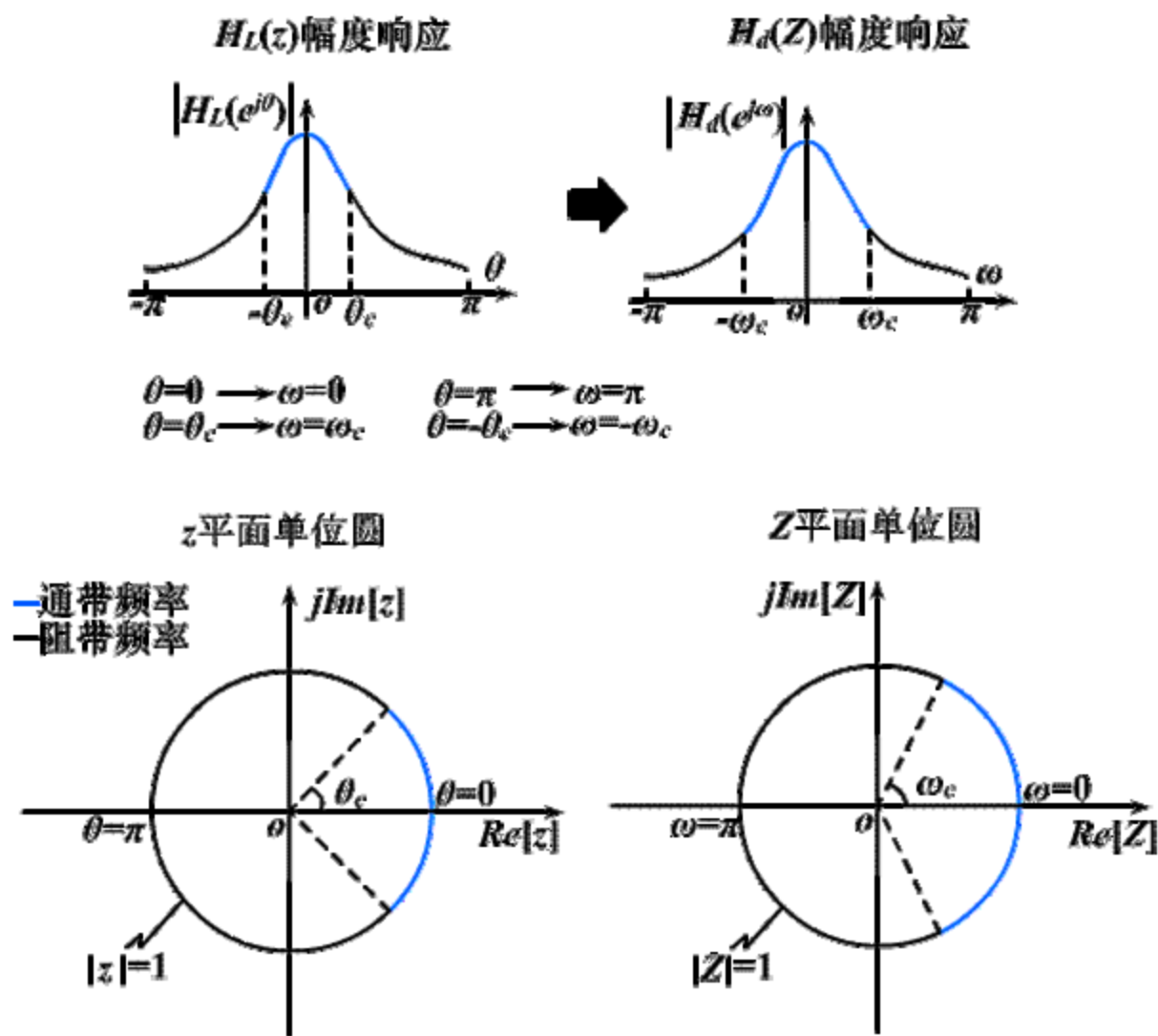
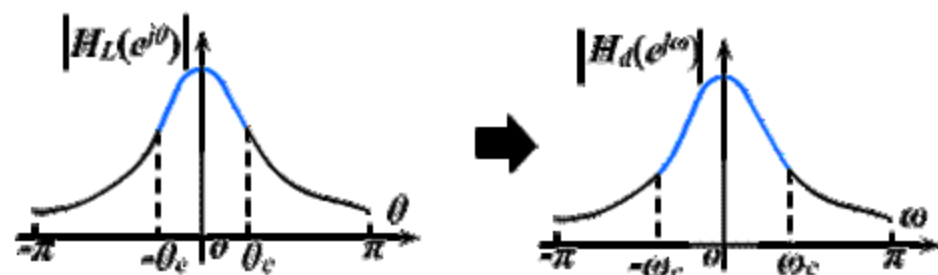


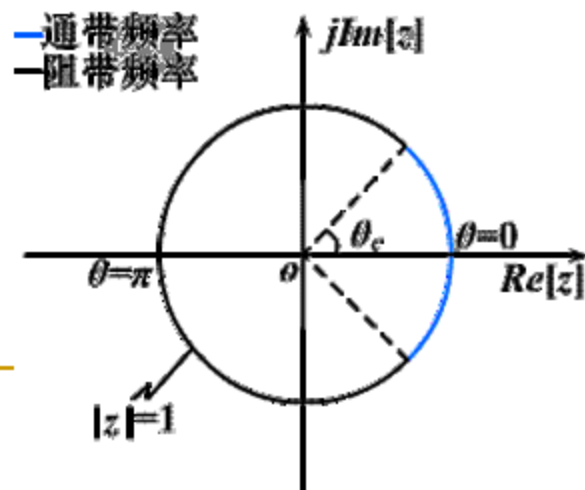
图6-35 数字低通-数字低通的变换

$Z:$	-1	$e^{-j\omega_c}$	1	1	$e^{j\omega_c}$	-1
$\omega:$	$-\pi$	$-\omega_c$	0	0	ω_c	π
$\theta:$	$-\pi$	$-\theta_c$	0	0	θ_c	π
	$H_L(z)$ 幅度响应			$H_d(Z)$ 幅度响应		

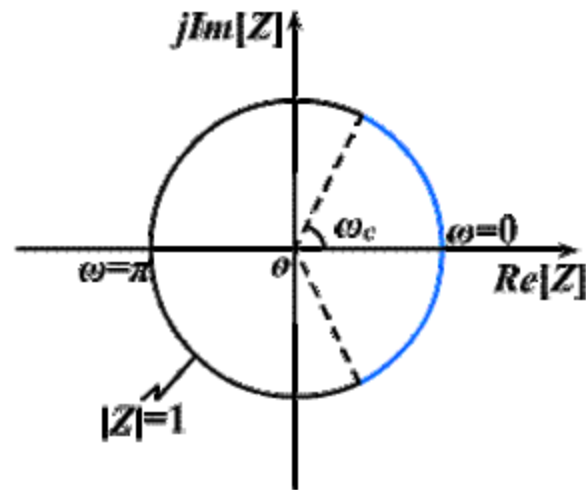


$\theta=0 \rightarrow \omega=0$	$\theta=\pi \rightarrow \omega=\pi$
$\theta=\theta_c \rightarrow \omega=\omega_c$	$\theta=-\theta_c \rightarrow \omega=-\omega_c$

z 平面单位圆



Z 平面单位圆



$$z^{-1} = G(Z^{-1}) = \frac{Z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha Z^{-1}} \quad \theta_c \leftrightarrow \omega_c$$

由

$$e^{-j\theta_c} = \frac{e^{-j\omega_c} - \alpha}{1 - \alpha e^{-j\omega_c}}$$

得：

$$\alpha = \frac{\sin \frac{\theta_c - \omega_c}{2}}{\sin \frac{\theta_c + \omega_c}{2}}$$

$\alpha > 0$ 频率压缩

$\alpha < 0$ 频率扩张

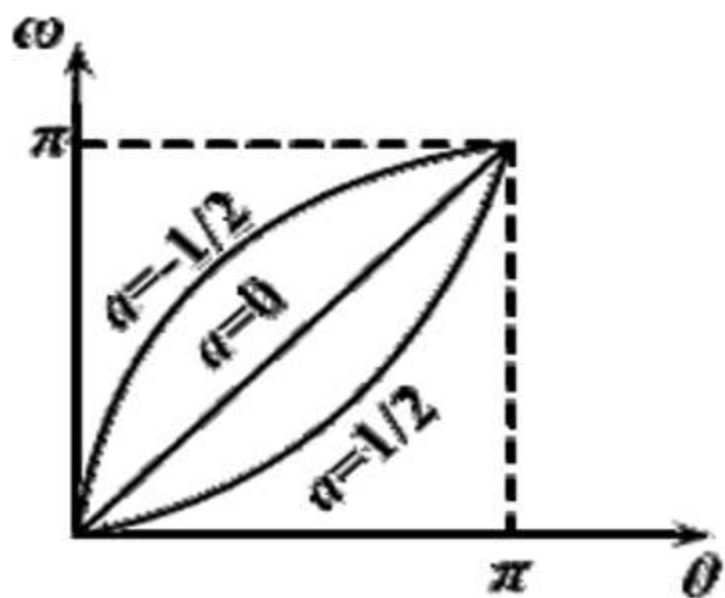


图6-36 数字低通-数字低通变换的频率间非线性关系

2、数字低通 — 数字高通

低通频率响应在单位圆上旋转 180° ，即得高通频率响应：

$$Z \rightarrow -Z$$

$$z^{-1} = G(Z^{-1}) = \frac{-Z^{-1} - \alpha}{1 + \alpha Z^{-1}} = -\frac{Z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha Z^{-1}}$$

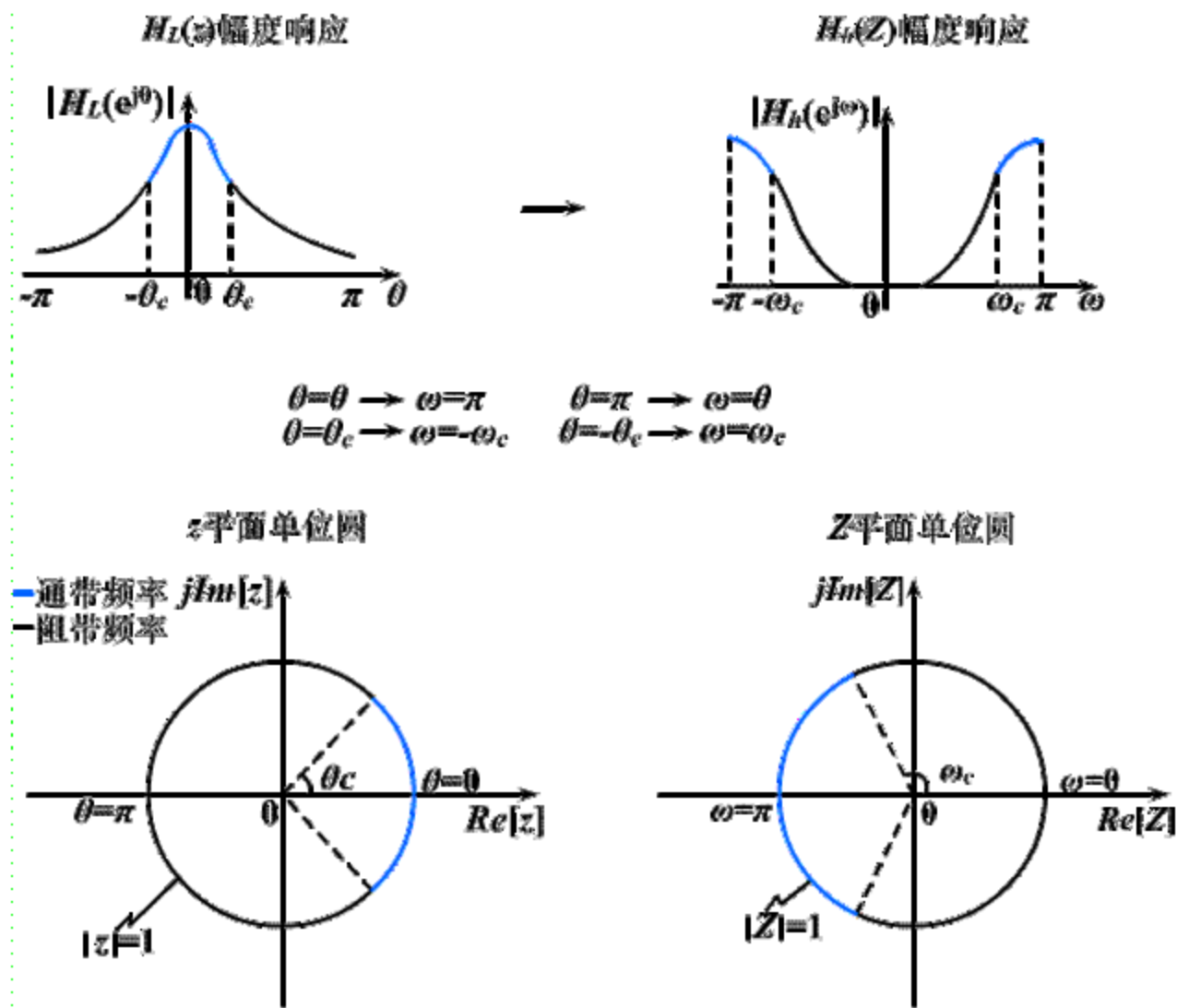
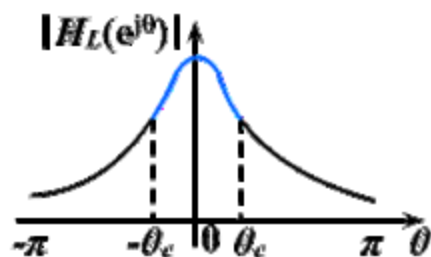


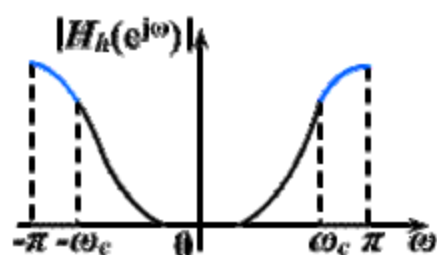
图6-37 数字低通-数字高通的变换

$Z:$	-1	$e^{-j\omega_c}$	1	1	$e^{j\omega_c}$	-1
$\omega:$	$-\pi$	$-\omega_c$	0	0	ω_c	π
$\theta:$	0	θ_c	π	$-\pi$	$-\theta_c$	0
$z:$	1	$e^{j\theta_c}$	-1	-1	$e^{-j\theta_c}$	1

$H_L(z)$ 幅度响应

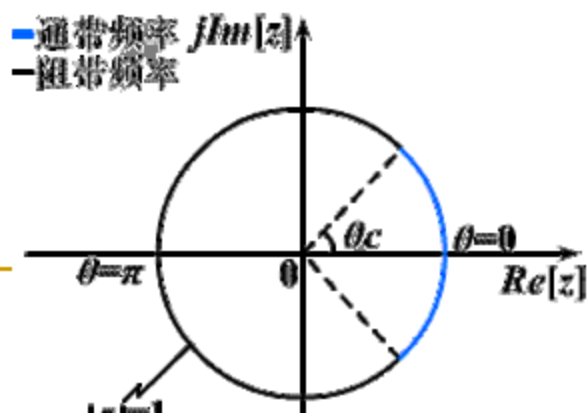


$H_b(Z)$ 幅度响应

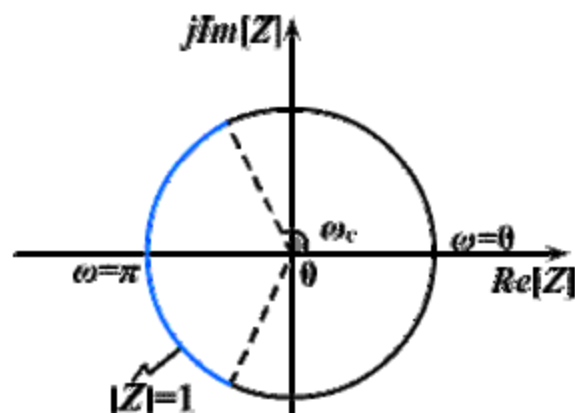


$$\begin{aligned} \theta=0 &\rightarrow \omega=\pi & \theta=\pi &\rightarrow \omega=0 \\ \theta=\theta_c &\rightarrow \omega=-\omega_c & \theta=-\theta_c &\rightarrow \omega=\omega_c \end{aligned}$$

z 平面单位圆



Z 平面单位圆



$$z^{-1} = G(Z^{-1}) = -\frac{Z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha Z^{-1}} \quad \theta_c \leftrightarrow -\omega_c$$

由
$$e^{-j\theta_c} = -\frac{e^{j\omega_c} + \alpha}{1 + \alpha e^{j\omega_c}}$$

得：
$$\alpha = -\frac{\cos \frac{\theta_c + \omega_c}{2}}{\cos \frac{\theta_c - \omega_c}{2}}$$

3、数字低通 — 数字带通

$$\omega : 0 \rightarrow \pi \quad \theta : -\pi \rightarrow \pi \quad \therefore N = 2$$

$$\therefore z^{-1} = G(Z^{-1}) = \pm \frac{Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + d_2}{d_2 Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + 1}$$

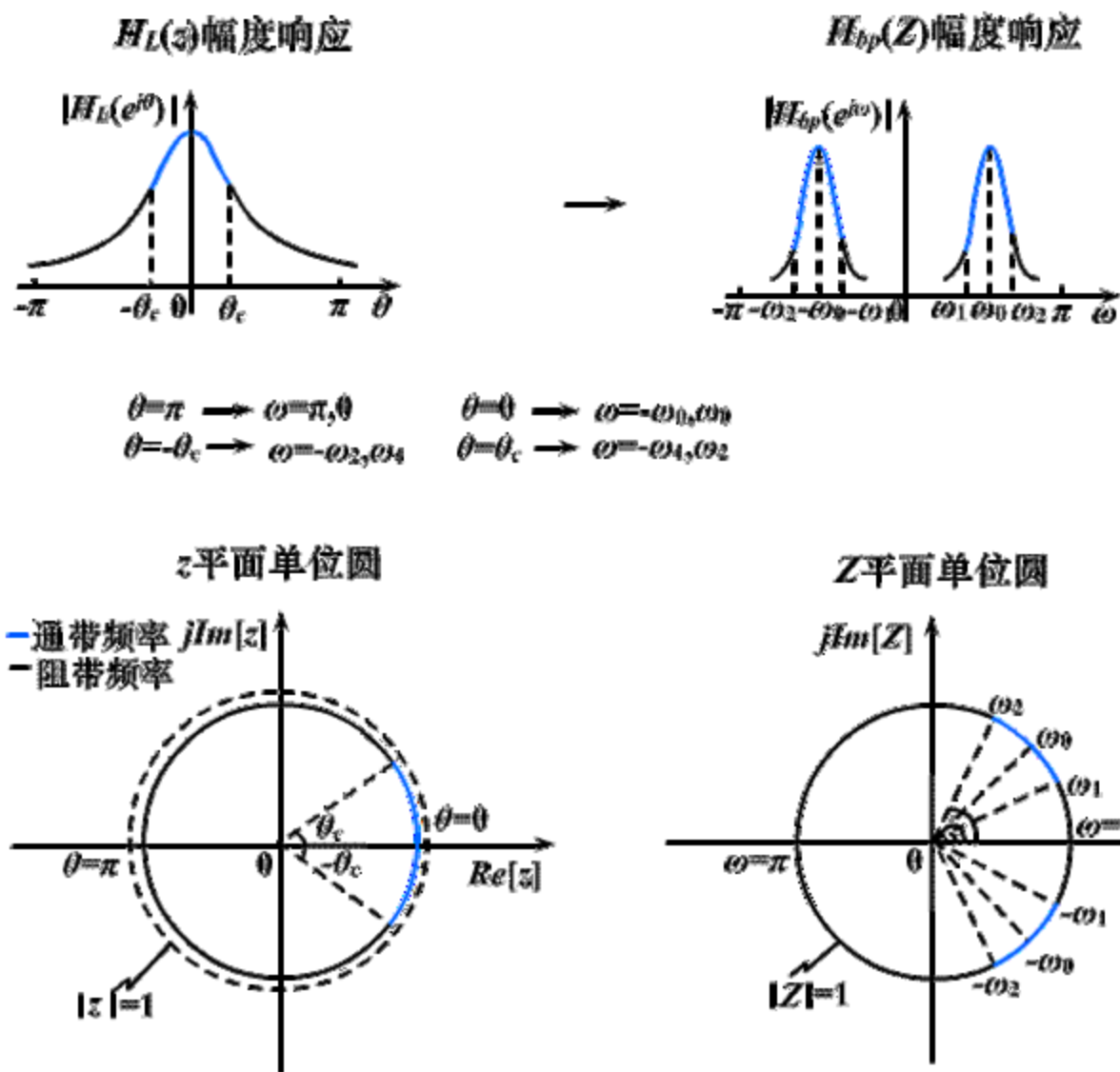
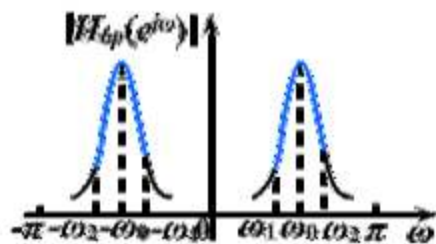
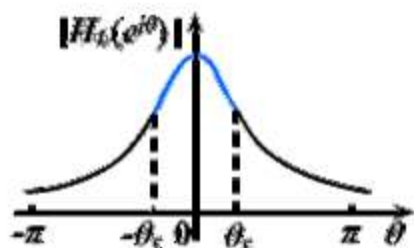


图 6-38 数字低通——数字带通的变换

$Z:$	-1	$e^{-j\omega_2}$	$e^{-j\omega_0}$	$e^{-j\omega_1}$	1	1	$e^{j\omega_1}$	$e^{j\omega_0}$	$e^{j\omega_2}$	-1
$\omega:$	$-\pi$	$-\omega_2$	$-\omega_0$	$-\omega_1$	0	0	ω_1	ω_0	ω_2	π
$\theta:$	$-\pi$	$-\theta_c$	0	θ_c	π	$-\pi$	$-\theta_c$	0	θ_c	π
$z:$	-1	$e^{-j\theta_c}$	1	$e^{j\theta_c}$	-1	-1	$e^{-j\theta_c}$	1	$e^{j\theta_c}$	-1

$H_d(z)$ 幅度响应

$H_{bp}(Z)$ 幅度响应



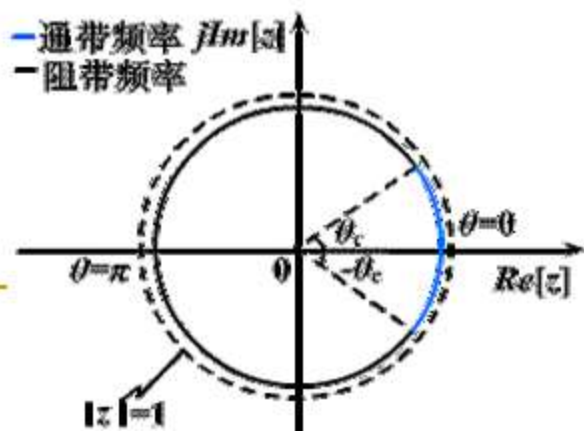
$\theta=\pi \rightarrow \omega=\pi, \theta$

$\theta=0 \rightarrow \omega=-\omega_0, \omega_0$

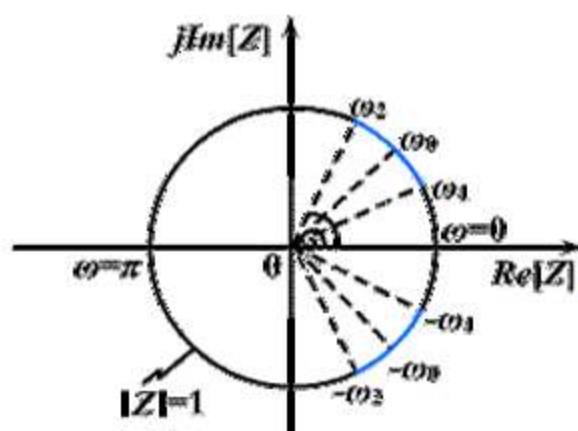
$\theta=-\theta_c \rightarrow \omega=-\omega_2, \omega_1$

$\theta=\theta_c \rightarrow \omega=-\omega_1, \omega_2$

z 平面单位圆



Z 平面单位圆



$$\therefore z^{-1} = G(Z^{-1}) = \pm \frac{Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + d_2}{d_2 Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + 1}$$

$$\text{由 } \begin{cases} z^{-1} = -1 \rightarrow Z^{-1} = -1 \\ z^{-1} = -1 \rightarrow Z^{-1} = 1 \end{cases}$$

得上式应取负号，即：

$$z^{-1} = -\frac{Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + d_2}{d_2 Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + 1}$$

$$z^{-1} = -\frac{Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + d_2}{d_2 Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + 1} \quad \theta_c \leftrightarrow \omega_2 \quad -\theta_c \leftrightarrow \omega_1$$

$$\text{由} \begin{cases} e^{j\theta_c} = -\frac{e^{-j2\omega_1} + d_1 e^{-j\omega_1} + d_2}{d_2 e^{-j2\omega_1} + d_1 e^{-j\omega_1} + 1} \\ e^{-j\theta_c} = -\frac{e^{-j2\omega_2} + d_1 e^{-j\omega_2} + d_2}{d_2 e^{-j2\omega_2} + d_1 e^{-j\omega_2} + 1} \end{cases}$$

$$\text{得} \quad d_1 = \frac{-2\alpha k}{k+1} \quad d_2 = \frac{k-1}{k+1}$$

$$\text{其中:} \quad k = \operatorname{tg} \frac{\theta_c}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \quad \alpha = \frac{\cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}}{\cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}} = \cos \omega_0$$

4、数字低通 — 数字带阻

$$\omega : 0 \rightarrow \pi \quad \theta : -\pi \rightarrow \pi \quad \therefore N = 2$$

$$\therefore z^{-1} = G(Z^{-1}) = \pm \frac{Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + d_2}{d_2 Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + 1}$$

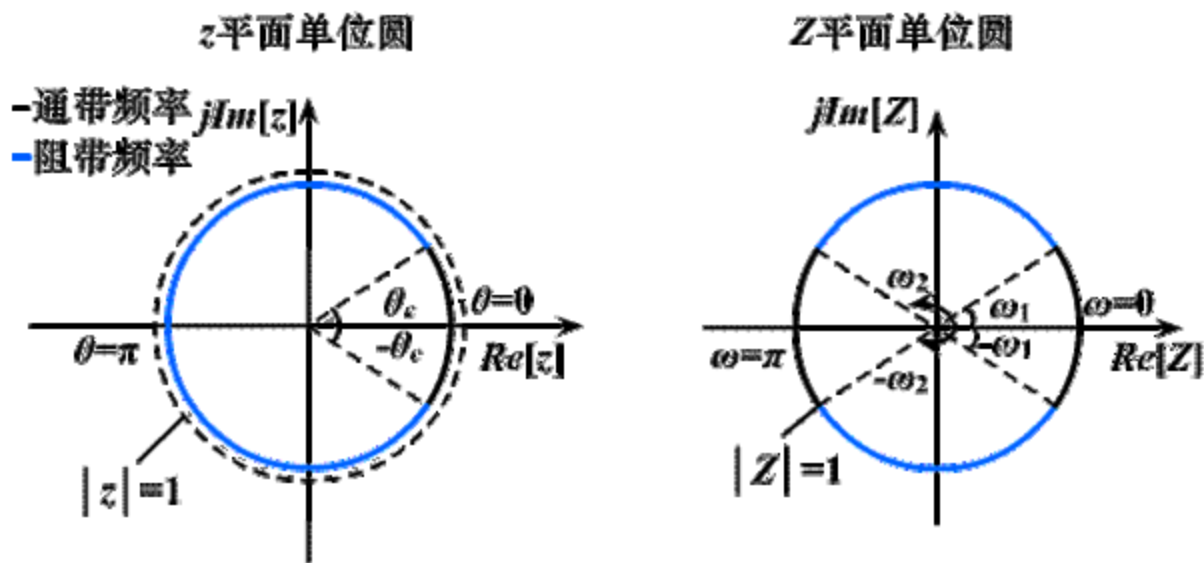
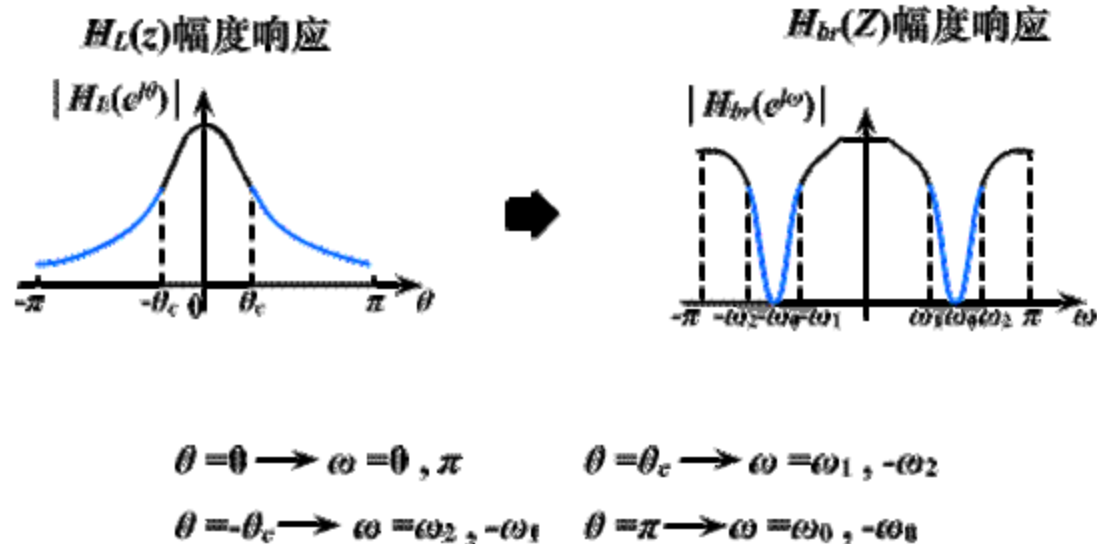
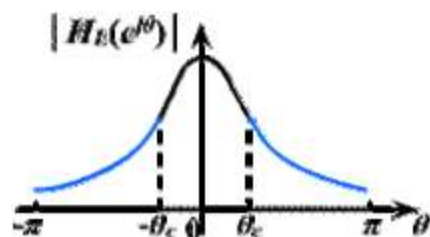


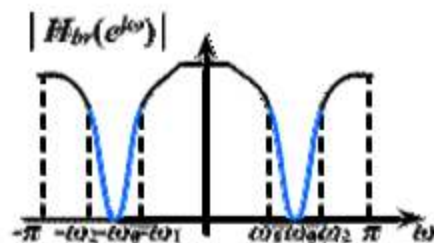
图6-39 数字低通—数字带阻的变换

Z :	-1	$e^{-j\omega_2}$	$e^{-j\omega_0}$	$e^{-j\omega_1}$	1	1	$e^{j\omega_1}$	$e^{j\omega_0}$	$e^{j\omega_2}$	-1
ω :	$-\pi$	$-\omega_2$	$-\omega_0$	$-\omega_1$	0	0	ω_1	ω_0	ω_2	π
θ :	0	θ_c	$\pm\pi$	$-\theta_c$	0	0	θ_c	$\pm\pi$	$-\theta_c$	0
z :	1	$e^{j\theta_c}$	-1	$e^{-j\theta_c}$	1	1	$e^{j\theta_c}$	-1	$e^{-j\theta_c}$	1

$H_L(z)$ 幅度响应



$H_{br}(Z)$ 幅度响应



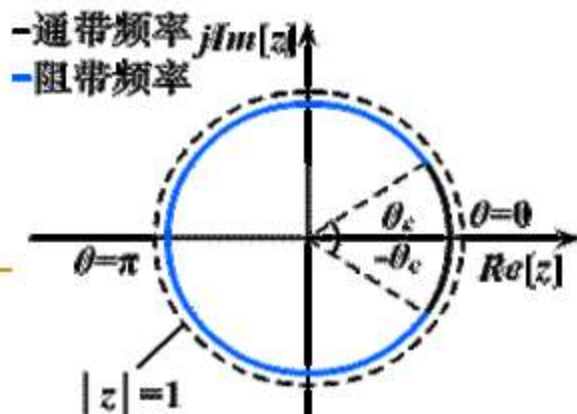
$$\theta = 0 \rightarrow \omega = 0, \pi$$

$$\theta = \theta_c \rightarrow \omega = \omega_1, -\omega_2$$

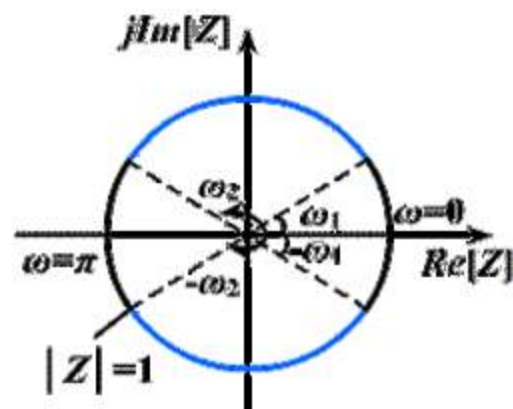
$$\theta = -\theta_c \rightarrow \omega = \omega_2, -\omega_1$$

$$\theta = \pi \rightarrow \omega = \omega_0, -\omega_0$$

z 平面单位圆



Z 平面单位圆



$$\therefore z^{-1} = G(Z^{-1}) = \pm \frac{Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + d_2}{d_2 Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + 1}$$

$$\text{由 } \begin{cases} z^{-1} = 1 \rightarrow Z^{-1} = -1 \\ z^{-1} = 1 \rightarrow Z^{-1} = 1 \end{cases}$$

得上式应取正号，即：

$$z^{-1} = \frac{Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + d_2}{d_2 Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + 1}$$

$$z^{-1} = \frac{Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + d_2}{d_2 Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + 1} \quad \theta_c \leftrightarrow \omega_1 \quad -\theta_c \leftrightarrow \omega_2$$

由

$$\begin{cases} e^{j\theta_c} = -\frac{e^{-j2\omega_2} + d_1 e^{-j\omega_2} + d_2}{d_2 e^{-j2\omega_2} + d_1 e^{-j\omega_2} + 1} \\ e^{-j\theta_c} = -\frac{e^{-j2\omega_1} + d_1 e^{-j\omega_1} + d_2}{d_2 e^{-j2\omega_1} + d_1 e^{-j\omega_1} + 1} \end{cases}$$

得

$$d_1 = \frac{-2\alpha}{1+k} \quad d_2 = \frac{1-k}{1+k}$$

$$\cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$$

z =

ω_2

ω_1

$\cos \omega_2$

共轭

z

z

z

z

5、数字低通 — 多通带

- 全通函数的阶数 N 为 $[-\pi, \pi]$ 内通带的数目
 - $\omega = 0$ 时是通带，全通函数取“+”号
 - $\omega = \pi$ 时是阻带，全通函数取“-”号