

第五讲

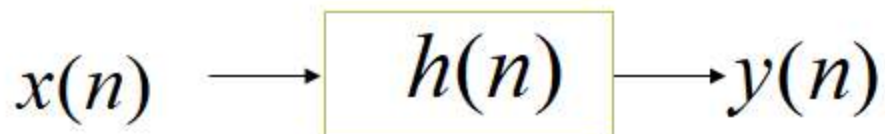
数字滤波器的基本结构

§ 5-1 数字滤波器结构的表示方法

一. 数字滤波器的概念

1. 滤波器:

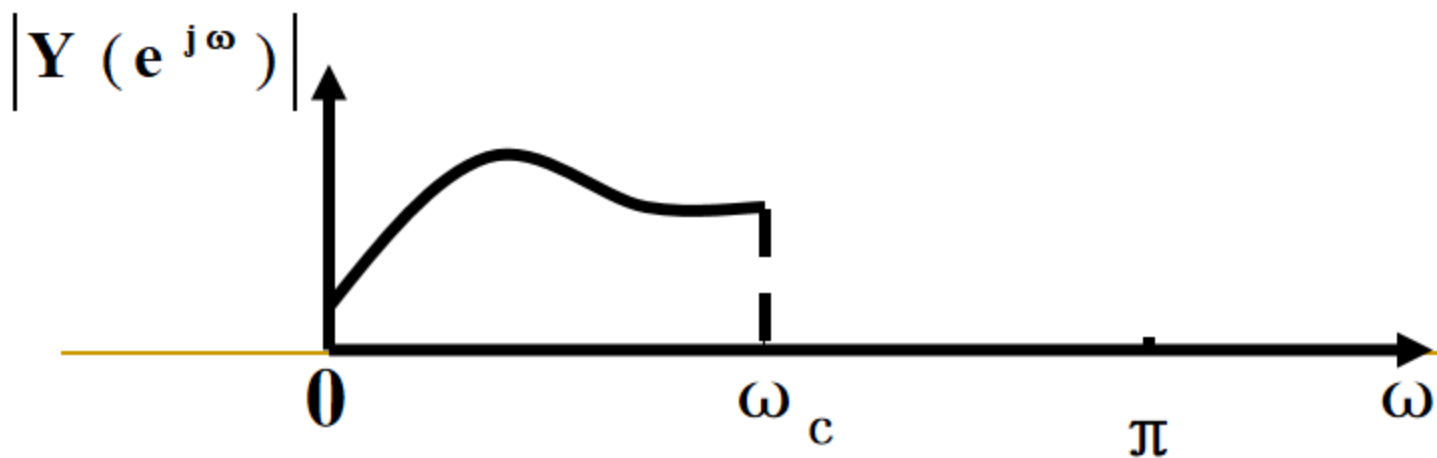
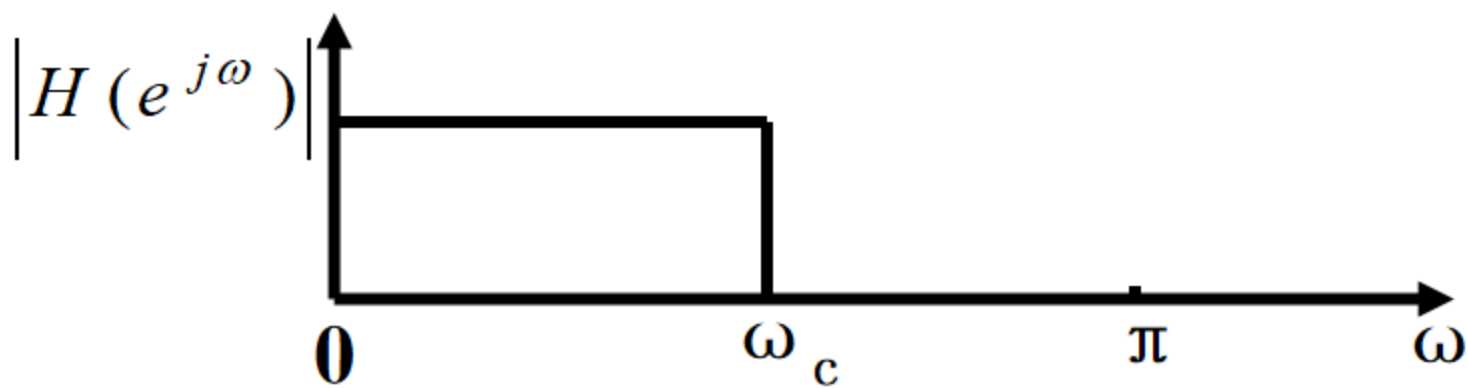
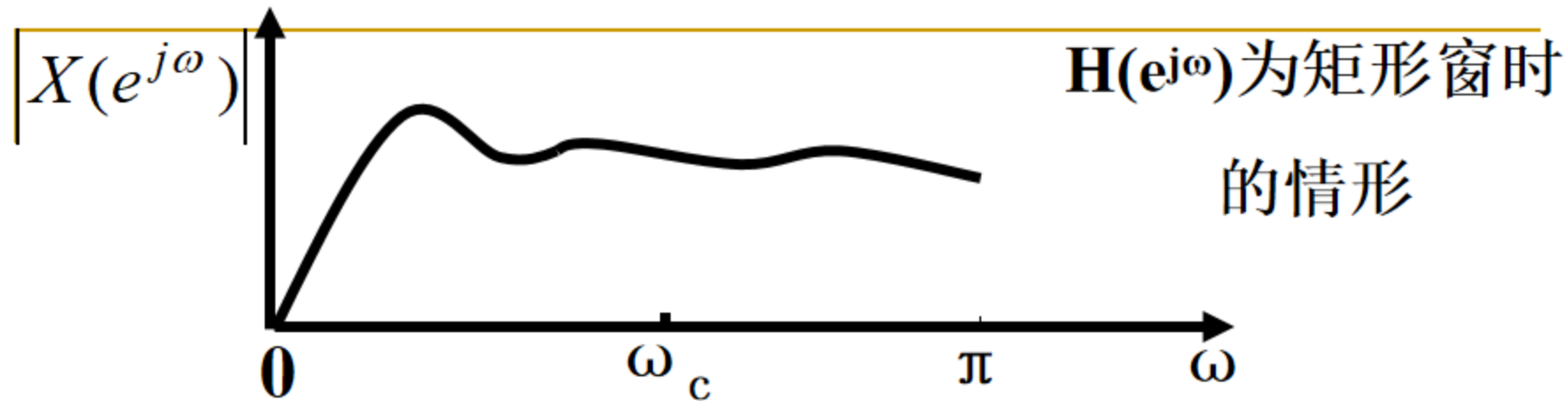
指对输入信号起滤波作用的装置。



$y(n) = x(n) * h(n)$, 对其进行傅氏变换得:

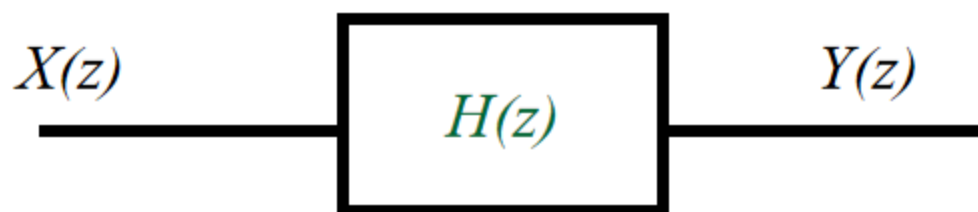
$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

2、当输入、输出是离散信号，滤波器的冲激响应是单位抽样响应 $h(n)$ 时，这样的滤波器称作数字滤波器。



1、系统函数

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$



2、差分方程

对上式进行 Z 反变换, 即得

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

3、滤波器的功能与实现

滤波就是对输入序列 $x(n)$ 进行一定的运算操作。

从而得到输出序列 $y(n)$

实现滤波从运算上看, 只需三种运算:

加法、单位延迟、乘常数。

因此实现的方法有两种:

(1) 利用通用计算机编程, 即软件实现;

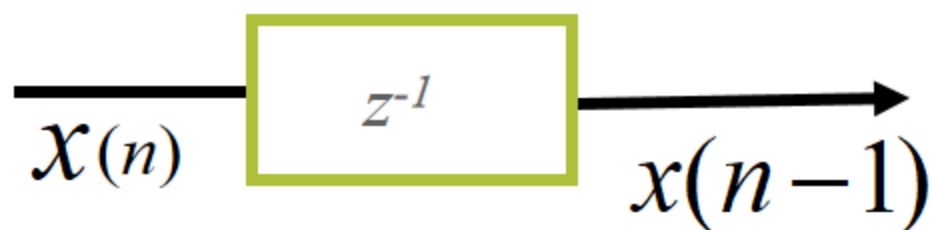
(2) 数字信号处理器 (DSP) 即专用硬件实现。

三、数字滤波器的结构表示法

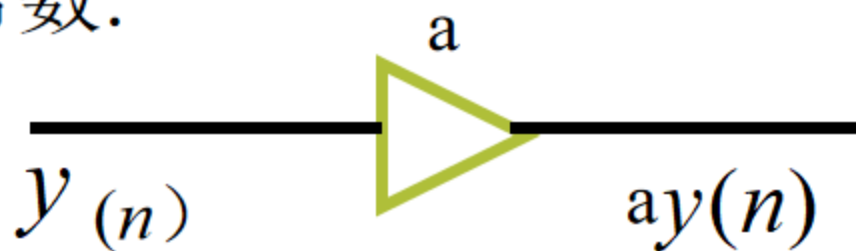
1、方框图法

方框图法简明且直观，其三种基本运算如下图所示：

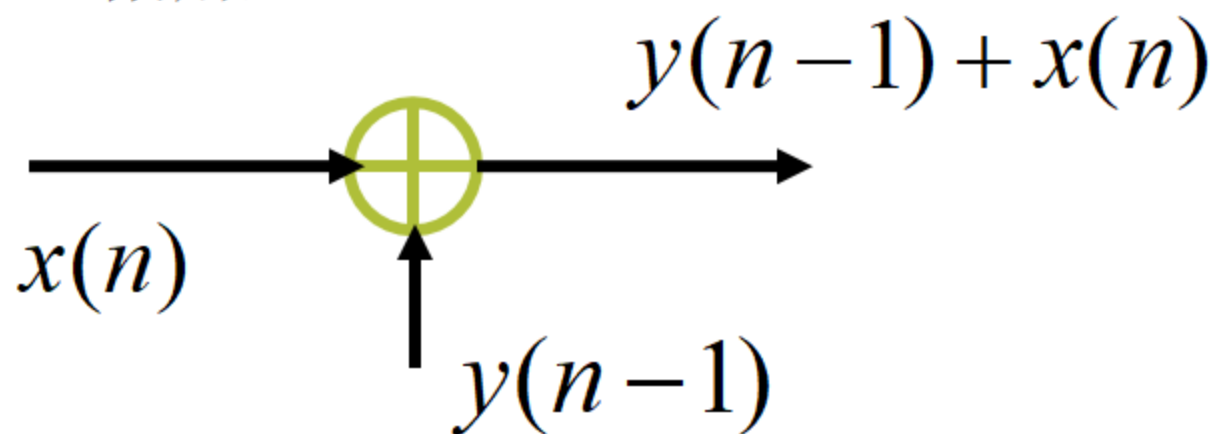
单位延时：



乘常数：

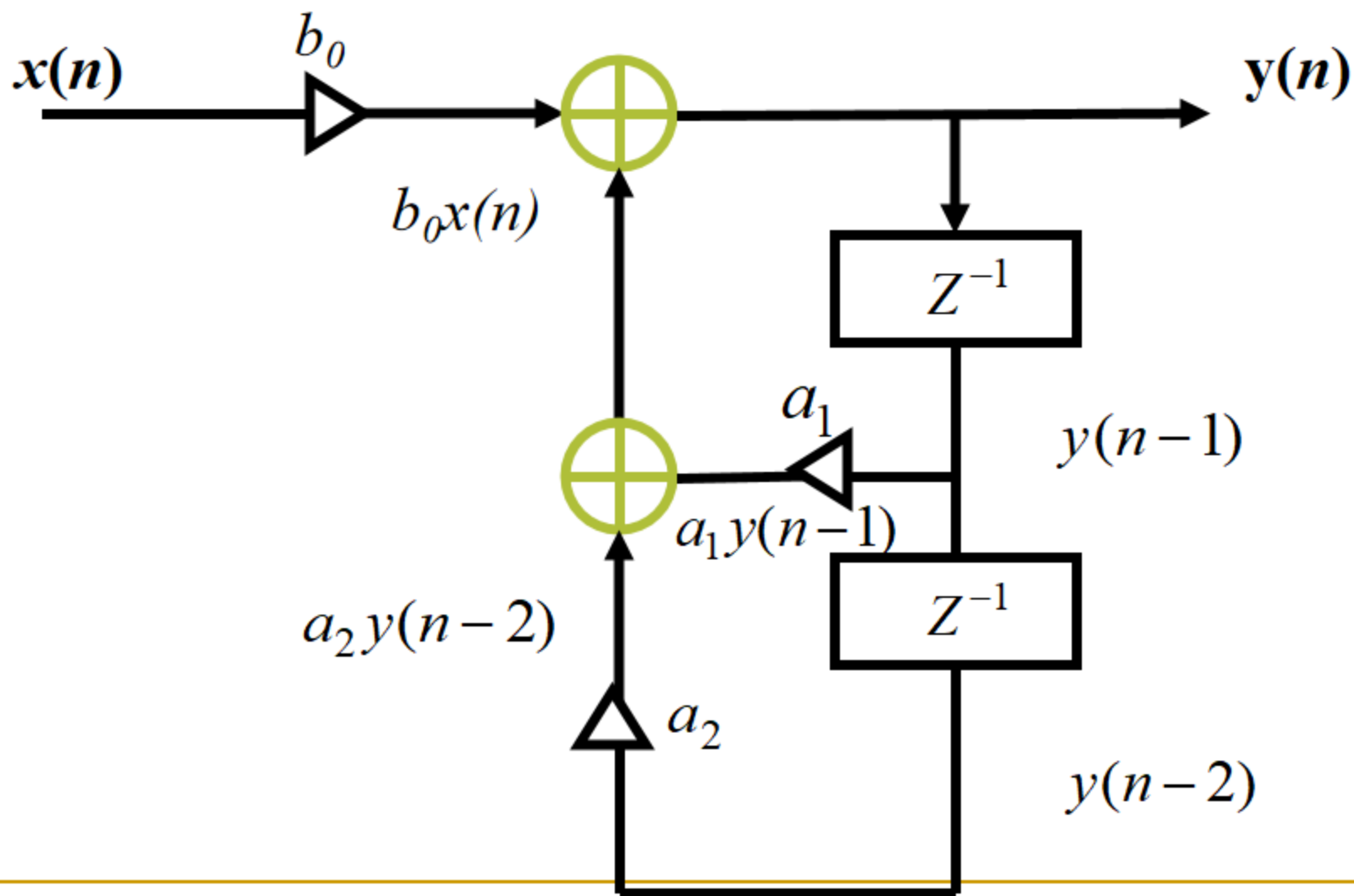


相加:



例如:

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + b_0 x(n)$$



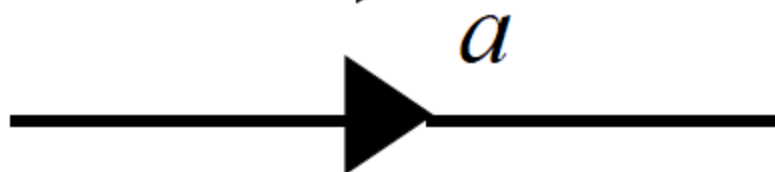
2、信号流图法

三种基本的运算：

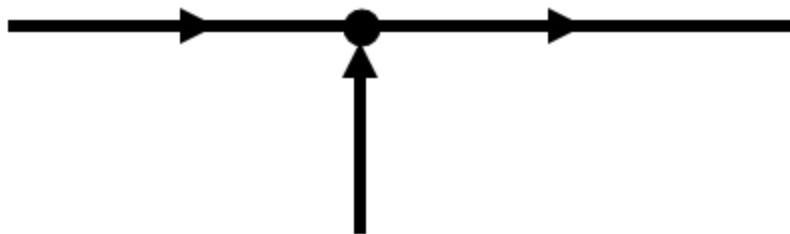
单位延时：



乘常数：



相加：

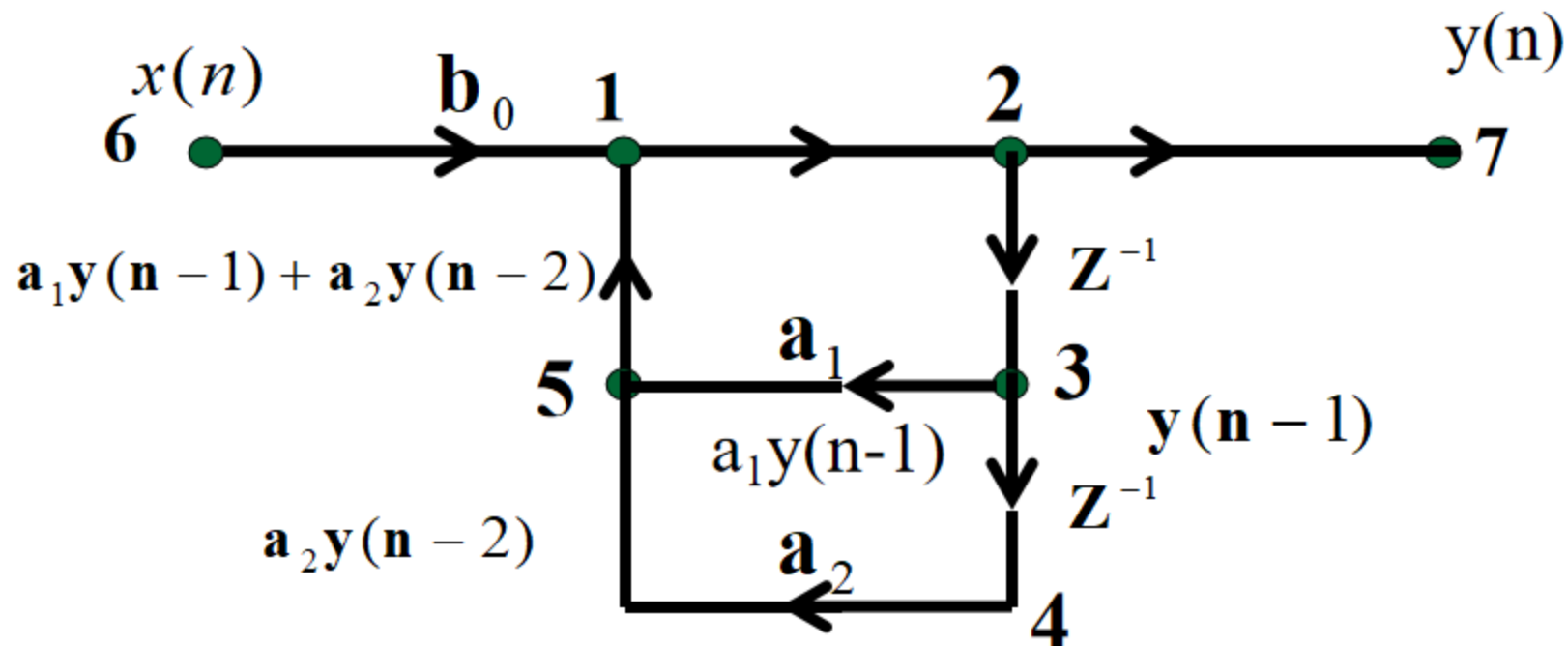


这种表示法更加简单方便。

几个基本概念：

- a) 输入节点或源节点, $x(n)$ 所处的节点;
 - b) 输出节点或阱节点, $y(n)$ 所处的节点;
 - c) 分支节点, 一个输入, 一个或一个以上输出的节点; 将值分配到每一支路;
 - d) 相加器 (节点) 或和点, 有两个或两个以上输入的节点。
- *支路不标传输系数时, 就认为其传输系数为1; 任何一节点值等于所有输入支路的信号之和。

例如, $y(n] = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + b_0 x(n)$



和点: 1, 5; 分点: 2, 3, 4; 源点: 6; 阱点: 7

§ 5-2 无限长单位冲激响（IIR）滤波器的基本结构

一、IIR滤波器的特点

- 1、单位冲激响应 $h(n)$ 是无限长的。
- 2、系统函数 $H(z)$ 在有限 Z 平面（ $0 < |z| < \infty$ ）上有极点存在。
- 3、结构上是递归型的，即存在着输出到输入的反馈。

(1) 系统函数

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

(2) 差分方程 (N阶)

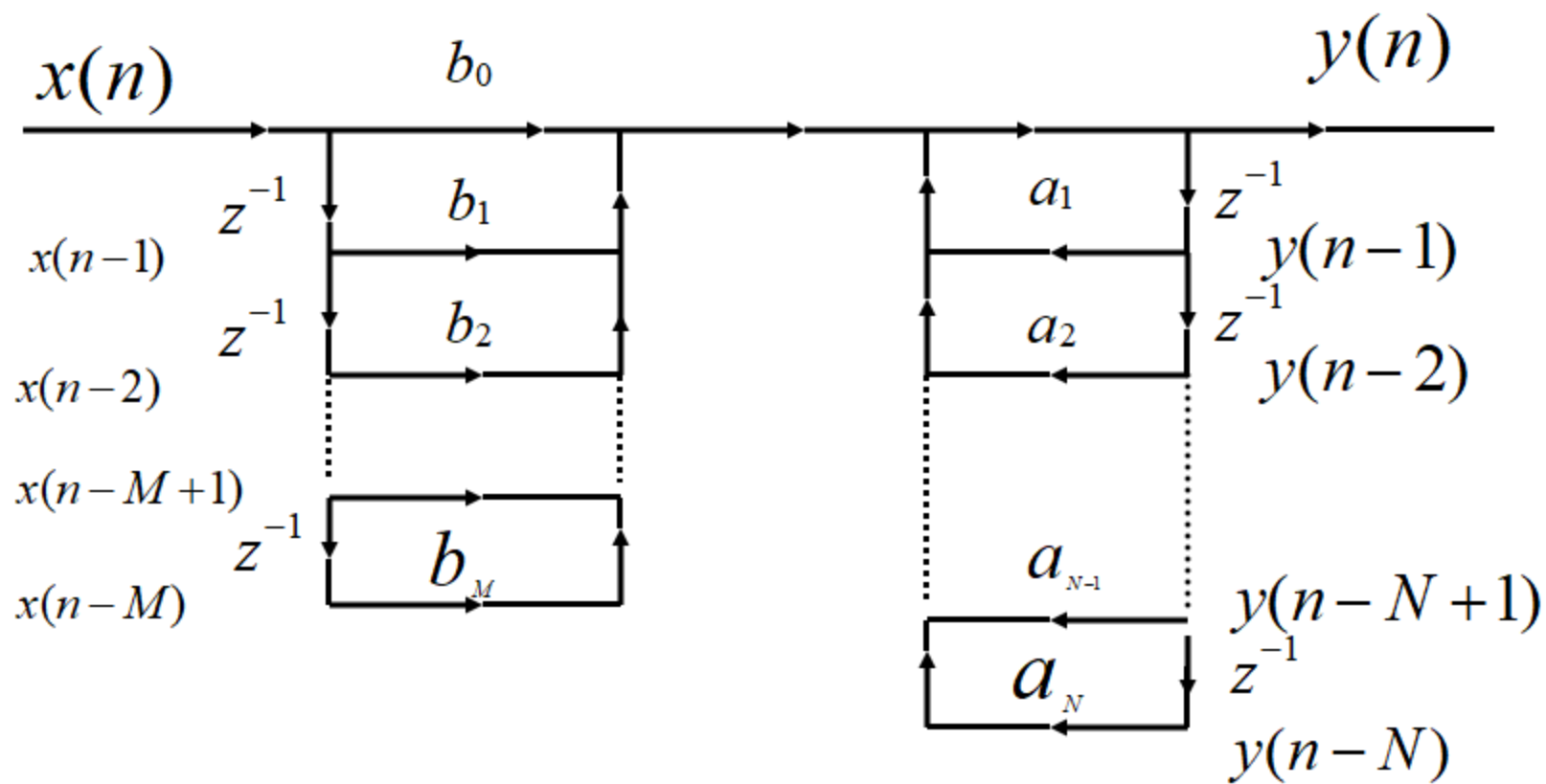
$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

二、IIR数字滤波器的基本结构：

- 直接 I 型
- 直接 II 型（正准型）
 - 级联型
- 并联型

1、直接I型

- 结构流图 按差分方程可以写出。



(4)特点

第一个网络实现零点，即实现 $x(n)$ 加权延时：

$$\sum_{k=0}^N b_k x(n-k)$$

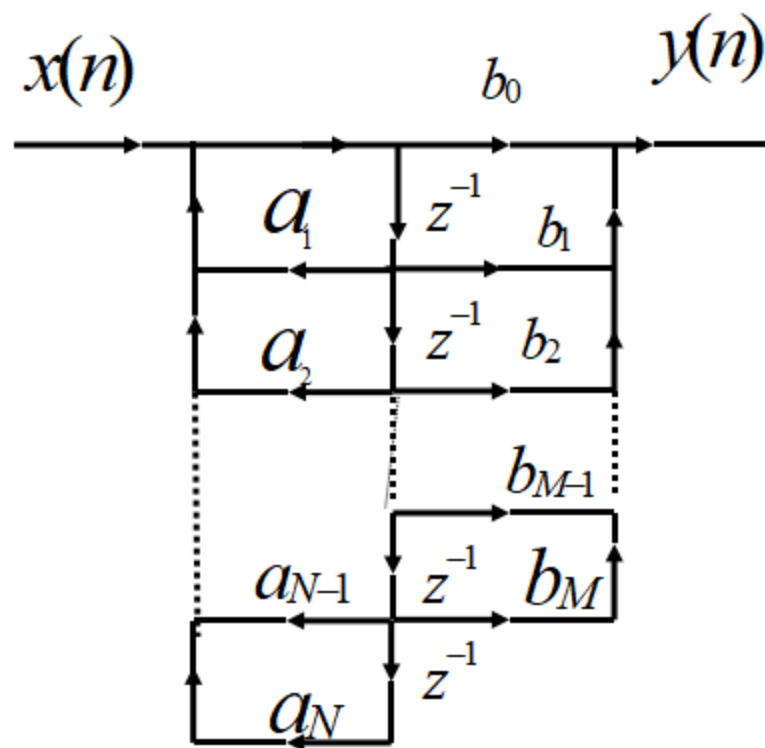
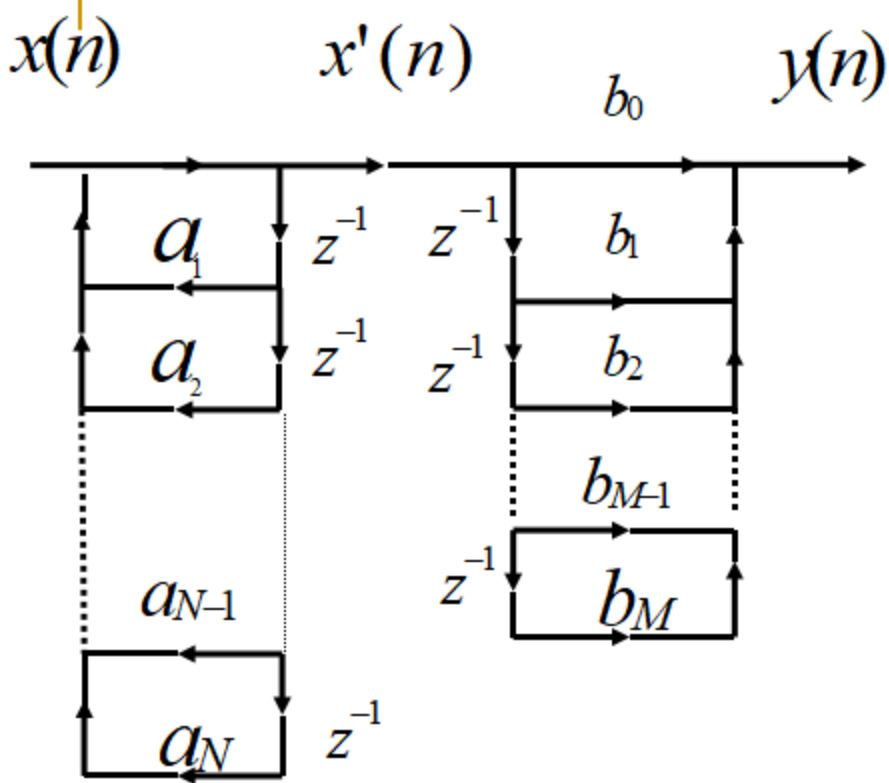
第二个网络实现极点，即实现 $y(n)$ 加权延时：

$$\sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

可见，第二网络是输出延时，即反馈网络。

*共需 $(M+N)$ 个存储延时单元。

2直接II型（正准型）



$$x'(n) = \sum_{k=1}^N a_k x'(n-k) + x(n)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x'(n-k)$$

对以上两式进行 Z 变换：

$$X'(z) = X'(z) \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} + X(z)$$

$$Y(z) = X'(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

$$\text{因此, } X'(z) = \frac{X(z)}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

只需实现 M 阶滤波器所需的最少的 N 个延时单元。

($N \geq M$)

直接型的共同缺点:

- 系数 a_k , b_k 对滤波器的性能控制作用不明显
- 极点对系数的变化过于灵敏, 易出现不稳定或较大误差
- 运算的累积误差较大

3、级联型

先将系统函数按零、极点进行因式分解

$$H(Z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - p_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - q_k z^{-1})(1 - q_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

其中， p_k 为实零点， c_k 为实极点； q_k, q_k^* 表示复共轭零点， d_k, d_k^* 表示复共轭极点， $M=M_1+2M_2$ ， $N=N_1+2N_2$

再将共轭因子展开，构成实系数二阶因子，

则得

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - p_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2})}$$

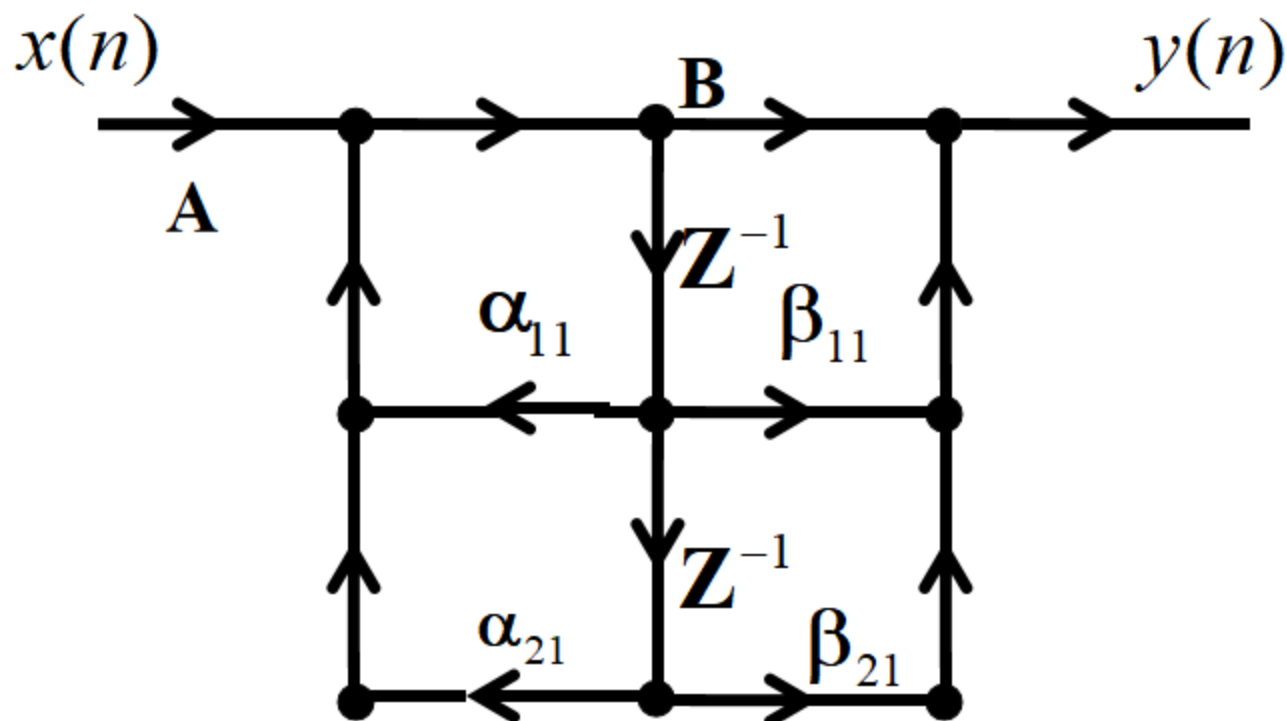
为了方便，分子取正号，分母取负号；这样，流图上的系数均为正。

最后，将两个一阶因子组合成二阶因子（或将一阶因子看成是二阶因子的退化形式），则有

$$H(z) = A \prod_k \frac{1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} = A \prod_k H_k(z)$$

当 (M=N=2) 时

$$H(z) = A \frac{1 + \beta_{11}z^{-1} + \beta_{21}z^{-2}}{1 - \alpha_{11}z^{-1} - \alpha_{21}z^{-2}}$$

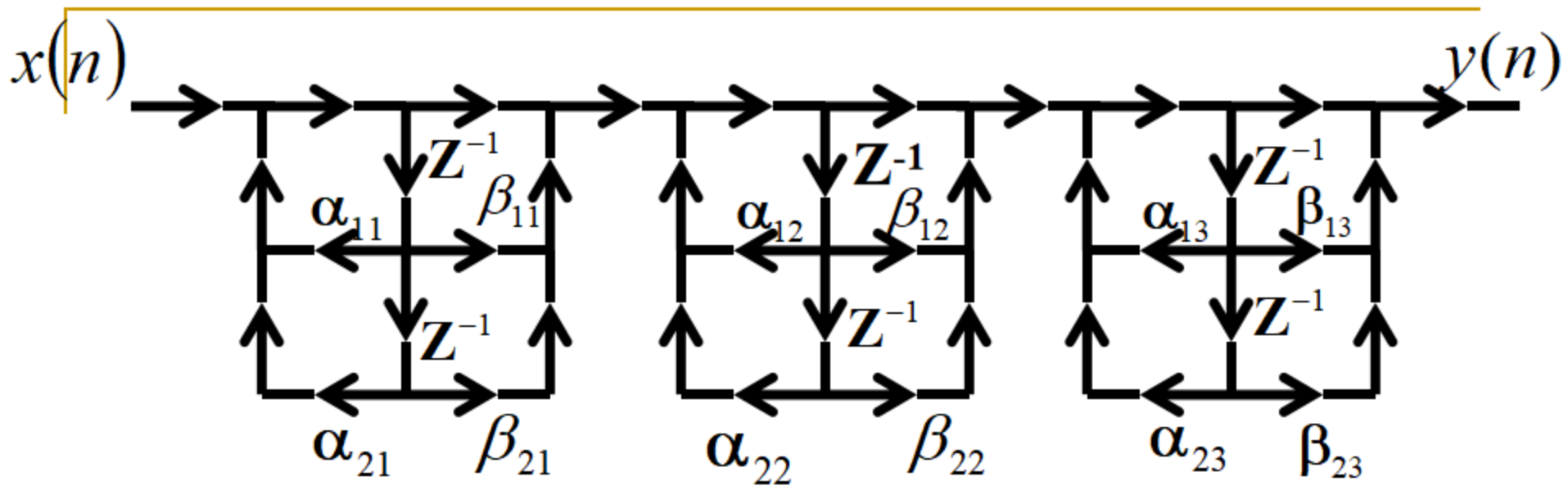


当 (M=N=4) 时

$$H(Z) = A \frac{1 + \beta_{11}Z^{-1} + \beta_{21}Z^{-2}}{1 - \alpha_{11}Z^{-1} - \alpha_{21}Z^{-2}} \frac{1 + \beta_{12}Z^{-1} + \beta_{22}Z^{-2}}{1 - \alpha_{12}Z^{-1} - \alpha_{22}Z^{-2}}$$

当 (M=N=6) 时

$$H(Z) = A \frac{1 + \beta_{11}Z^{-1} + \beta_{21}Z^{-2}}{1 - \alpha_{11}Z^{-1} - \alpha_{21}Z^{-2}} \cdot \frac{1 + \beta_{12}Z^{-1} + \beta_{22}Z^{-2}}{1 - \alpha_{12}Z^{-1} - \alpha_{22}Z^{-2}} \cdot \frac{1 + \beta_{13}Z^{-1} + \beta_{23}Z^{-2}}{1 - \alpha_{13}Z^{-1} - \alpha_{23}Z^{-2}}$$



特点:

β_{1k}, β_{2k} 仅影响第 k 对零点, 同样 α_{1k}, α_{2k}

仅影响第 k 对极点, 便于调节滤波器的频率特性。

所用的存储器的个数最少。

运算的累积误差较小。

注意：*如果有奇数个实零点，则有一个 $\beta_{2k} = 0$ ；

同样，如果有奇数个实极点，则有一个 $\alpha_{2k} = 0$ 。

*通常 $M=N$ 时，共有 $[(N+1)/2]$ 节，符号 $[(N+1)/2]$ 表示取 $(N+1)/2$ 的整数。

4. 并联型

将 $H(Z)$ 展成部分分式形式:

$$H(Z) = \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k Z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k (1 - g_k Z^{-1})}{(1 - d_k Z^{-1})(1 - d_k^* Z^{-1})} + \sum_{k=0}^{M-N} G_k Z^{-k}$$

其中, A_k, B_k, g_k, c_k, G_k 均为实数, d_k^* 与 d_k 复共轭;
当 $M < N$ 时, 不包含 $\sum_{k=0}^{M-N} G_k Z^{-k}$ 项; $M = N$ 时, 该项为 G 。

当M=N时，将两个一阶实极点合为一项，将共轭极点化成实系数二阶多项式， $H(Z)$ 可表为

$$H(Z) = G_0 + \sum_{k=1}^{[(N+1)/2]} \frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k}Z^{-1}}{1 - \alpha_{1k}Z^{-1} - \alpha_{2k}Z^{-2}} = G_0 + \sum_{k=1}^{[(N+1)/2]} H_k(Z)$$

当N为奇数时，包含一个一阶节，即

$$\alpha_{2k} = \gamma_{1k} = 0$$

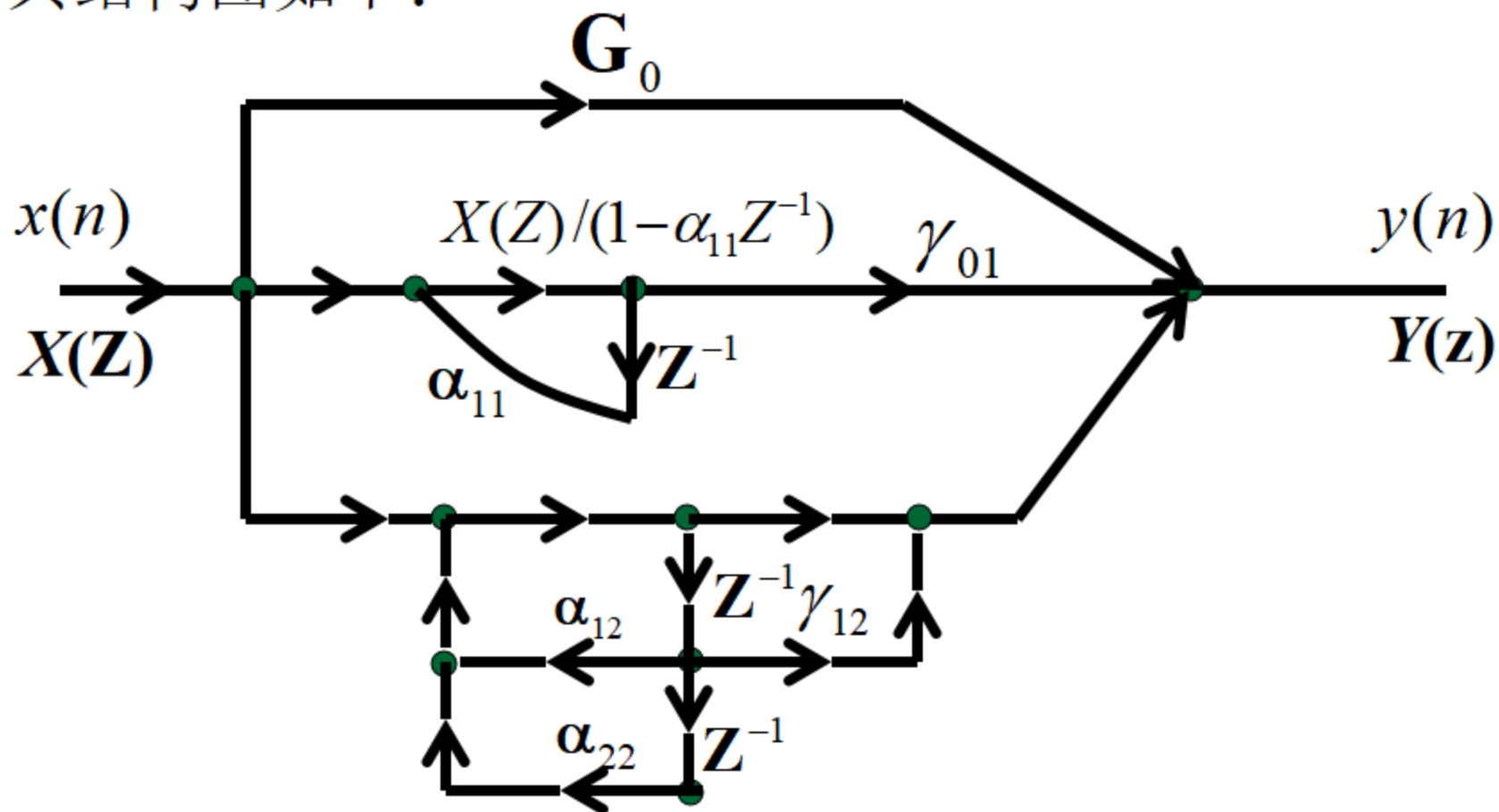
例：M=N=3时，为奇数，故 $\alpha_{21} = \gamma_{11} = 0$

$$H(Z) = G_0 + \frac{\gamma_{01}}{1 - \alpha_{11}Z^{-1}} + \frac{\gamma_{02} + \gamma_{12}Z^{-1}}{1 - \alpha_{12}Z^{-1} - \alpha_{22}Z^{-2}} = H_1(z) + H_2(z) + H_3(z)$$

所以：

$$Y(Z) = [H_1(Z) + H_2(Z) + H_3(Z)]X(Z)$$

其结构图如下：

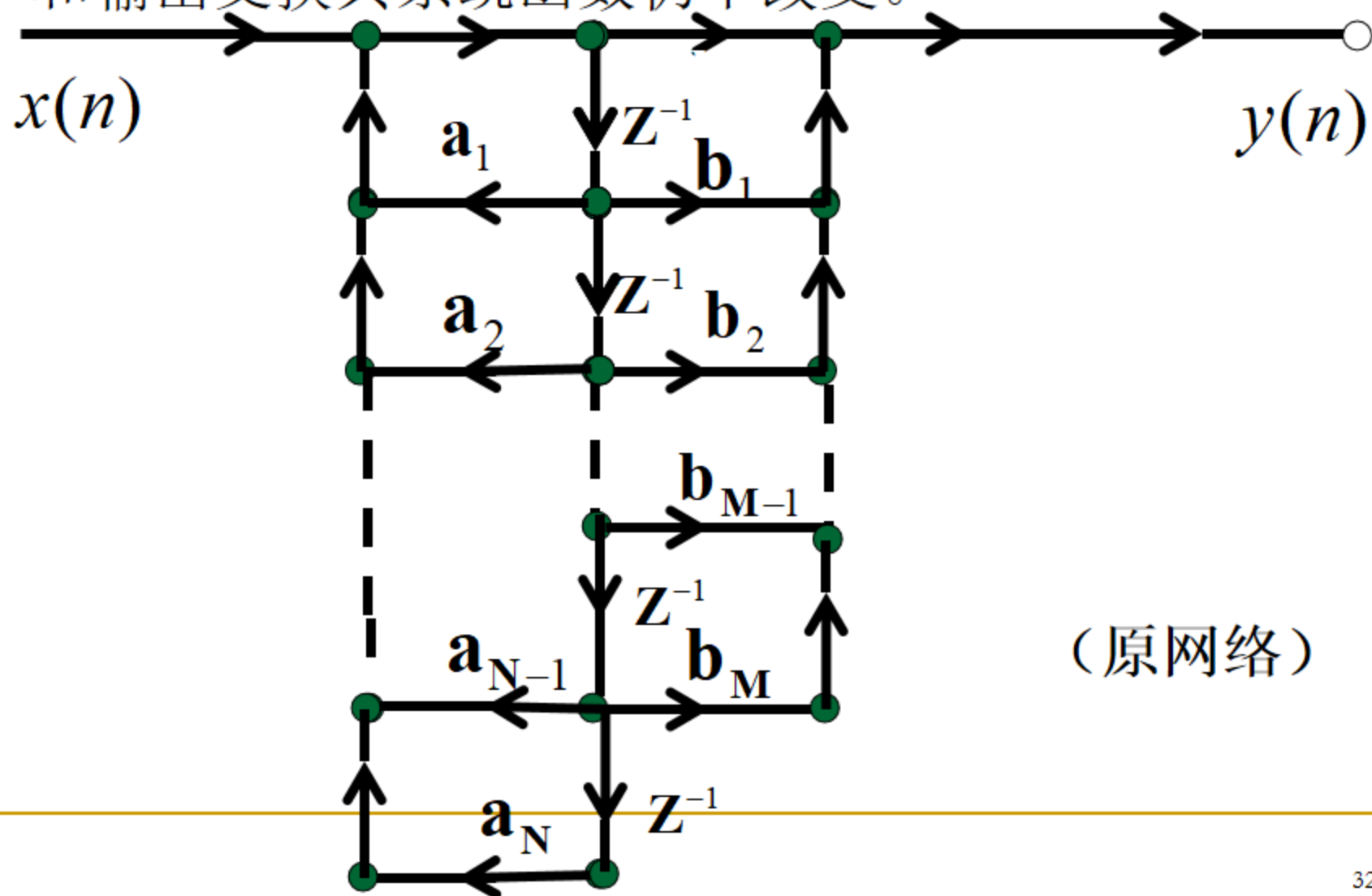


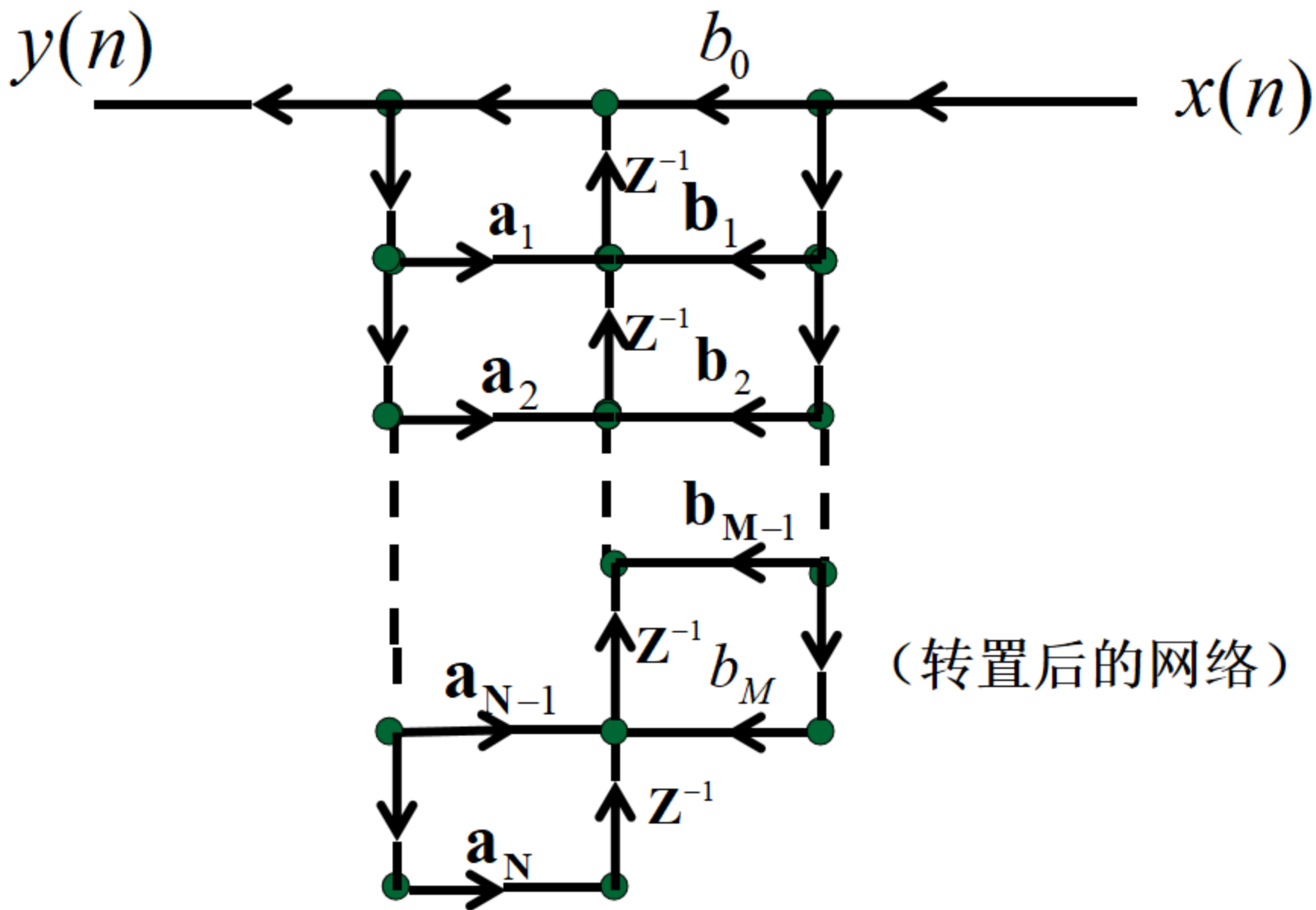
并联型的特点：

- 通过调整系数 α_{1k} , α_{2k} 可单独调整一对极点位置，但不能单独调整零点位置
- 各并联基本节的误差互相不影响，故运算误差最小
- 可同时对输入信号进行运算，故运算速度最高

三、转置定理

如果将原网络中所有支路方向加以倒转，且将输入和输出交换其系统函数仍不改变。





例：设IIR数字滤波器差分方程为：

$$y(n) = 8x(n) - 4x(n-1) + 11x(n-2) - 2x(n-3) \\ + \frac{5}{4}y(n-1) - \frac{3}{4}y(n-2) + \frac{1}{8}y(n-3)$$

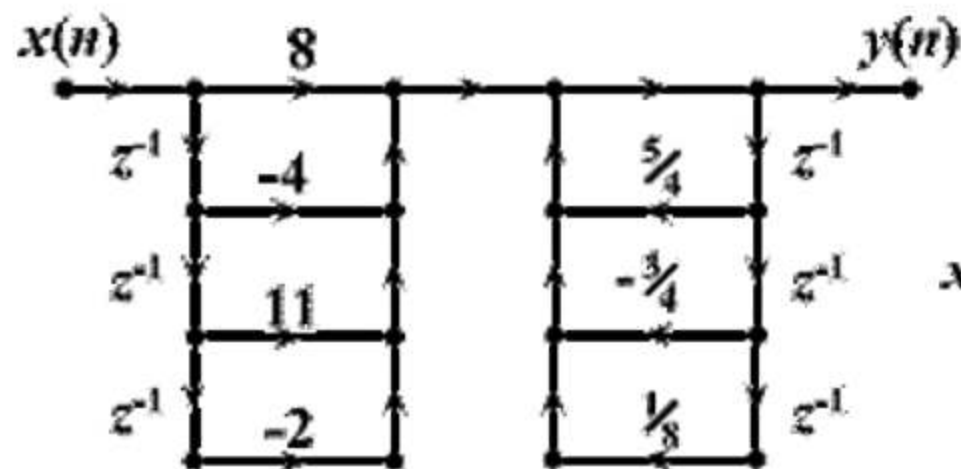
试用四种基本结构实现此差分方程。

解：对差分方程两边取 z 变换，得系统函数：

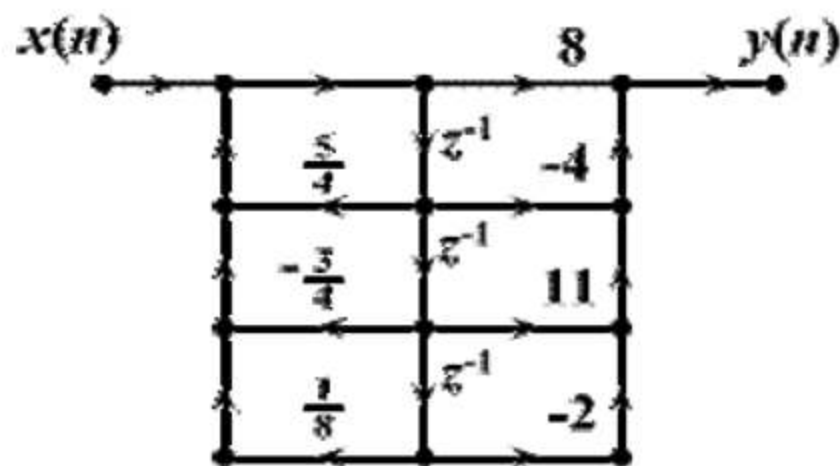
$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$$

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$$

得直接I型结构:



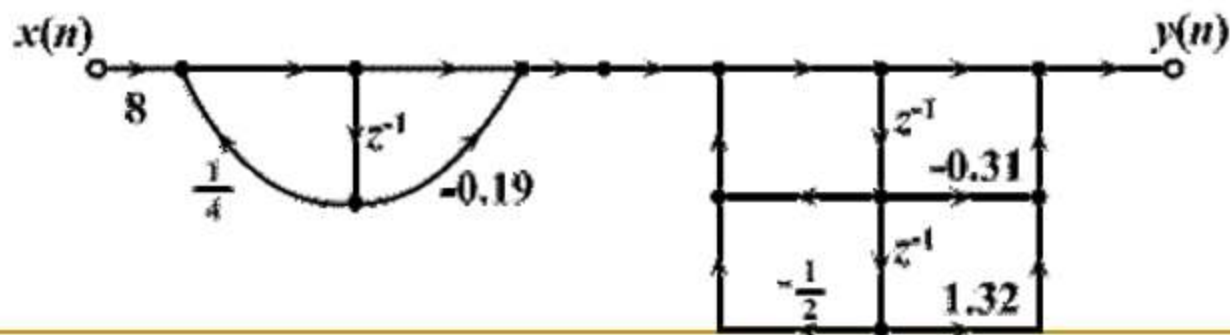
正准型结构:



将 $H(z)$ 因式分解:

$$H(z) = \frac{(2 - 0.379z^{-1})(4 - 1.24z^{-1} + 5.264z^{-2})}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right)}$$
$$= \frac{8(1 - 0.19z^{-1})(1 - 0.31z^{-1} + 1.32z^{-2})}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right)}$$

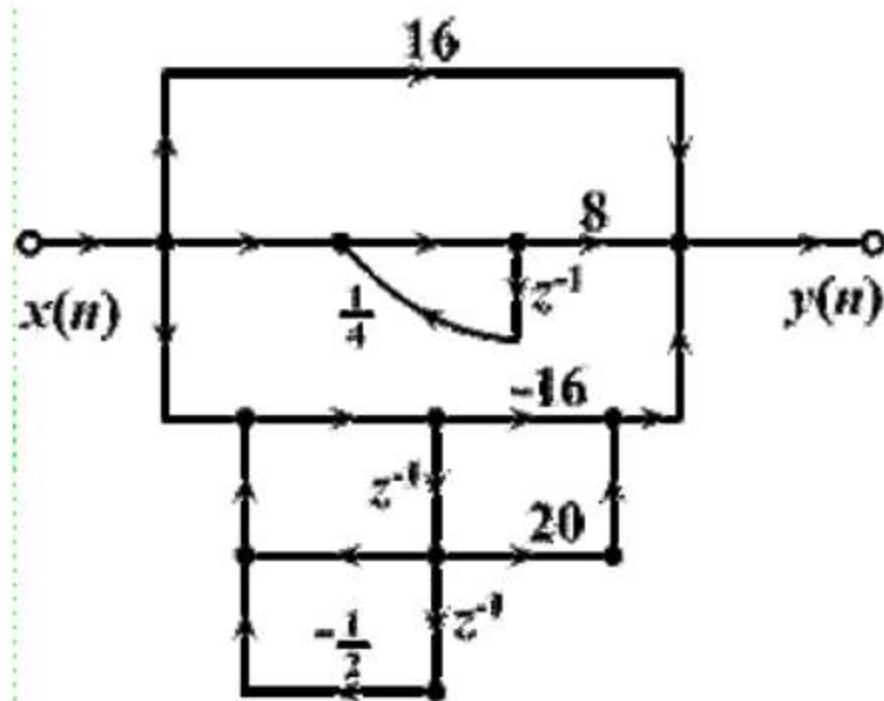
得级联型结构:



将 $H(z)$ 部分分式分解:

$$H(z) = 16 + \frac{8}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{-16 + 20z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

得并联型结构:



5-3 FIR滤波器的基本结构

一、特点：

- 1、 $h(n)$ 在有限个 n 值处不为零。
- 2、 $H(z)$ 在 $|z| > 0$ 处收敛，极点全部在 $Z=0$ 处。
- 3、非递归结构。

$$H(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)Z^{-n}$$

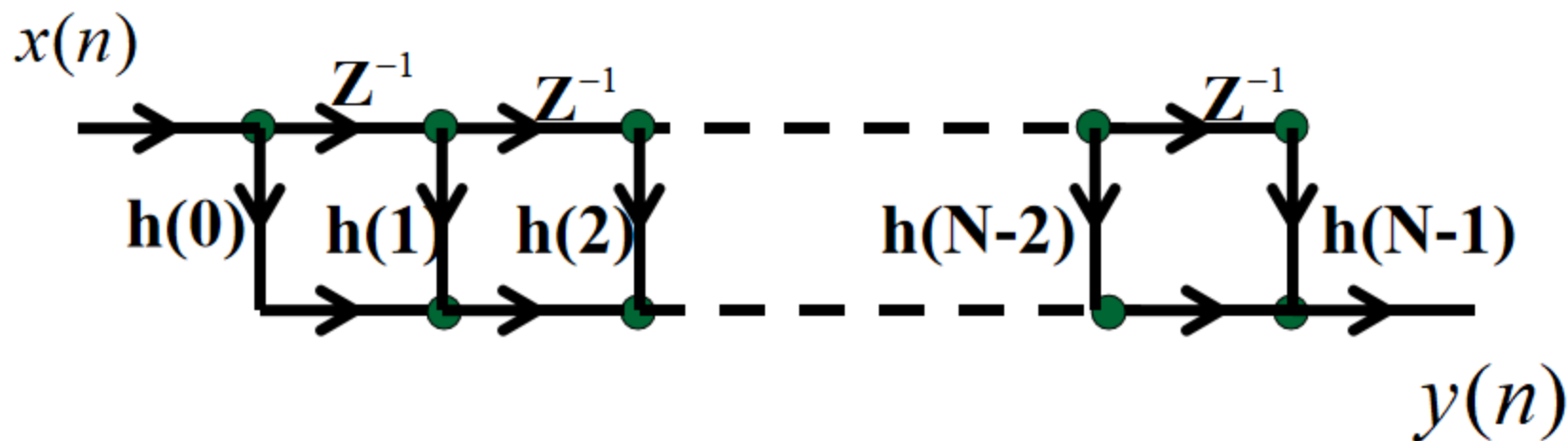
$h(n)$ 为一个 N 点序列， $Z=0$ 处为 $(N-1)$ 阶极点，
 $z \rightarrow \infty$ ，有 $(N-1)$ 阶零点。

二、基本结构

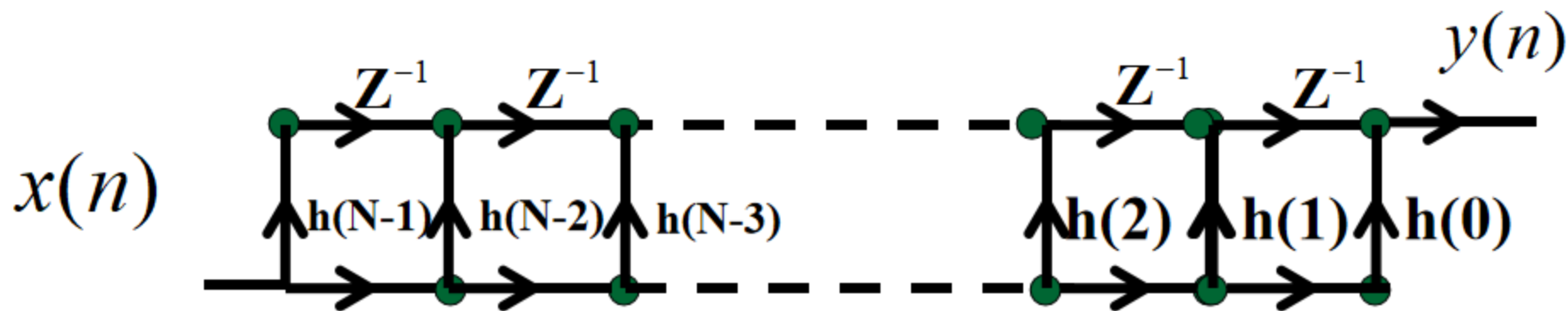
1、横截型（卷积型、直接型）

$$y(n] = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m]$$

它就是线性移不变系统的卷积和公式



用转置定理可得另一种结构



2、级联型

将 $H(Z)$ 分解为实系数二阶因子的乘积形式

$$H(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)Z^{-n} = \prod_{k=1}^{[N/2]} (\beta_{0k} + \beta_{1k}Z^{-1} + \beta_{2k}Z^{-2})$$

注： $[N/2]$ 表示取 $N/2$ 的整数部分，如 $N = 3, \lfloor 3/2 \rfloor = 1$

* N 为偶数时， $N-1$ 为奇数，这时因为有奇数个根，所以 β_{2k} 中有一个为零。

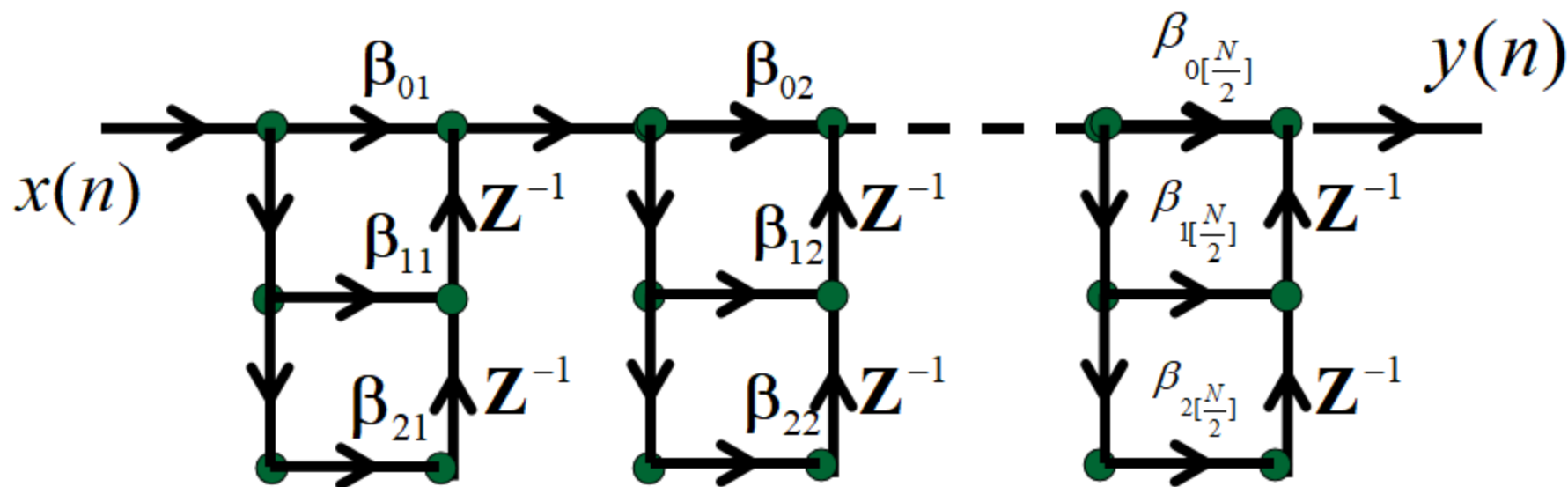
当 N 为奇数时的结构如下：

$$N = 3 \text{ 时, } H(z) = \beta_{01} + \beta_{11} z^{-1} + \beta_{21} z^{-2}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \beta_{01} + \beta_{11} z^{-1} + \beta_{21} z^{-2}$$

$$y(n) = \beta_{01} x(n) + \beta_{11} x(n-1) + \beta_{21} x(n-2)$$

一般情况:



特点: 每节结构可控制一对零点。
 所需系数 β_{ik} 多, 乘法次数也多。

3、频率抽样型

N 个频率抽样 $H(k)$ 恢复 $H(z)$ 的内插公式:

$$H(z) = (1 - z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{N} H_c(z) \sum_{k=0}^{N-1} H'_k(z)$$

子系统: $H_c(z) = 1 - z^{-N}$

是 N 节延时单元的梳状滤波器

在单位圆上有 N 个等间隔角度的零点:

$$z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

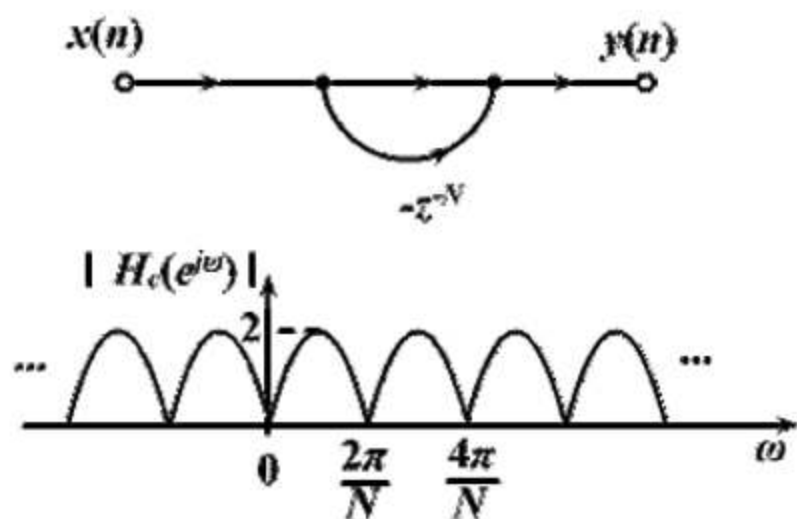


图5-18 梳状滤波器结构及频率响应幅度

频率响应:

$$\begin{aligned} H_c(e^{j\omega}) &= 1 - e^{-j\omega N} \\ &= e^{-j\frac{\omega N}{2}} \left(e^{j\frac{\omega N}{2}} - e^{-j\frac{\omega N}{2}} \right) \\ &= 2je^{-j\frac{\omega N}{2}} \sin \frac{\omega N}{2} \end{aligned}$$

子系统: $H'_k(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$ 谐振器

单位圆上有一个极点: $z_k = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$

与第 k 个零点相抵消, 使该频率 $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ 处的频率响应等于 $H(k)$

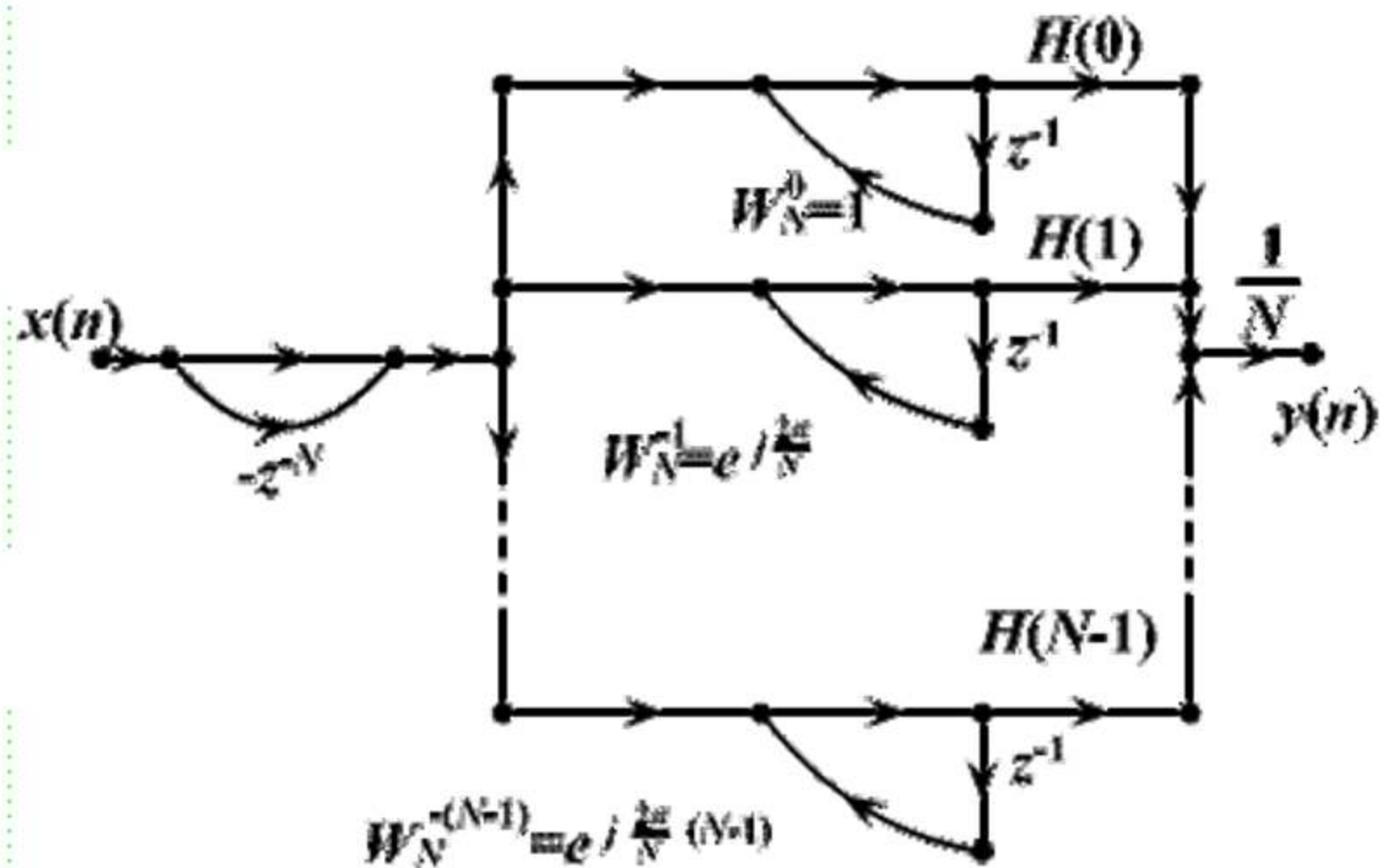


图5-19 FIR滤波器的频率抽样型结构

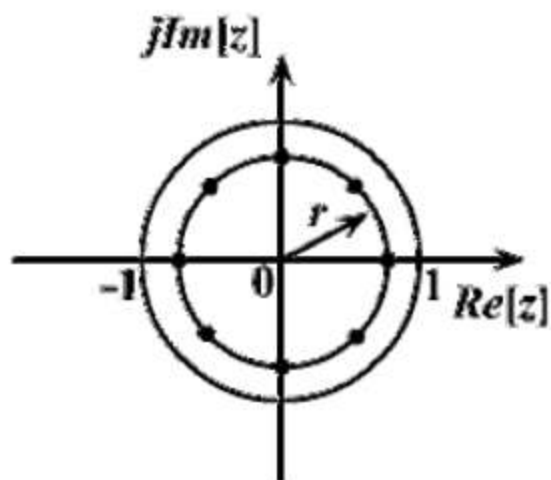
频率抽样型结构的优缺点

- 调整 $H(k)$ 就可以有效地调整频响特性
- 若 $h(n)$ 长度相同，则网络结构完全相同，除了各支路增益 $H(k)$ ，便于标准化、模块化
- 有限字长效应可能导致零极点不能完全对消，导致系统不稳定
- 系数多为复数，增加了复数乘法和存储量

修正频率抽样结构

将零极点移至半径为 r 的圆上: $r < 1$ 且 $r \approx 1$

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_r(k)}{1 - r W_N^{-k} z^{-1}}$$



$$\text{极点: } z_k = r e^{j \frac{2\pi}{N} k}$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

图5-20 抽样点改到 $r \leq 1$ 的圆上

为使系数为实数，将共轭根合并

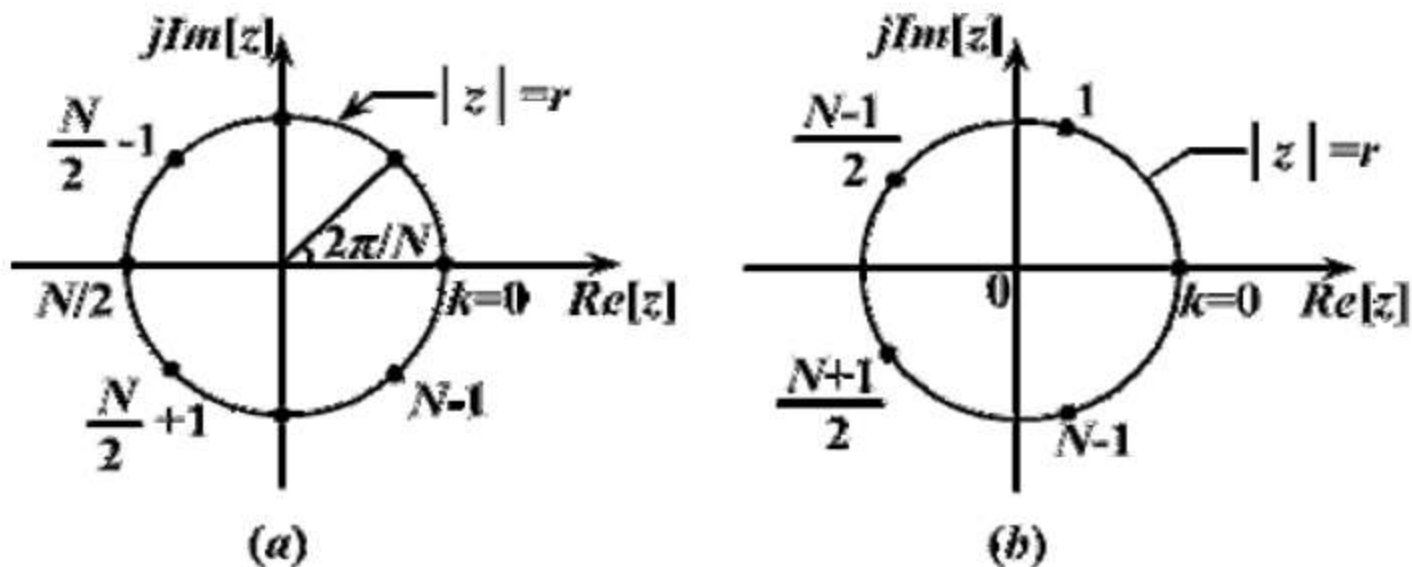


图5-21 谱振器各个根的位置
(a) N 为偶数 (b) N 为奇数

由对称性：
$$z_{N-k} = z_k^* \quad W_N^{-(N-k)} = W_N^k = (W_N^{-k})^*$$

又 $h(n)$ 为实数，则
$$H(k) = H^*((N-k))_N R_N(k)$$

将第 k 个和第 $(N-k)$ 个谐振器合并成一个实系数的二阶网络:

$$\begin{aligned}
 H_k(z) &= \frac{H(k)}{1 - rW_N^{-k}z^{-1}} + \frac{H(N-k)}{1 - rW_N^{-(N-k)}z^{-1}} \\
 &= \frac{H(k)}{1 - rW_N^{-k}z^{-1}} + \frac{H^*(k)}{1 - r(W_N^{-k})^*z^{-1}} \\
 &= \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1}}{1 - z^{-1}2r\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) + r^2z^{-2}}
 \end{aligned}$$

其中: $\beta_{0k} = 2\operatorname{Re}[H(k)]$

$$\beta_{1k} = -2r\operatorname{Re}[H(k)W_N^k]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} \quad N \text{为奇数} \\ k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad N \text{为偶数} \end{array} \right.$$

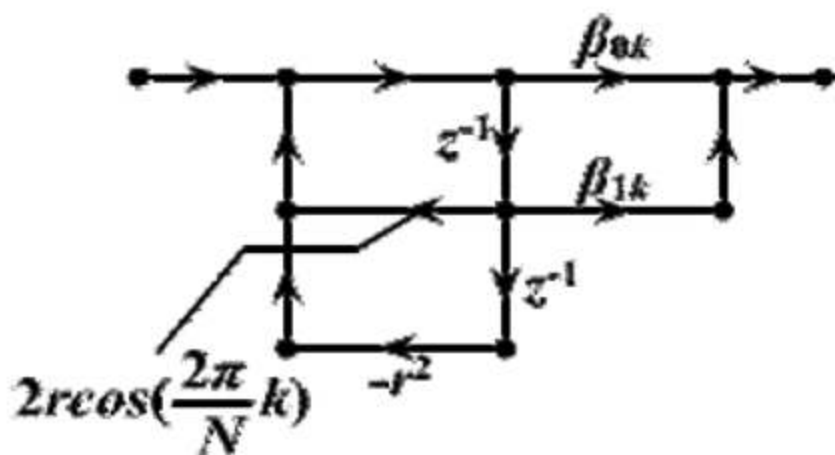


图5-22 二阶谐振器

- 当 N 为偶数时，还有一对实数根

$k=0, N/2$ 处: $z = \pm r$

$$H_0(z) = \frac{H(0)}{1 - rz^{-1}}$$

$$H_{N/2}(z) = \frac{H(N/2)}{1 + rz^{-1}}$$

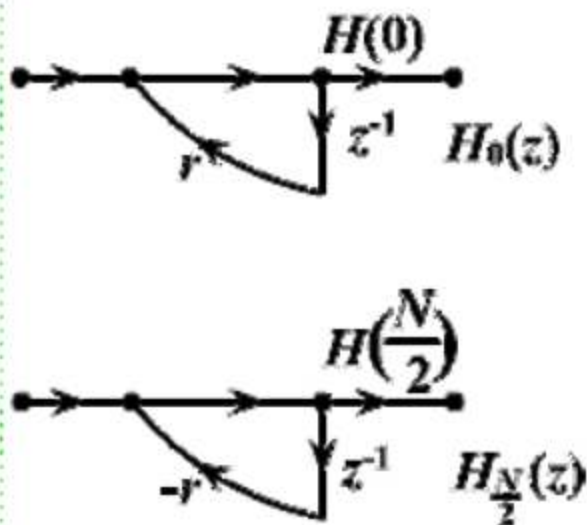


图5-23 一阶网络(实根)

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[H_0(z) + H_{N/2}(z) + \sum_{k=1}^{N/2-1} H_k(z) \right]$$

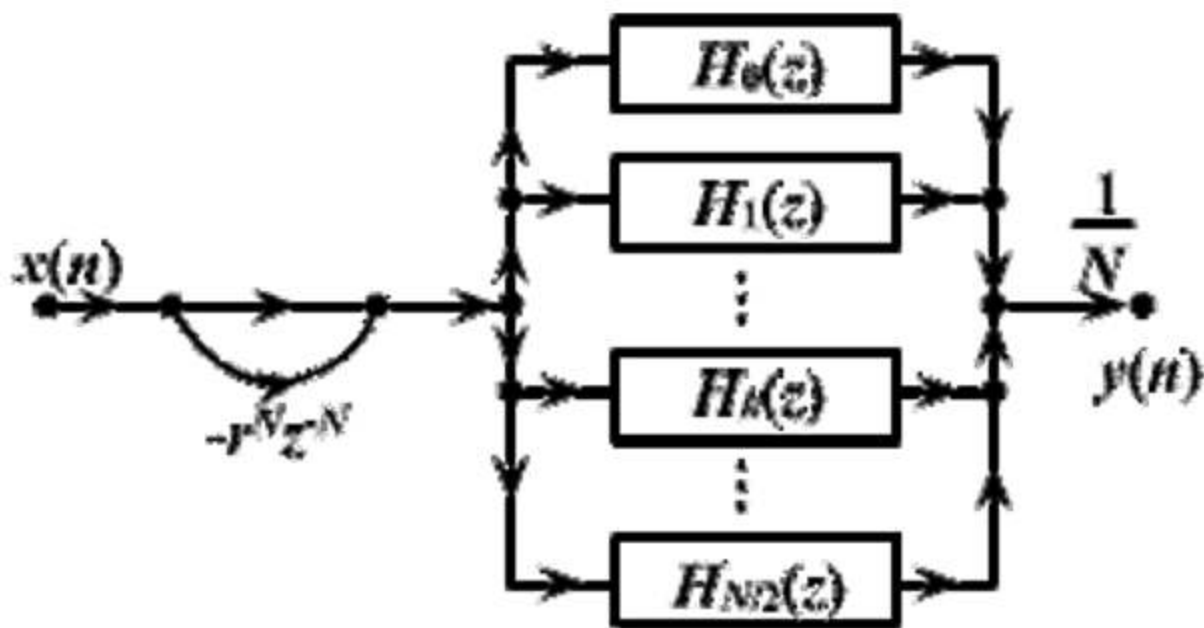


图5-24 *FIR*滤波器修正后的频率抽样结构

- N为奇数时

只有一个实数根在 $k = 0$ 处: $z = r$

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[H_0(z) + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} H_k(z) \right]$$

4、快速卷积结构

如果, $x(n)$ 的长为 N_1 , $h(n)$ 的长为 N_2 。

将 $x(n)$ 补 $L-N_1$ 个零值点, $h(n)$ 补 $L-N_2$ 零值点,
只要 $L \geq N_1 + N_2 - 1$, 就有

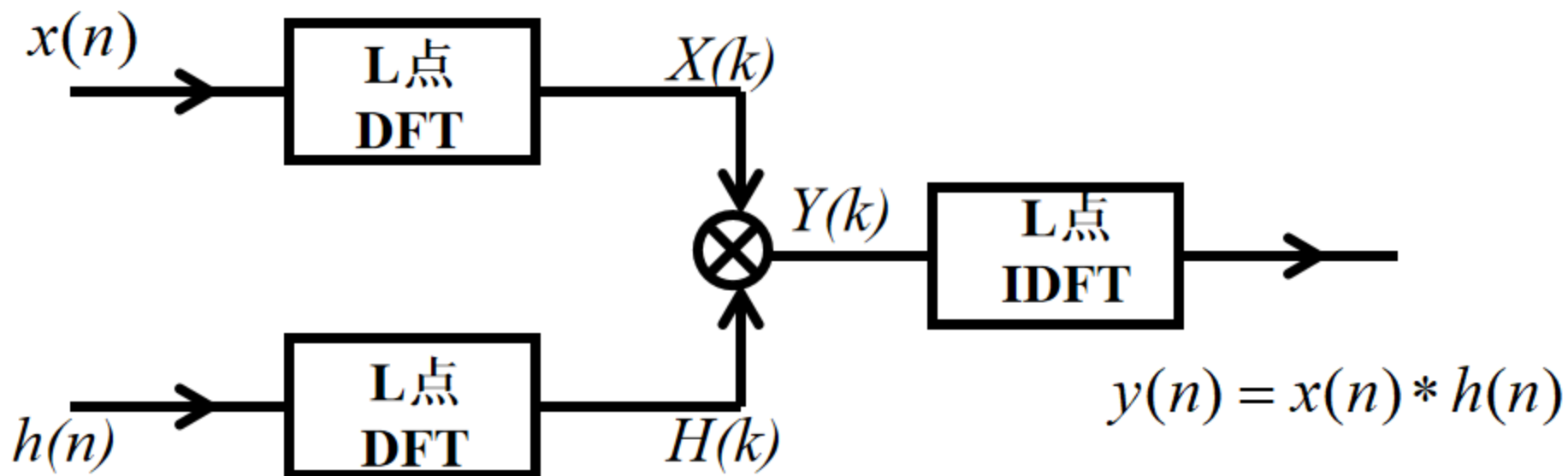
$$y(n) = x(n) \otimes h(n) = x(n) * h(n), 0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 2$$

由卷积定理得 $Y(k) = X(k) H(k)$

所以有

$$y(n) = IDFT[Y(k)] = IDFT[X(k)H(k)] = x(n) * h(n)$$

这样，就可以得到FIRDF的快速卷积结构



这里的DFT和IDFT均可以利用FFT算法。

5、线性相位FIR滤波器的结构

FIR滤波器单位抽样响应 $h(n)$ 为实数， $0 \leq n \leq N - 1$
且满足：

偶对称： $h(n) = h(N - 1 - n)$

或奇对称： $h(n) = -h(N - 1 - n)$

即对称中心在 $(N-1) / 2$ 处

则这种FIR滤波器具有严格线性相位。

N 为奇数时

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)z^{-n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

$$\text{令 } n = N-1-m$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) \left[z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)} \right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}}$$

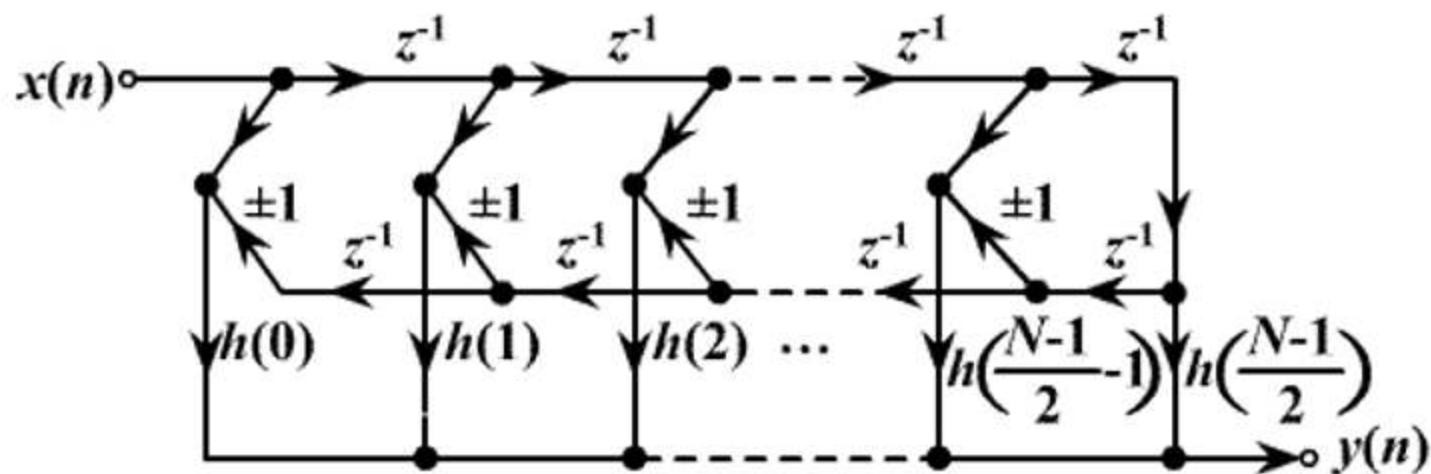


图5-26 N 为奇数时线性相位FIR滤波器的直接型结构

$h(n)$ 偶对称, 取“+”

$h(n)$ 奇对称, 取“-”, 且 $h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$

N 为偶数时

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n)z^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left[z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)} \right]
 \end{aligned}$$

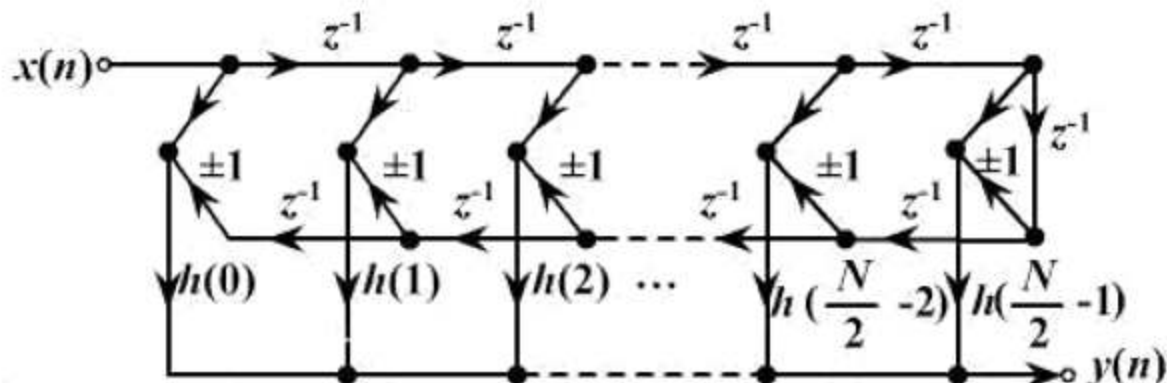


图5-27 N 为偶数时，线性相位FIR滤波器的直接型结构
($h(n)$ 偶对称时 ± 1 取+1, $h(n)$ 奇对称时 ± 1 取-1)

放映结束

