第三讲　DFT

离散傅里叶变换

§3-1　引言

§3-2　傅氏变换的几种可能形式

§3-3　周期序列的DFS

§3-4　DFS的性质

§3-5　DFT--有限长序列的离散频域表示

§3-6　DFT的性质

§3-7　抽样Z变换--频域抽样理论

§3-8　利用DFT对连续时间信号的逼近

§ 3-1　引言

一.DFT是重要的变换

1. 分析有限长序列的有用工具。

2. 在信号处理的理论上有重要意义。

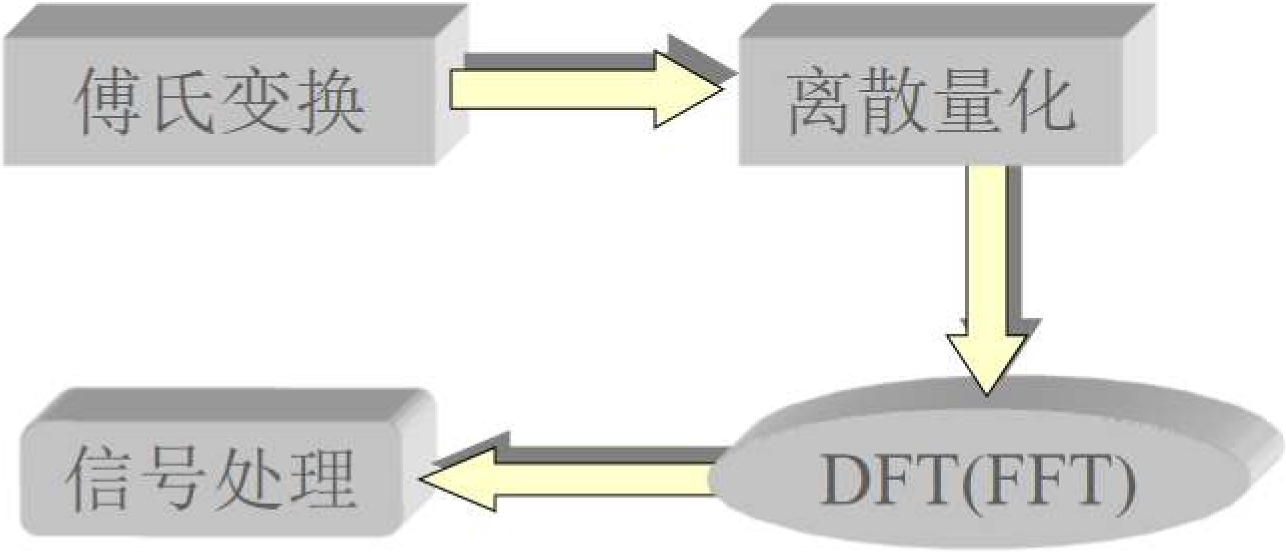
3. 在运算方法上起核心作用，谱分析、卷积、相关都可以通DFT在计算机上实现。

二.DFT是现代信号处理桥梁

DFT要解决两个问题：

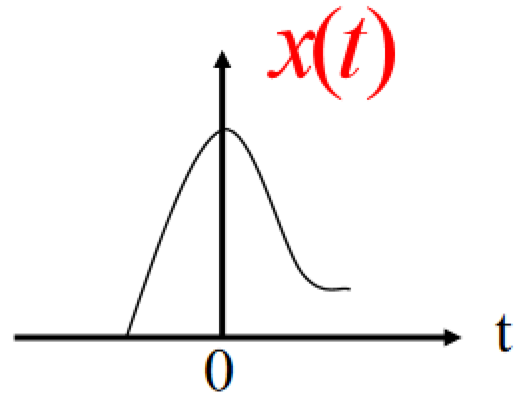
一是离散与量化，

二是快速运算。

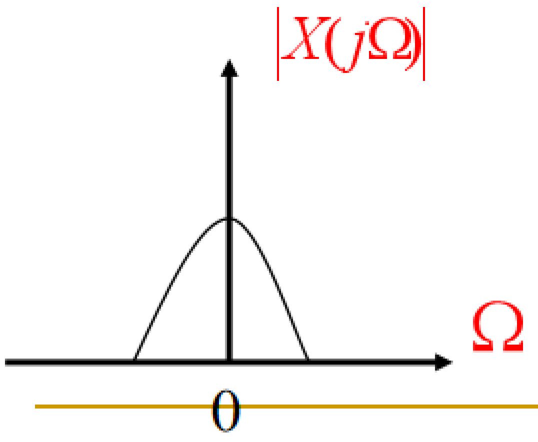


§ 3-2 傅氏变换的几种可能形式

一. 连续时间、连续频率的傅氏变换-傅氏变换



$$正: X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$$



$$反: x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

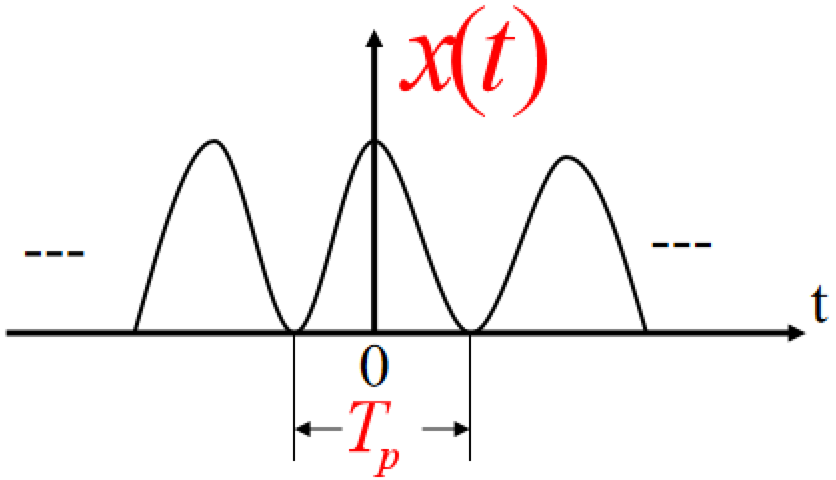
时域信号	频域信号
连续的	非周期的
非周期的	连续的

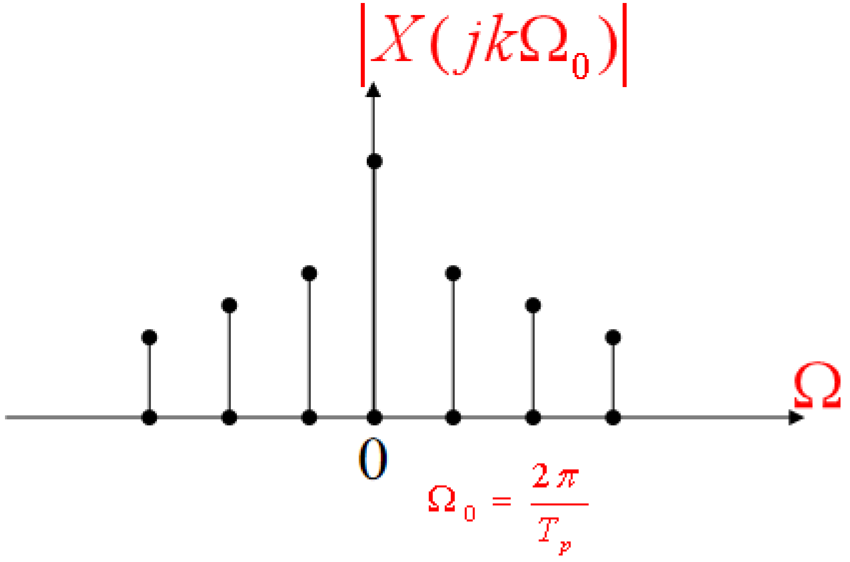
对称性：

时域连续，则频域非周期。

反之亦然。

二. 连续时间、离散频率傅里叶变换-傅氏级数





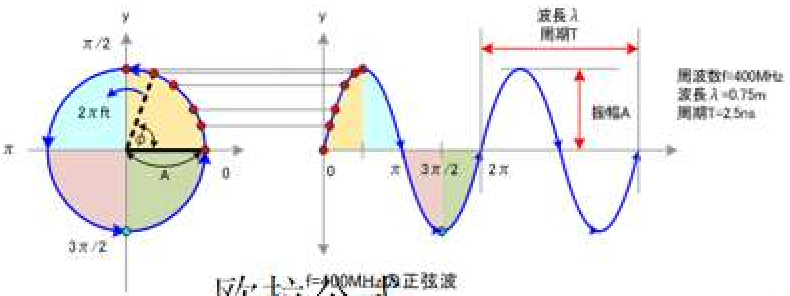
$$\text{正}:X(jk\Omega_0)=\frac{1}{T_p}\int_{-T_p/2}^{T_p/2}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

$$\text{反}:x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

傅里叶级数

$$正:X(jk\Omega_0)=\frac{1}{T_p}\int_{-T_p/2}^{T_p/2}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

$$反:x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

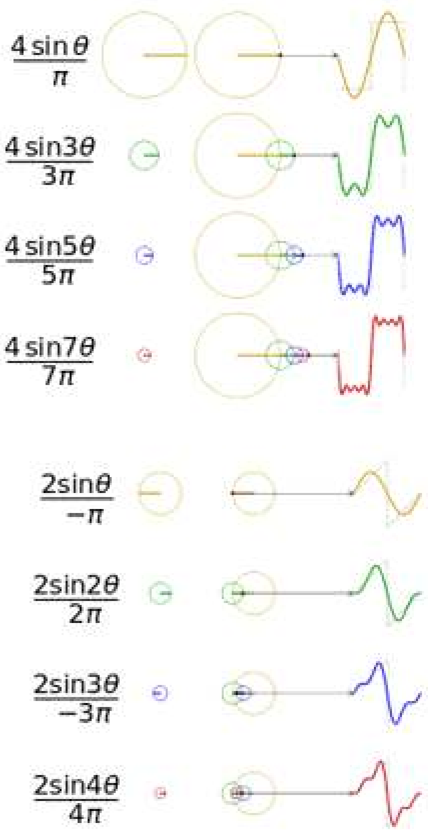


欧拉公式:

$$e^{jx}=\cos x+j\sin x$$

$$\cos x=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$$

$$\sin x=\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$$



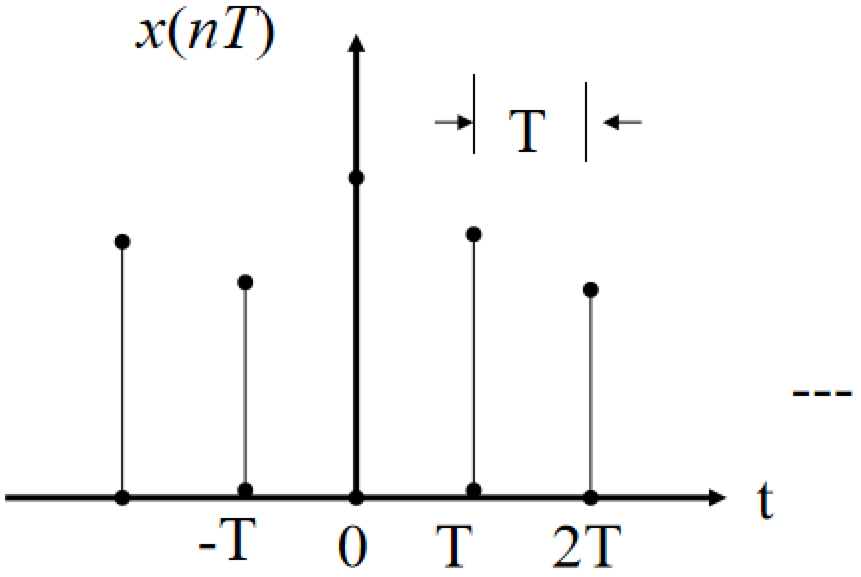
*时域周期为$T_{p,}$

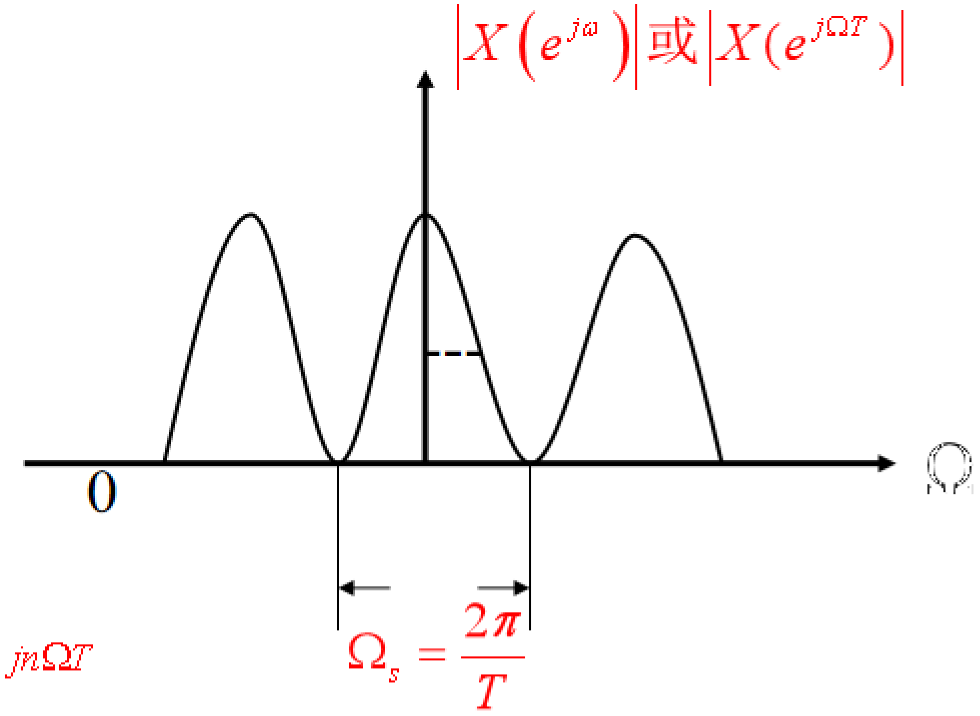
频域谱线间隔为$2\pi/T_p$

时域信号	频域信号
连续的	非周期的
周期的	离散的

三. 离散时间、连续频率的傅氏变换

--序列的傅氏变换





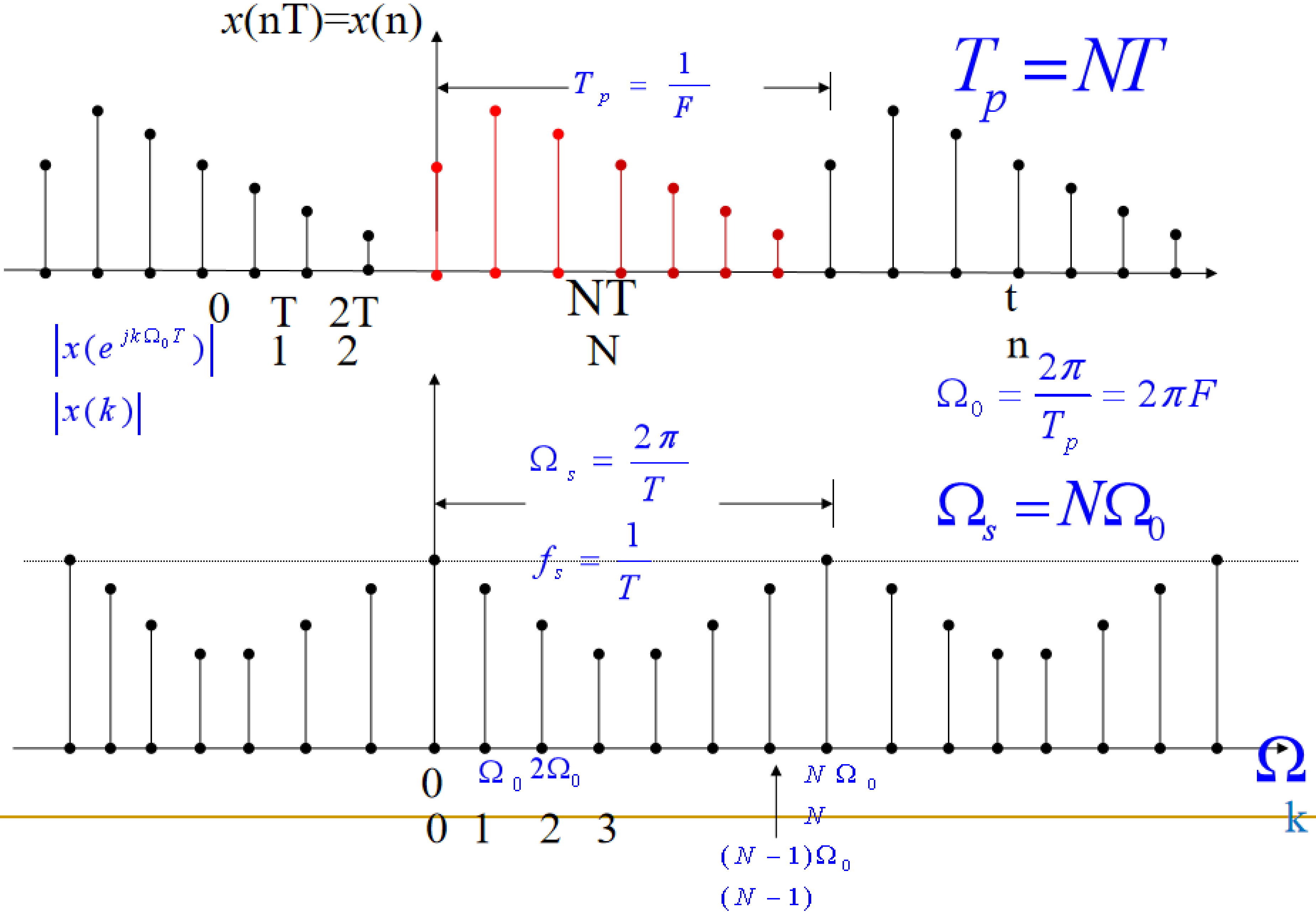
正：$X(e^{j\Omega T})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)e^{-jn\Omega T}$

反：$x(nT)=\frac{1}{\Omega_s}\int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2}X(e^{j\Omega T})e^{jn\Omega T}d\Omega$

*时域抽样间隔为T,频域的周期为$\Omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$

时域信号	频域信号
离散的	周期的
非周期的	连续的

四. 离散时间、离散频率的傅氏变换--DFT



由上述分析可知，要想在时域和频域都是离散的，那么两域必须是周期的。

时域信号	频域信号
离散的	周期的
周期的	离散的

*时域是周期为T_p函数，频域的离散间隔为$\Omega_0=\dfrac{2\pi}{T_p}$；

时域的离散间隔为T,频域的周期为$\Omega_s=\dfrac{2\pi}{T}$.

DFT的简单推演：

在一个周期内，可进行如下变换：

$$\begin{cases} X(e^{j\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jn\Omega T} \\ x(nT) = \dfrac{1}{\Omega_s}\int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} X(e^{j\Omega T})e^{jn\Omega T}d\Omega \end{cases}$$

$$n: \text{从}0 \sim N-1$$

$$\Omega: \Omega = k\Omega_0 = k \cdot 2\pi F, k = 0 \sim N-1$$

$$d\Omega: d\Omega = \Delta\Omega = \Omega_0$$

$$\begin{cases} X(e^{jk\Omega_0 T}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-jnk\Omega_0 T} \\ x(nT) = \frac{\Omega_0}{\Omega_s}\sum_{k=0}^{N-1} X(e^{jk\Omega_0 T})e^{jnk\Omega_0 T} \end{cases}$$

$$又 \because \Omega_0 T = \frac{2\pi}{T_p}\cdot T = \Omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\Omega_s} = \frac{2\pi}{N}$$

因此

$$\begin{cases} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ x(nT) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \end{cases}$$

$x(nT)$ 视作n的函数， $x(nT) \rightarrow x(n)$

$X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$ 视作k的函数， $X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) \rightarrow X(k)$

这样，

$$\begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} & \text{正} \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} & \text{反} \end{cases}$$

§ 3-3　周期序列的DFS

一.周期序列DFS的引入

导出周期序列DFS的传统方法是从连续的周期信号的复数傅氏级数开始的：

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

对上式进行抽样，得：

$$\tilde{x}(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 nT}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k\Omega_0) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

，代入 $\Omega_0 T = \frac{2\pi}{N}$

因 $\tilde{x}(nT)$ 是离散的，所以 $\tilde{X}(k\Omega_0)$ 应是周期的。

而且，其周期为 $2\pi / T = N\Omega_0$，因此 $\tilde{X}(k\Omega_0)$ 应是N点的周期序列。

又由于 $e^{j\frac{2\pi}{N}(k+rN)n}=e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\cdot e^{j2\pi rn}=e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

所以求和可以在一个周期内进行，即

$$\tilde{x}(nT)=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k\Omega_0)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

这就是说，当在k=0,1,..., N-1求和与在k=N,...,2N-1求和所得的结果是一致的。

考虑到：$\tilde{x}(nT)\sim\tilde{x}(n)$，$\tilde{X}(k\Omega_0)\sim\tilde{X}(k)$；

则有，$\tilde{x}(n)=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$

二. $\tilde{x}(n)$的k次谐波系数 $\tilde{X}(k)$ 的求法

1.预备知识 $$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}rn} = \begin{cases} N, r = mN, m\text{为任意整数} \\ 0，\text{其他}r \end{cases}$$

$$\because \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}rn} = 1 + e^{j\frac{2\pi}{N}r} + e^{j\frac{2\pi}{N}r\cdot 2} + \cdots + e^{j\frac{2\pi}{N}r\cdot(N-1)}$$

$$= \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}r\cdot N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}r}} = N(r = mN\text{时})$$

同样，当 $k-r=pN$ 时，p也为任意整数，则

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} = N = N\delta(0) = N\delta[(k-r)-pN]$$

亦即

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} = \delta\left[(k-r)-pN\right] = \delta(k-r-pN)$$

$$= \delta\left[k-(r+pN)\right]$$

所以

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)\delta\left[k-(r+pN)\right] = \tilde{X}(r+pN) = \tilde{X}(r)$$

2. $\tilde{X}(k)$ 的表达式

将式 $\tilde{x}(n)=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ 的两端乘

$e^{-j\frac{2\pi}{N}nr}$ ，然后从 n=0到N-1求和，

则：

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nr}=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nr}=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)\left[\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)N\cdot\delta\left[k-(r+pn)\right]$$

$$=N\tilde{X}(r+pN)$$

$$=N\tilde{X}(r)$$

$$\text{因此,}\ \tilde{X}(r)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nr}$$

将r换成k则有

$$\tilde{X}(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

所以,对于周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的DFS

$$\begin{cases}\tilde{X}(k)=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\\ \tilde{x}(n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\end{cases}$$

通常将定标因子1/N

移到 $\tilde{x}(n)$ 表示式中。

即：

$$
\begin{cases}
\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\
\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}
\end{cases}
$$

3. 离散傅氏级数的习惯表示法

通常用符号 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ 代入，则：

正变换：

$$\tilde{X}(k) = DFS\left[\tilde{x}(n)\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$

反变换：

$$\tilde{x}(n) = IDFS\left[\tilde{X}(k)\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}$$

4. $\tilde{X}(k)$的周期性与用Z变换的求法

周期性：

$$\tilde{X}(k+mN)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+mN)n}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\cdot e^{-j2\pi mn}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$=\tilde{X}(k)$$

这就是说，$\tilde{X}(k)$只有N个不同值。

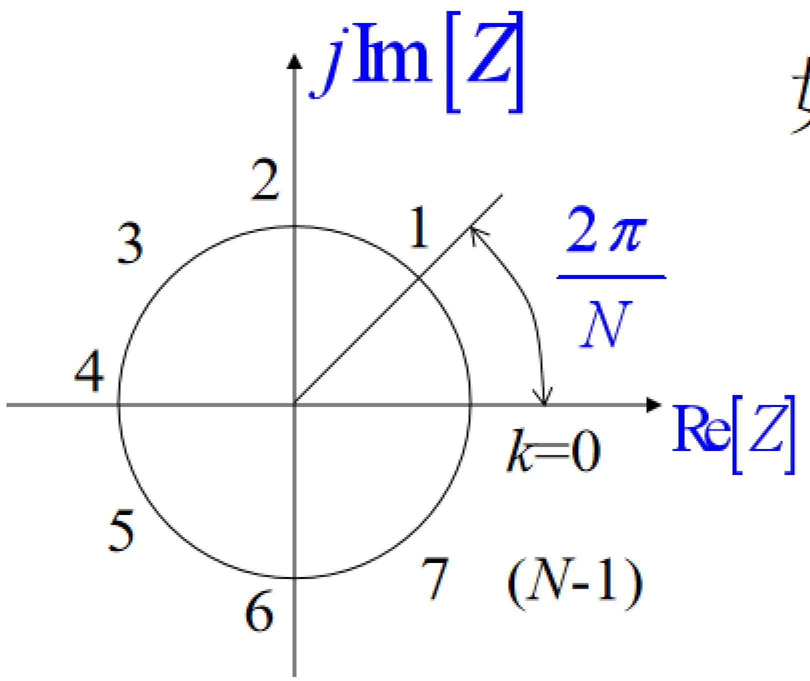
用Z变换的求 $\tilde{X}(k)$：

$\tilde{x}(n)$ 的一个周期内序列记作$x(n)$,而且

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0\leq n \leq N-1 \\ 0, & 其他n \end{cases}$$

对$x(n)$作Z变换，

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) Z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) Z^{-n}$$



如果 $Z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}$，则有

$$X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$=\tilde{X}(k)$$

可见，$\tilde{X}(k)$ 是Z变换 $X(Z)$ 在单位圆上抽样，抽样点在单位圆上的N个等分点上，且第一个抽样点为k=0。

§ 3-4 DFS的性质

一. 线性

如果

$$\tilde{X}_1(k) = DFS[\tilde{x}_1(n)]$$

$$\tilde{X}_2(k) = DFS[\tilde{x}_2(n)]$$

则有

$$DFS[a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)] = a\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k)$$

其中，a,b为任意常数。

二. 序列的移位

如果 $$DFS\left[\tilde{x}(n)\right]=\tilde{X}(k)$$

则有：

$$DFS\left[\tilde{x}(n+m)\right]=W_N^{-mk}\tilde{X}(k)$$

$$=e^{j\frac{2\pi}{N}mk}\tilde{X}(k)$$

证明：

$$DFS[\tilde{x}(n+m)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n+m)W_N^{nk}$$

令$i=m+n$,则 $n=i-m$。 $n=0$ 时，$i=m$; $n=N-1$时，$i=N-1+m$

所以

$$DFS[\tilde{x}(n+m)]=\sum_{i=m}^{N-1+m}\tilde{x}(i)W_N^{ik}\cdot W_N^{-mk}$$

$$=W_N^{-mk}\sum_{i=0}^{N-1}\tilde{x}(i)W_N^{ik}=W_N^{-mk}\tilde{x}(k)$$

*$\tilde{x}(i)$ 和W_N^{ik}都是以N为周期的周期函数。

三. 调制特性

如果 $DFS\left[\tilde{x}(n)\right]=\tilde{X}(k)$

则有

$$DFS\left[W_N^{mn}\tilde{x}(n)\right]=\tilde{X}(k+m)$$

证明:

$$DFS[W_N^{mn}\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{mn}\tilde{x}(n)W_N^{kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{(k+m)n}$$

$$=\tilde{X}(k+m)$$

$$W_N^{mn}=e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}=e^{-j\frac{2\pi}{N}nm}=(e^{-j\frac{2\pi}{N}n})^m$$

时域乘以虚指数($e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$)的m次幂，频域搬移m,调制特性。

四.周期卷积和

1.如果 $\tilde{Y}(k)=\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)$

则：

$$\tilde{y}(n)=IDFS[\tilde{Y}(k)]$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_2(m)\tilde{x}_1(n-m)$$

证明从略。

2.两个周期序列的周期卷积过程

（1）画出 $\tilde{x}_1(m)$ 和 $\tilde{x}_2(m)$ 的图形；

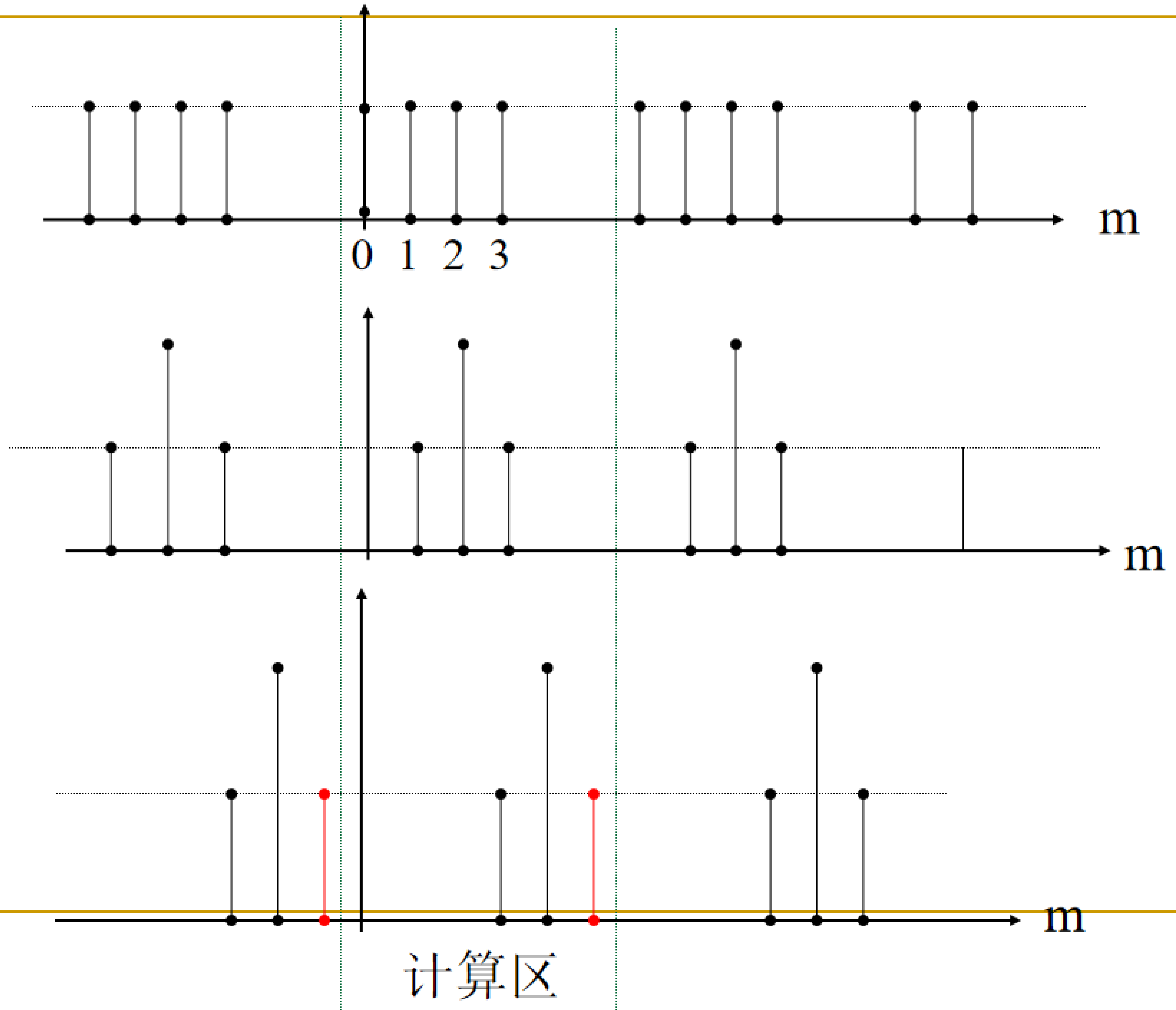
（2）将 $\tilde{x}_2(m)$ 翻摺,得到 $\tilde{x}_2(-m)=\tilde{x}_2(0-m)$

可计算出：

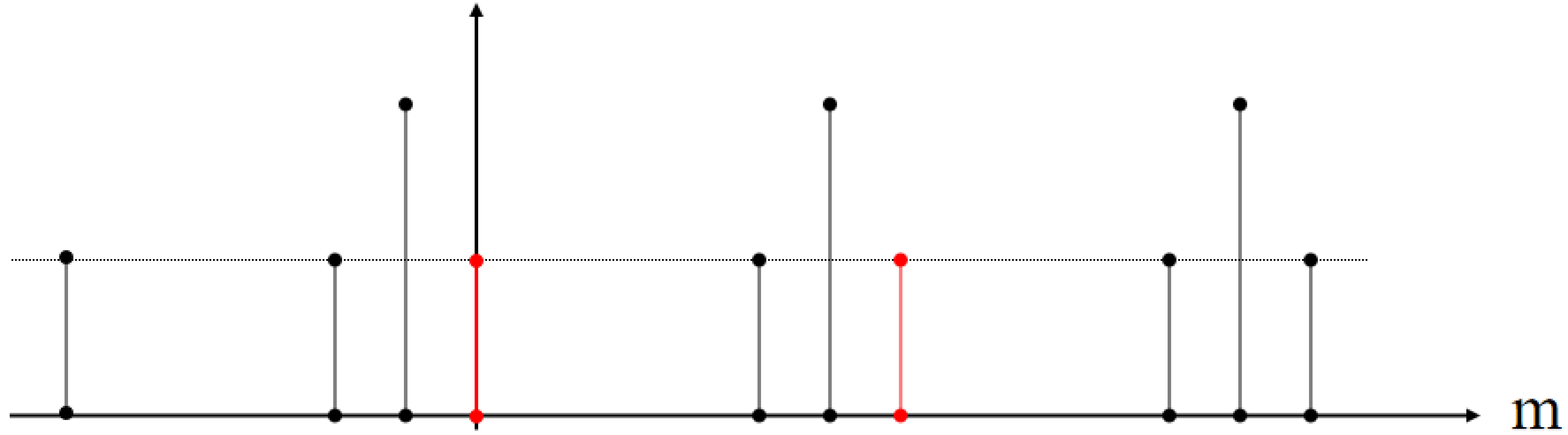
$$\tilde{y}(0)=\sum_{m=0}^{5}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(0-m)$$

$$=1\times 0+1\times 0+1\times 0+1\times 1+0\times 2+0\times 1$$

$$=1$$


m
0 1 2 3
m
m
计算区

（3）将 $\tilde{x}_2(-m)$ 右移一位、得到 $\tilde{x}_2(1-m)$

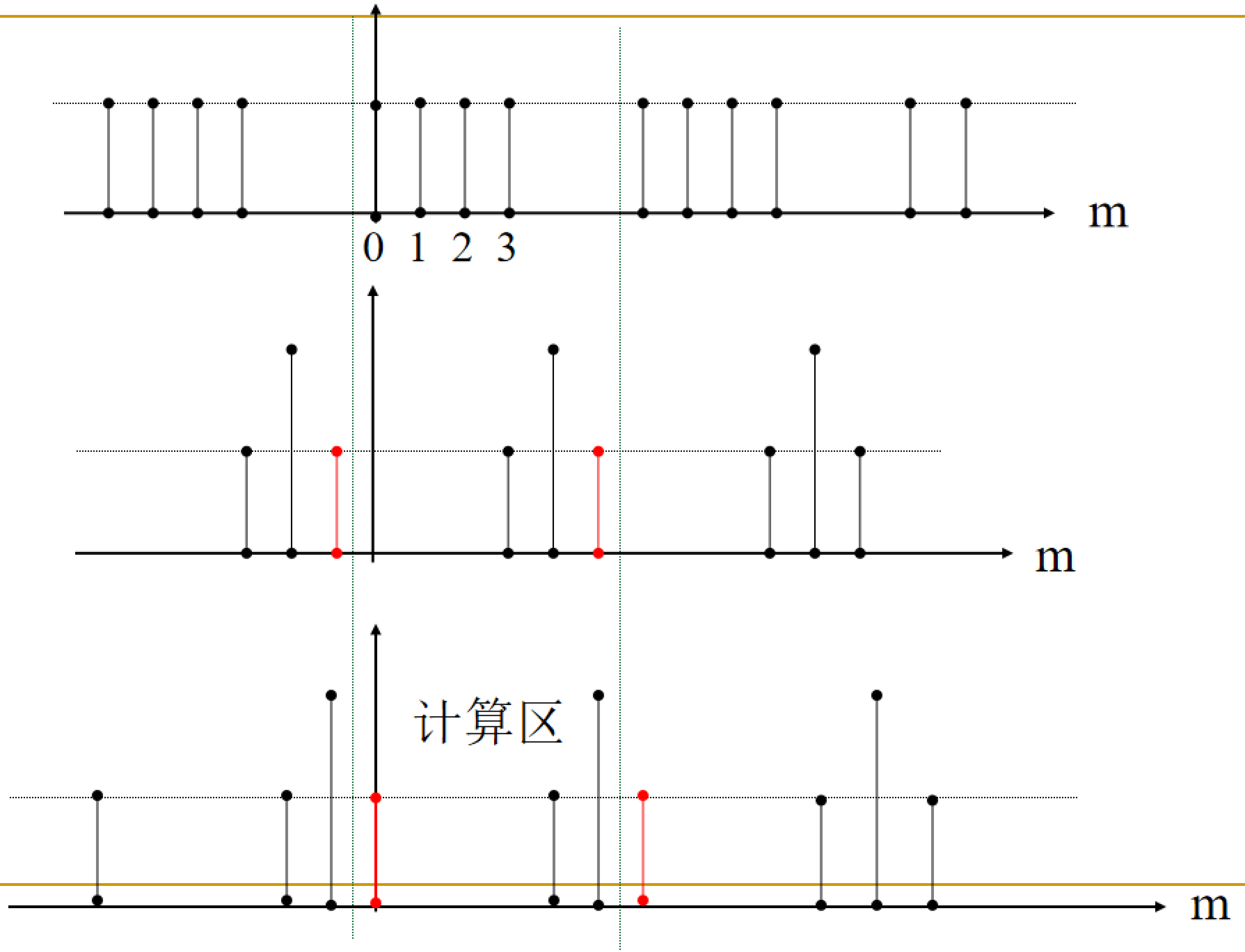


可计算出：

$$\tilde{y}(1)=\sum_{m=0}^{5}\tilde{x}_1(m)x_2(1-m)$$

$$=1\times1+1\times0+1\times0+1\times0+0\times1+0\times1$$

$$=1$$


m
0 1 2 3
m
计算区
m

（4）将 $\tilde{x}_2(-m)$ 再右移一位、得到 $\tilde{x}_2(2-m)$ ，

可计算出：

$$\tilde{y}(2)=\sum_{m=0}^{5}\tilde{x}_1(m)x_2(2-m)$$

$$=1\times 2+1\times 1+1\times 0+1\times 0+0\times 0+0\times 1$$

$$=3$$

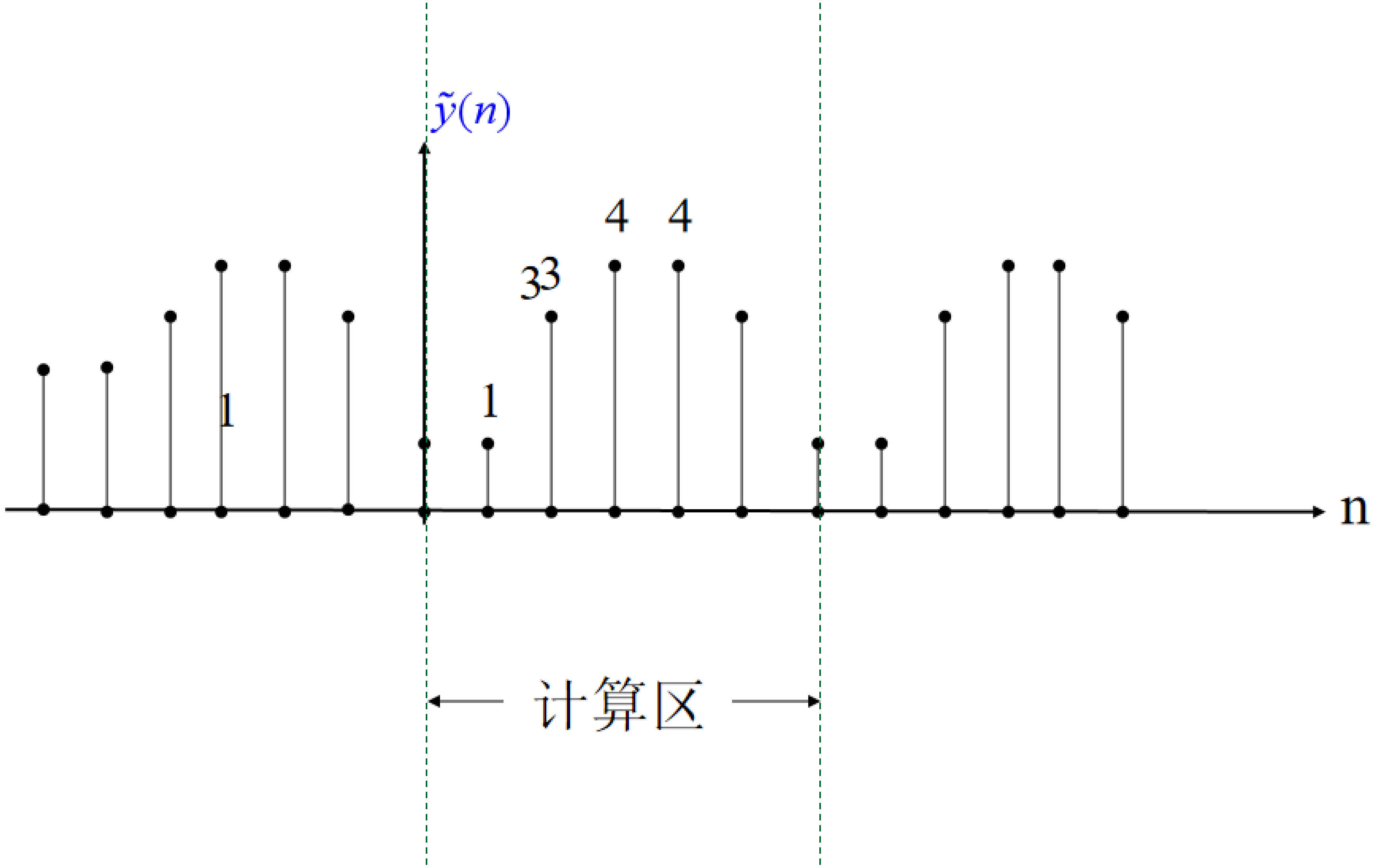
（5）以此类推，

$$\tilde{y}(3)=\sum_{m=0}^{5}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(3-m)$$

$$=1\times1+1\times2+1\times1+1\times0+0\times0+0\times0$$

$$=4$$

同样，可计算出：$\tilde{y}(4)=4,\qquad \tilde{y}(5)=3$



$\tilde{y}(n)$
4 4
3 3
1
1
n
计算区

3.频域卷积定理

如果 $\tilde{y}(n)=\tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)$ ，则

$$
\begin{aligned}
\tilde{Y}(k) &= DFS\left[\tilde{y}(n)\right] \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{y}(n) W_N^{nk} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l)\tilde{X}_2(k-l) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_2(l)\tilde{X}_1(k-l)
\end{aligned}
$$

证明从略。

§ 3-5 DFT--有限长序列的离散频域表示

一. 预备知识

1. 余数运算表达式

如果 $n = n_1 + mN,$

m为整数；则有：

$$((n))_N = (n_1)$$

此运算符表示n被N除，商为m，余数为 n_1 。

(n_1) 是 $((n))_N$ 的解，或称作取余数，或说作n对N取模值，或简称为取模值，n模N。

例如：

(1) $$n=25, N=9$$

$$n=25=2\times 9+7=2N+n_1$$

$$((25))_9=7$$

(2) $$n=-4, N=9$$

$$n=-4=-9+5=-N+5$$

$$((-4))_9=5$$

2. $x((n))_N = x(n_1)$含义

先取模值，后进行函数运作;

而 $x(n_1) = x((n))_N$ 视作将 $x(n_1)$ 周期延拓。

二. 有限长序列x(n)和周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的关系

$$\tilde{x}(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(n+mN)=x((n))_N$$

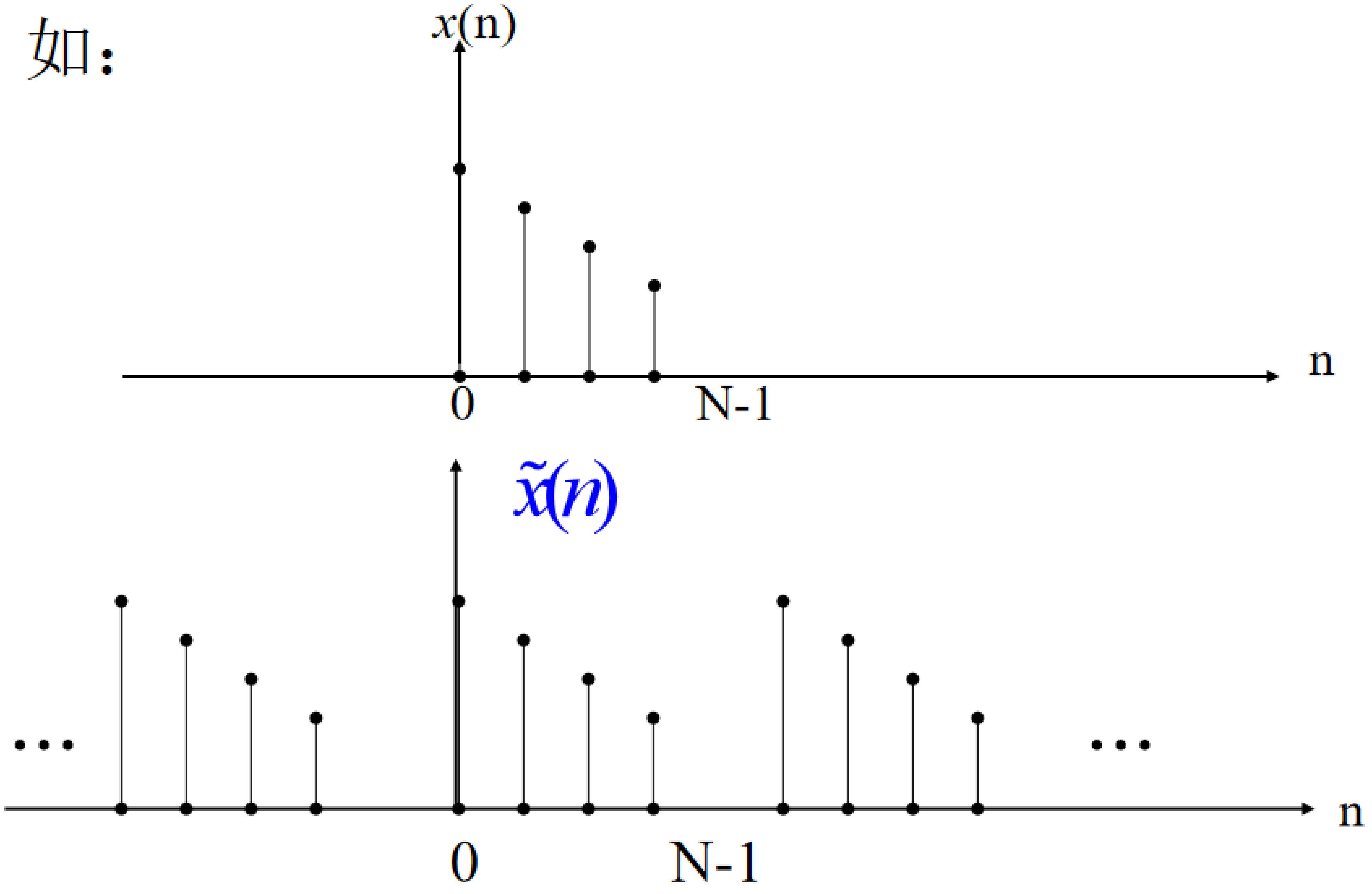
周期序列 $\tilde{x}(n)$是有限长序列x(n)的周期延拓。

$$x(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n), & 0\le n\le N-1\\ 0, & \text{其他}n\end{cases}$$

或$x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)$

有限长序列x(n)是周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列。

如：



定义从n=0 到（N-1）的第一个周期为主值序列或区间。

三.周期序列 $\tilde{X}(k)$ 与有限长序列X(k)的关系

$$
\begin{cases}
\tilde{X}(k) = X\left(\left(k\right)\right)_N \\
X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k)
\end{cases}
$$

同样，周期序列 $\tilde{X}(k)$ 是有限长序列X(k)的周期延拓。

而有限长序列$X(k)$是周期序列 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列。

四.从DFS到DFT

$$
\begin{cases}
\tilde{X}(k) = DFS\left[\tilde{x}(n)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk} \\
\tilde{x}(n) = IDFS\left[\tilde{X}(k)\right] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}
\end{cases}
$$

从上式可知，DFS,IDFS的求和只限定在n=0到n=N-1,及k=0到N-1的主值区间 进行。

因此可得到新的定义，即有限长序列的离散傅氏变换(DFT)的定义。

$$\begin{cases} X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, & 0 \le k \le N-1 \\ x(n) = IDFT[X(k)] = \dfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, & 0 \le n \le N-1 \end{cases}$$

或者：$$\begin{cases} X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k) \\ x(n) = \tilde{x}(n) R_N(n) \end{cases}$$

§ 3-6 DFT的性质

一. 线性

1.两序列都是N点时

如果 $DFT\left[x_1(n)\right]=X_1(k)$

$DFT\left[x_2(n)\right]=X_2(k)$

则有：

$$DFT\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]=aX_1(k)+bX_2(k)$$

2. $x_1(n)$和 $x_2(n)$ 的长度N_1和N_2不等时，

选择 $N=\max[N_1,N_2]$ 为变换长度,短者进

行补零达到N点。

二. 序列的圆周移位

1.定义

一个有限长序列 $x(n)$ 的圆周移位定义为

$$x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

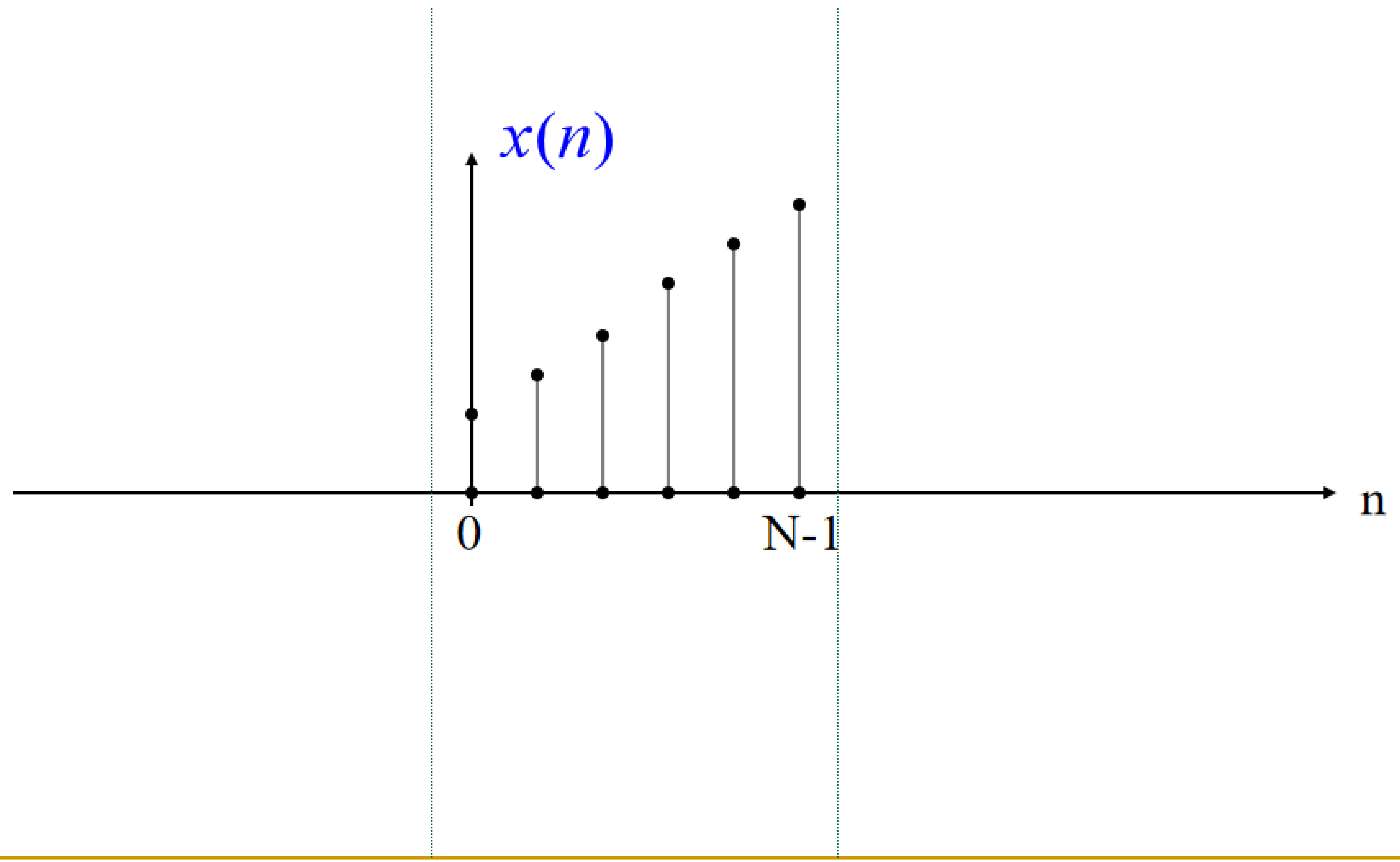
这里包括三层意思：

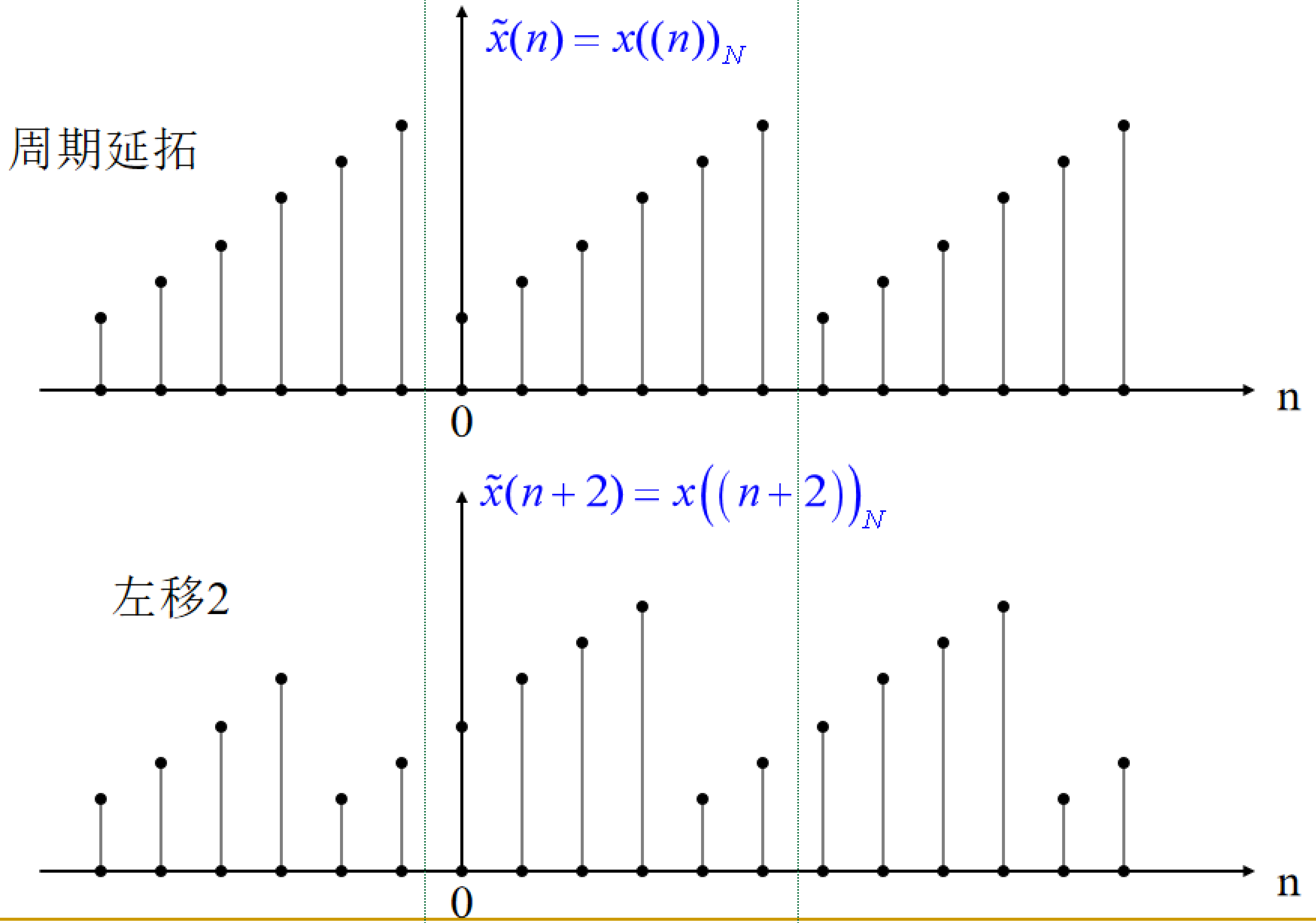
a.先将$x(n)$ 进行周期延拓

b.再进行移位 $\tilde{x}(n+m) = x((n+m))_N$

c.最后取主值序列：

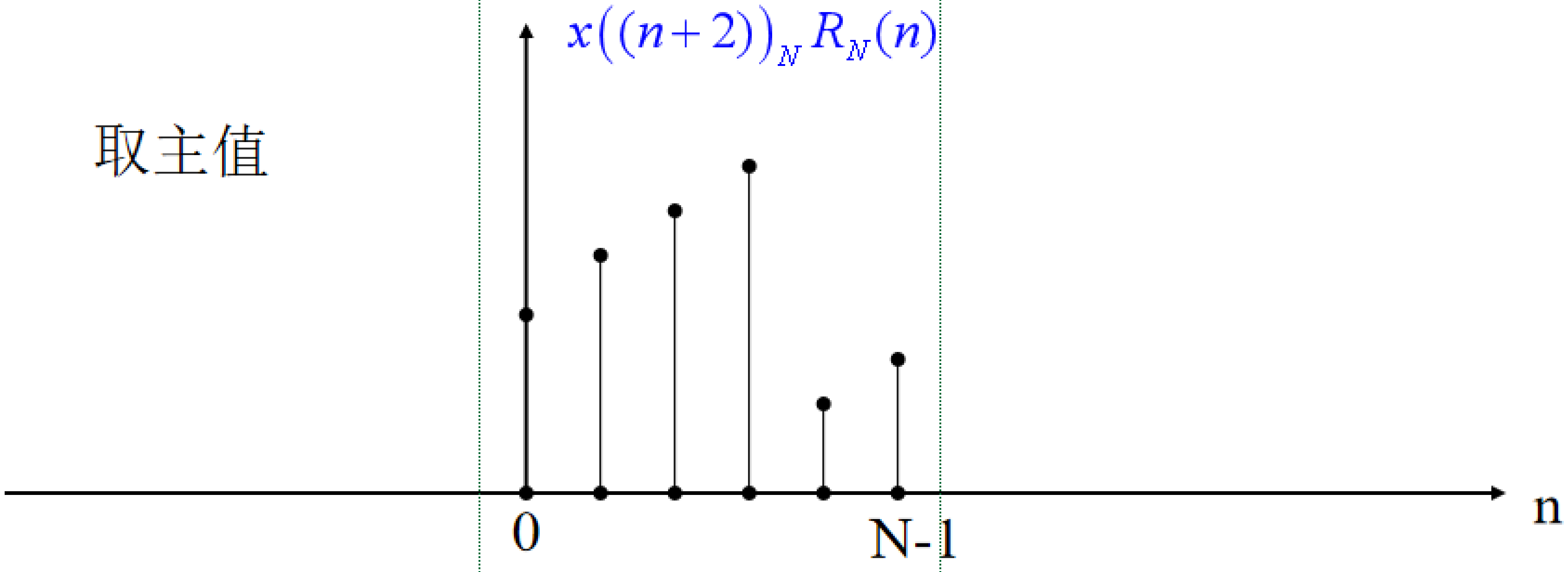
$$x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$


$x(n)$
n
0
N-1



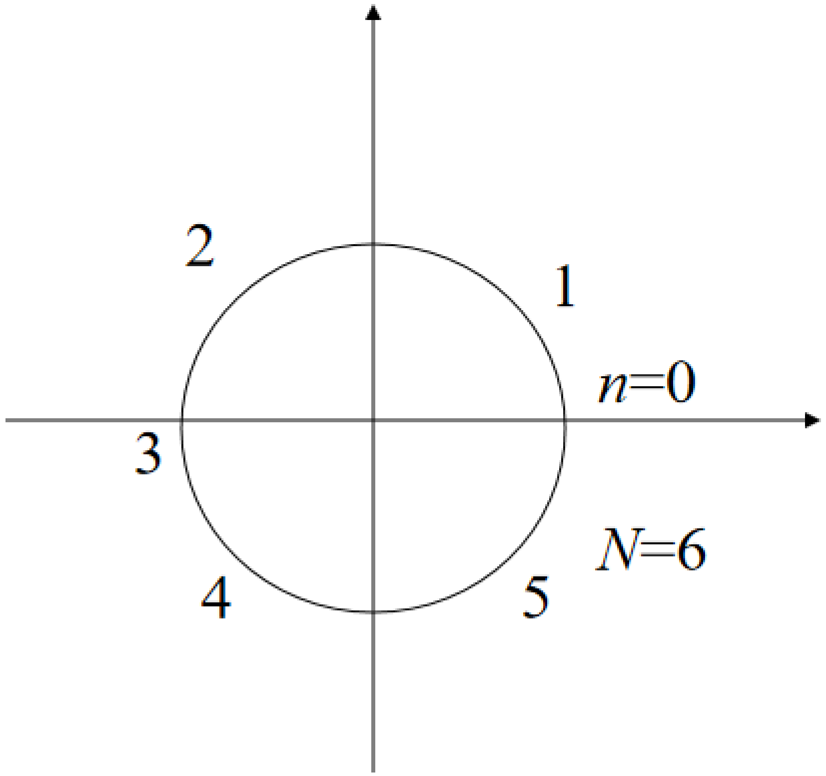
$\tilde{x}(n) = x((n))_N$
周期延拓
0
n
$\tilde{x}(n+2) = x\big((n+2)\big)_N$
左移2
0
n

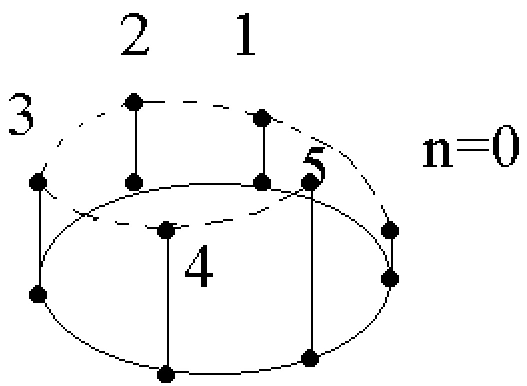
取主值

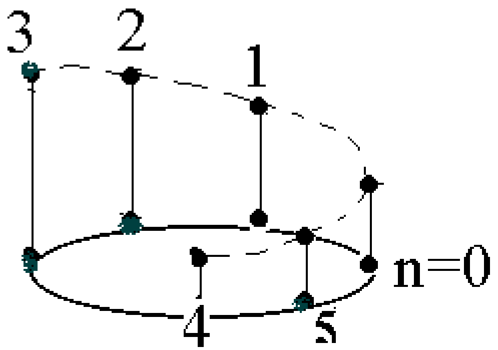


2. 圆周位移的含义

由于我们取主值序列，即只观察n=0到N-1这一主值区间，当某一抽样从此区间一端移出时，与它相同值的抽样又从此区间的另一端进来。如果把 $x(n)$ 排列在一个N等分的圆周 ，序列的移位就相当于 $x(n)$ 在圆上旋转，故称作圆周移位。当围着圆周观察几圈时，看到就是周期序列：$\tilde{x}(n)$ 。


2
1
n=0
3
N=6
4
5


2
1
3
n=0
5
4


3
2
1
n=0
4
5

3. 序列圆周移位后的DFT

$$DFT[x_m(n)] = DFT[x((n+m))_N R_N(n)] = W_N^{-mk} X(k)$$

证明：由周期序列的移位特性

$$DFS[x((n+m))_N] = DFS\left[\tilde{x}(n+m)\right] = W_N^{-mk}\tilde{X}(k) = e^{j\frac{2\pi}{N}mk}\tilde{X}(k)$$

可推得

$$\begin{aligned} DFT[x_m(n)] &= DFT[x((n+m))_N R_N(n)] \\ &= DFT[\tilde{x}(n+m) R_N(n)] \\ &= W_N^{-mk}\tilde{X}(k) R_N(k) = W_N^{-mk} X(k) \end{aligned}$$

若X(k)在频域圆周移位时，可得类似结果

$$IDFT[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^{nl} x(n)$$

三、共轭对称性

1. 周期序列共轭对称分量与共轭反对称分量

周期为N的周期序列的共轭对称分量与共轭反对称分量分别定义为

$$\tilde{x}_e(n)=\frac{1}{2}[\tilde{x}(n)+\tilde{x}^*(-n)]=\frac{1}{2}[x((n))_N+x^*((N-n))_N]$$

$$\tilde{x}_o(n)=\frac{1}{2}[\tilde{x}(n)-\tilde{x}^*(-n)]=\frac{1}{2}[x((n))_N-x^*((N-n))_N]$$

同样，有

$$\tilde{x}(n)=\tilde{x}_e(n)+\tilde{x}_o(n)$$

$$\tilde{x}_e(n)=\tilde{x}_e^*(-n)$$

$$\tilde{x}_o(n)=-\tilde{x}_o^*(-n)$$

2. 有限长序列的圆周共轭对称分量与圆周共轭反对称分量

有限长序列的圆周共轭对称分量与圆周共轭反对称分量分别定义为

$$x_{ep}(n)=\tilde{x}_e(n)R_N(n)=\frac{1}{2}[x((n))_N+x^*((N-n))_N]R_N(n)$$

$$x_{op}(n)=\tilde{x}_o(n)R_N(n)=\frac{1}{2}[x((n))_N-x^*((N-n))_N]R_N(n)$$

由于 $x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)=[\tilde{x}_e(n)+\tilde{x}_o(n)]R_N(n)$

$$=\tilde{x}_e(n)R_N(n)+\tilde{x}_o(n)R_N(n)$$

所以 $\boldsymbol{x(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n)}$

这表明长为N的有限长序列可分解为两个长度相同的两个分量。

3. 共轭对称特性之一

$$\text{如果} X(k)=DFT[x(n)]，\text{则} DFT[x^*(n)]$$

$$=X^*((-k))_N R_N(k)=X^*((N-k))_N R_N(k)$$

证明：

$$DFT[x^*(n)]=\sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{nk} R_N(k)$$

$$=[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk}]^* R_N(k)=[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{Nn} W_N^{-nk}]^* R_N(k)$$

$$=[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(N-k)n}]^* R_N(k)=X^*((N-k))_N R_N(k)$$

4. 共轭对称特性之二

$$\text{如果}X(k)=DFT[x(n)],$$

$$\text{则}DFT[x^*((-n))_N R_N(n)]=X^*(k)$$

证明：

$$DFT[x^*((-n))_N R_N(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x^*((-n))_N R_N(n)W_N^{nk}$$

$$=[\sum_{n=0}^{N-1}x(-n)W_N^{-nk}]^*=[\sum_{n=0}^{-(N-1)}x(n)W_N^{nk}]^*$$

$$=[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}]^*=X^*(k)$$

可知：

$$x^*((-n))_N R_N(n)\Rightarrow X^*(k)$$

5. 共轭对称特性之三

$$\text{如果}X(k)=DFT[x(n)]，\ \text{则}DFT\{\mathrm{Re}[x(n)]\}$$

$$=\frac{1}{2}[X((k))_N+X^*((N-k))_N]R_N(k)=X_{ep}(k)$$

证明：

$$\because \mathrm{Re}[x(n)]=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(n)]$$

$$\therefore DFT\{\mathrm{Re}[x(n)]\}=\frac{1}{2}\{DFT[x(n)]+DFT[x^*(n)]\}$$

$$=\frac{1}{2}[X(k)+X^*((N-k))_N R_N(k)]$$

$$=\frac{1}{2}[X((k))_N+X^*((N-k))_N]R_N(k)=X_{ep}(k)$$

6. 共轭对称特性之四

$$\text{如果} X(k) = DFT[x(n)], \text{ 则} DFT\{j\,\mathrm{Im}[x(n)]\}$$

$$= \frac{1}{2}[X((k))_N - X^*((N-k))_N]R_N(k) = X_{op}(k)$$

证明：

$$\because j\,\mathrm{Im}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$$

$$\therefore DFT\{j\,\mathrm{Im}[x(n)]\} = \frac{1}{2}\{DFT[x(n)] - DFT[x^*(n)]\}$$

$$= \frac{1}{2}[X(k) - X^*((N-k))_N R_N(k)]$$

$$= \frac{1}{2}[X((k))_N - X^*((N-k))_N]R_N(k) = X_{op}(k)$$

*复数序列虚部乘以j的DFT =该序列DFT的圆周共轭反对称分量。

7. 共轭对称特性之五、六

同样，可证明：

$$\mathrm{Re}[X(k)] = DFT[x_{ep}(n)],$$

$$j\,\mathrm{Im}[X(k)] = DFT[x_{op}(n)]$$

8. X(k) 圆周共轭对称分量与圆周共轭反对称分量的对称性

$$(1)、X(k) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$$

$$(2)、X_{ep}(k) = X_{ep}^*(-k) = X_{ep}^*((-k))_N R_N(k)$$

$$= X_{ep}^*((N-k))_N R_N(k)$$

$$(3)、X_{op}(k) = -X_{op}^*(-k) = -X_{op}^*((-k))_N R_N(k)$$

$$= -X_{op}^*((N-k))_N R_N(k)$$

9.实、虚序列的对称特性

当x(n)为实序列时，根据特性之三，则

$$X(k)=X_{ep}(k)$$

又据$X_{ep}(k)$的对称性：

$$\therefore X(k)=X^{*}((N-k))_{N}R_{N}(k)$$

当x(n)为纯虚序列时，根据特性之四，则

$$X(k)=X_{op}(k)$$

又据$X_{op}(k)$的对称性：

$$\therefore X(k)=-X^{*}((-k))_{N}R_{N}(k)$$

四. 圆周卷积和

1. 时域卷积定理

设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 均为长度为N的有限长序列，且 $DFT[x_1(n)] = X_1(k)$，$DFT[x_2(n)] = X_2(k)$

如果 $Y(k) = X_1(k) \cdot X_2(k)$ ，则

$$y(n) = IDFT[Y(k)]$$

$$= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N\right] R_N(n) = x_1(n) \, ⓝ \, x_2(n)$$

$$= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N\right] R_N(n) = x_2(n) \, ⓝ \, x_1(n)$$

证明:相当于将 $\tilde{x}_1(n),\tilde{x}_2(n)$ 作周期卷积和后，再取主值序列。

将 $Y(k)$ 周期延拓: $\tilde{Y}(k)=\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)$

则有:
$$\begin{aligned}\tilde{y}(n)&=IDFS\left[\tilde{Y}(k)\right]\\&=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)\\&=\left[\sum_{m=0}^{N-1}(x_1(m))_N x_2\left((n-m)\right)_N\right]\end{aligned}$$

在主值区间 $0 \le m \le N-1, x_1((m))_N = x_1(m)$ ，所以：

$$y(n) = \tilde{y}(n) R_N(n)$$

$$= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N \right] R_N(n)$$

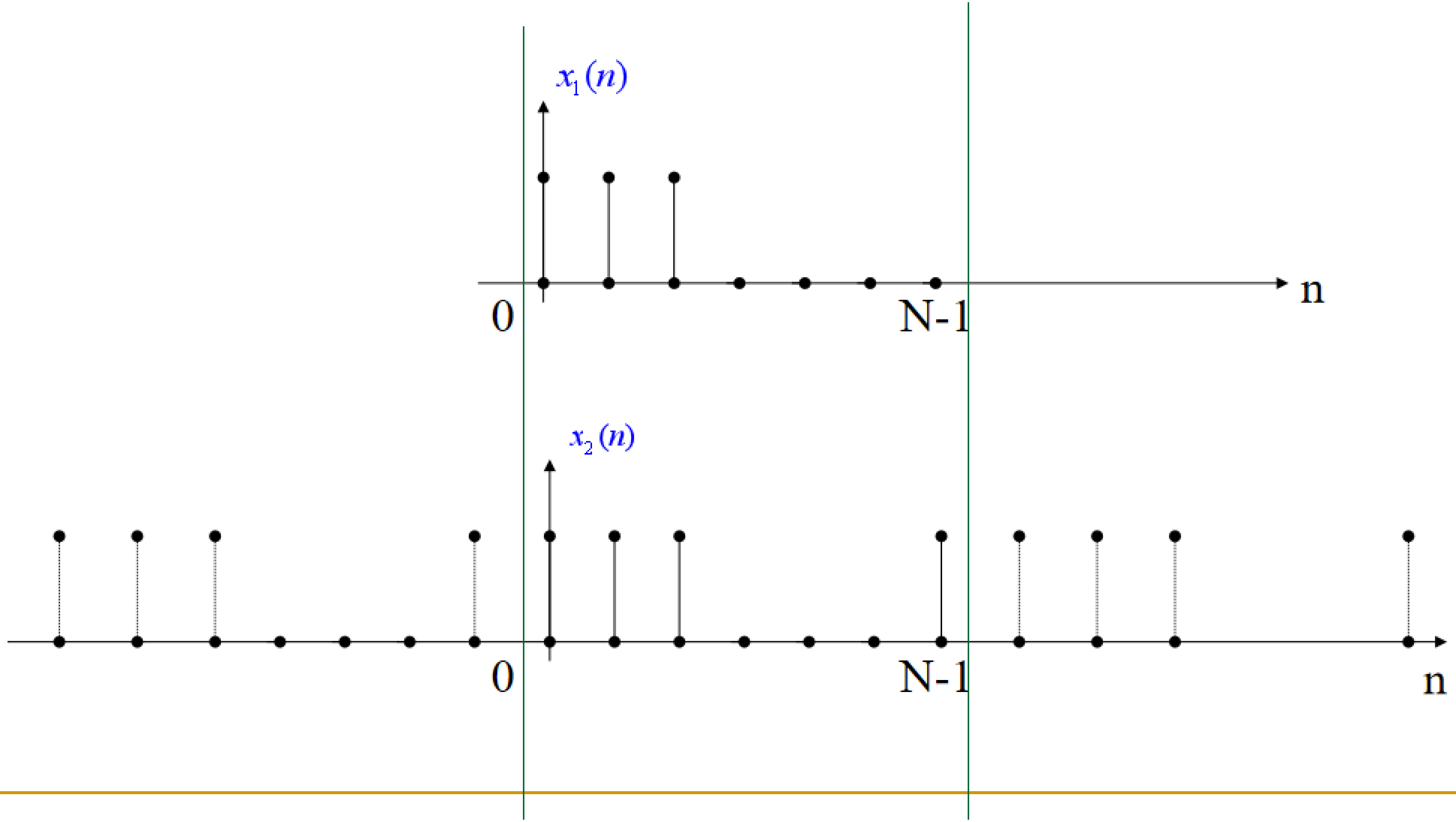
$$= x_1(n) \, \text{Ⓝ} \, x_2(n)$$

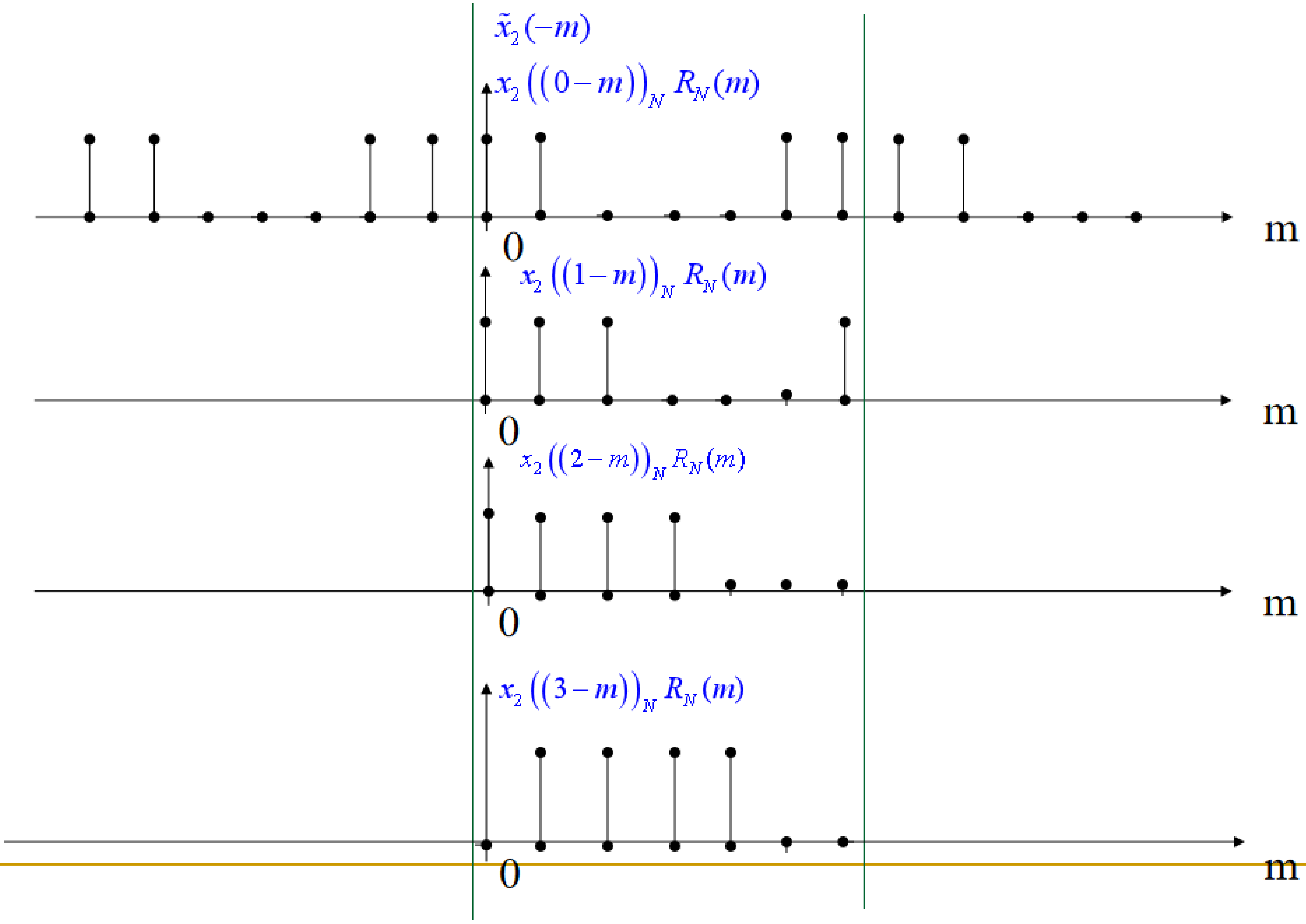
同样可证：

$$y(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N \right] R_N(n)$$

$$= x_2(n) \, \text{Ⓝ} \, x_2(n)$$

2.时域圆周卷积过程




$\tilde{x}_2(-m)$
$x_2((0-m))_N R_N(m)$
m
0
$x_2((1-m))_N R_N(m)$
m
0
$x_2((2-m))_N R_N(m)$
m
0
$x_2((3-m))_N R_N(m)$
m
0

$$y(0)=[\sum_{m=0}^{6}x_1(m)x_2((0-m))_7]R_7(m)=1\times1+1\times1+1\times0+0\times0+0\times0+0\times1+0\times1=2$$

$$y(1)=[\sum_{m=0}^{6}x_1(m)x_2((1-m))_7]R_7(m)=1\times1+1\times1+1\times1+0\times0+0\times0+0\times0+0\times1=3$$

$$y(2)=[\sum_{m=0}^{6}x_1(m)x_2((2-m))_7]R_7(m)=1\times1+1\times1+1\times1+0\times1+0\times0+0\times0+0\times0=3$$

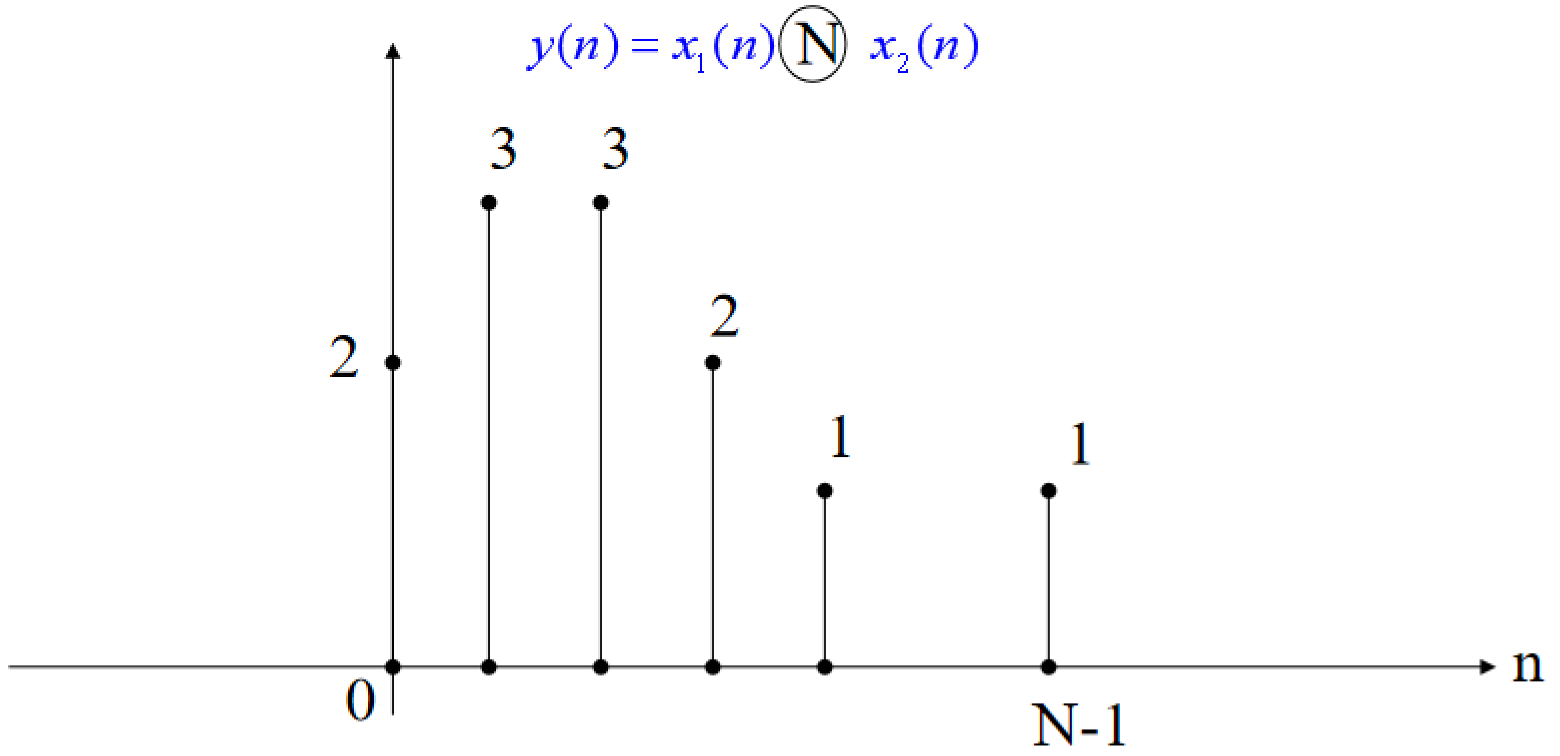
$$y(3)=[\sum_{m=0}^{6}x_1(m)x_2((3-m))_7]R_7(m)=1\times0+1\times1+1\times1+0\times1+0\times1+0\times0+0\times2=2$$

$$y(4)=1$$

$$y(5)=0$$

$$y(6)=1$$

最后结果：



五.有限长序列的线性卷积与圆周卷积

1.线性卷积

$x_1(n)$ 的长度为 $N_1 (0 \le n \le N_1 - 1)$

$x_2(n)$ 的长度为 $N_2 (0 \le n \le N_2 - 1)$

它们线性卷积为

$$y_l(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m) x_2(n-m)$$

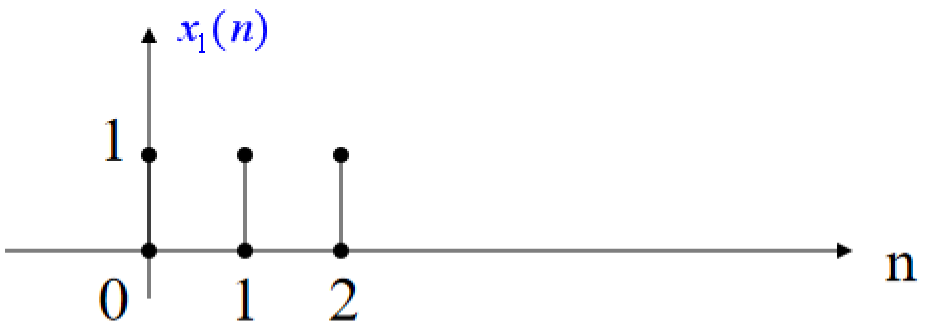
$x_1(m)$的非零区间为 $0 \le m \le N_1 - 1$

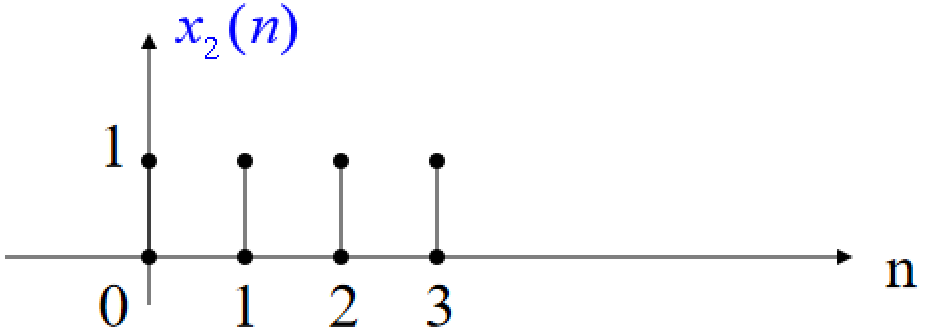
$x_2(m)$的非零区间为 $0 \le n-m \le N_2 - 1$

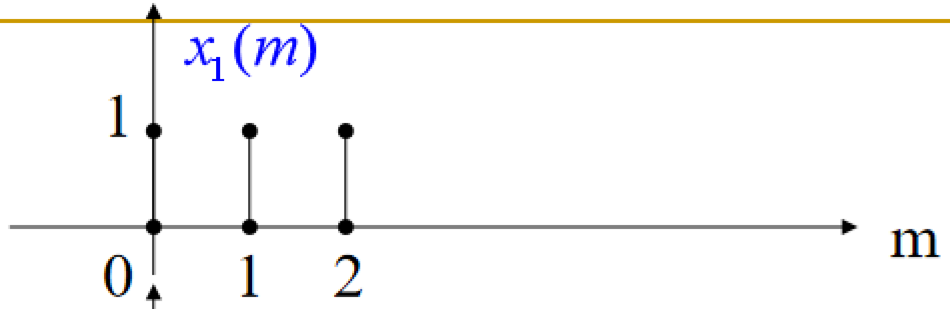
两不等式相加得 $0 \le n \le N_1 + N_2 - 2$

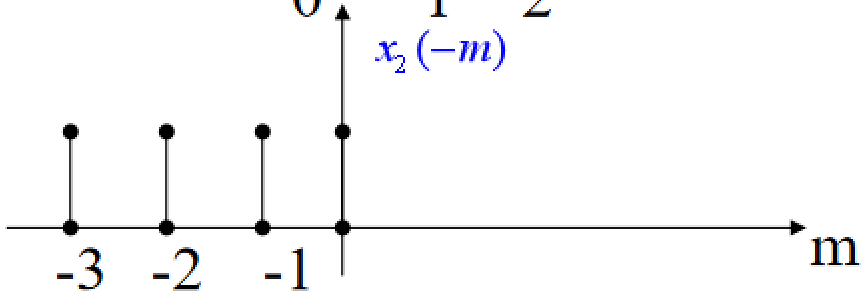
也就是 $y_l(n)$ 不为零的区间.

例如:

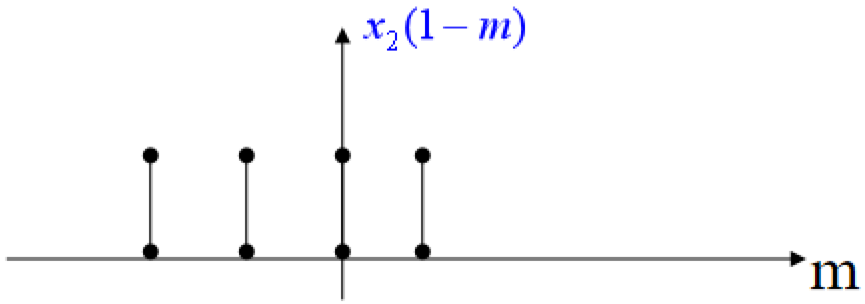




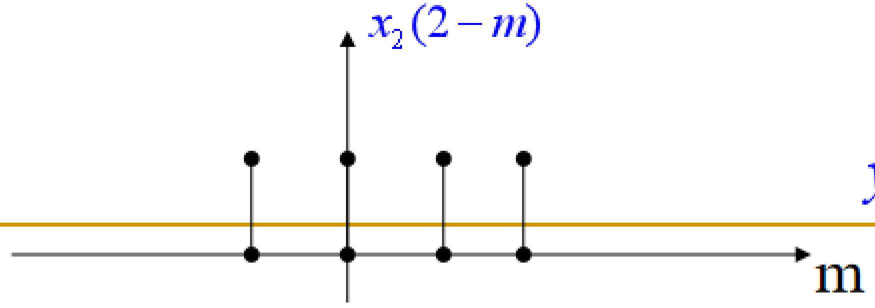




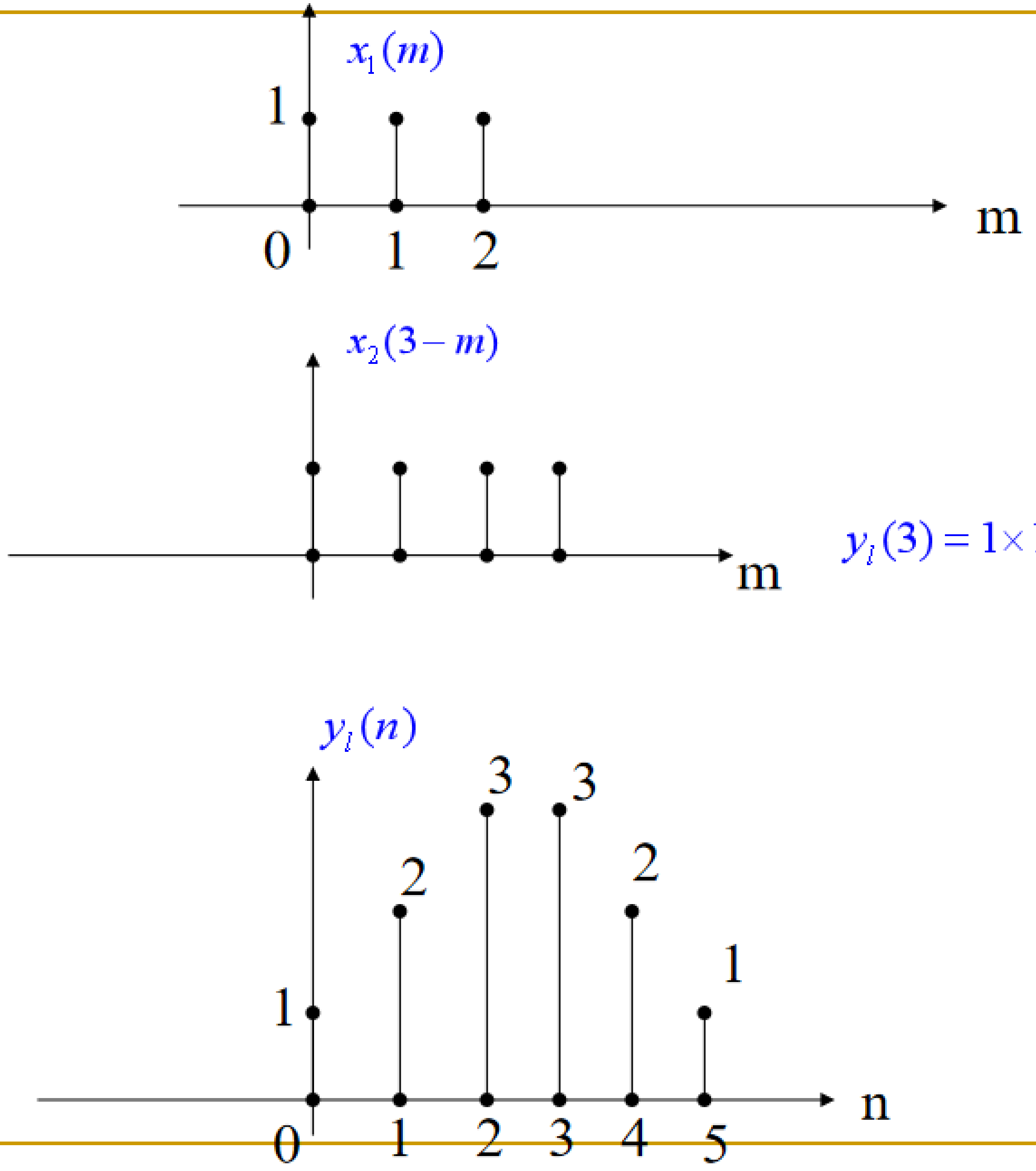
$$y_l(0)=1\times 1=1$$



$$y_l(1)=1\times 1+1\times 1=2$$



$$y_l(2)=1\times 1+1\times 1+1\times 1=3$$



$$y_l(3) = 1\times 1 + 1\times 1 + 1\times 1 = 3$$

2.用圆周卷积计算线性卷积

圆周卷积是线性卷积的周期延拓序列的主值序列.

$x_1(n)$ 的长度为 N_1 ， $x_2(n)$的长度为 N_2,先构造长度均为L长的序列， 即将 $x_1(n),x_2(n)$补零点;然后再对它们进行周期延拓， 即

$$x_1((n))_L, x_2((n))_L$$

所以得到周期卷积:

$$\tilde{y}(n)=\sum_{m=0}^{L-1} x_1((m))_L \, x_2((n-m))_L$$

由于$0\le m\le L-1$,故$x_1((m))_L=x_1(m)$,因此

$$\tilde{y}(n)=\sum_{m=0}^{L-1}x_1(m)x_2((n-m))_L=\sum_{m=0}^{L-1}x_1(m)\sum_{r=-\infty}^{\infty}x_2(n+rL-m)$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{L-1}x_1(m)x_2(n+rL-m)$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}y_l(n+rL)$$

可见,周期卷积为线性卷积的周期延拓,其周期为L.由于 y_l 有 N_1+N_2-1 个非零值,所以周期L必须满足: $L \geq N_1+N_2-1$

又由于圆周卷积是周期卷积的主值序列,所以圆周卷积是线性卷积的周期延拓序列的主值序列,即

$$y(n) = \tilde{y}(n) R_L(n) = \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+rL) \right] R_L(n)$$

$$x_1(n) \textcircled{L} x_2(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

§ 3-7　抽样Z变换--频域抽样理论

一.如何从频域抽样恢复原序列

1.两种抽样

时域抽样:

对一个频带有限的信号,根据抽样定理对其进行抽样,所得抽样信号的频谱是原带限信号频谱的周期延拓,因此,完全可以由抽样信号恢复原信号。

频域抽样:

对一有限序列(时间有限序列)进行DFT所得*X(k)*就是序列傅氏变换的采样.所以DFT就是频域抽样。

2.由频域抽样恢复序列

一个绝对可和的非周期序列x(n)的Z变换为

$$X(Z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)Z^{-n}$$

由于x(n)绝对可和,故其傅氏变换存在且连续,也即其Z变换收敛域包括单位圆。这样,对X(Z)在单位圆上N等份抽样,就得到 $\tilde{X}(k)$

$$\tilde{X}(k)=X(Z)\Big|_{Z=W_N^{-k}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)W_N^{nk}$$

对 $\tilde{X}(k)$ 进行反变换,并令其为 $\tilde{x}_N(n)$,则

$$\tilde{x}_N(n) = IDFS\left[\tilde{X}(k)\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-nk}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)W_N^{mk}\right]W_N^{-nk}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}\right]x(m)$$

$$\left(\frac{1}{N}\right)\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m-n)k} = \begin{cases} 1\ , & m=n+rN\ , \\ 0\ , & \text{其他}m \end{cases}$$

$$m=-\infty \rightarrow r=-\infty;\quad m=\infty \rightarrow r=\infty;$$

所以 $\tilde{x}_N(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN)$

可见,由 $\tilde{X}(k)$ 得到的周期序列

$\tilde{x}_N(n)$ 是非周期序列*x(n)*的周期延拓。

也就是说,频域抽样造成时域周期延拓。

3.频域抽样不失真的条件

(1) 当*x(n)*不是有限长时，无法周期延拓；

(2) 当x(n)为长度M,只有N≥M时,才能不失真的恢复信号,即

$$x_N(n)=\tilde{x}_N(n)R_N(n)$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)R_N(n)=x(n),N\geq M$$

二. 由$X(k)$表达 $X(Z)$与 $X(e^{j\omega})$ 的问题——内插公式

1.由$X(k)$恢复$X(Z)$

序列$x(n)$,（0≤n≤N-1）的Z变换为

$$X(Z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)Z^{-n}$$

由于 $x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}$ ，所以

（下页！）

$$X(Z)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}\right]Z^{-n}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{-nk}Z^{-n}\right]X(k)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[1+W_N^{-k}Z^{-1}+W_N^{-2k}Z^{-2}+\cdots+W_N^{-(N-1)k}Z^{-(N-1)}\right]X(k)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\left(1-W_N^{-Nk}Z^{-N}\right)\Big/\left(1-W^{-k}Z^{-1}\right)\right]X(k)$$

$$=\frac{1-Z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{1-W_N^{-k}Z^{-1}}$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-Z^{-N}}{N\left(1-W_N^{-k}Z^{-1}\right)}=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\varphi_k(Z)$$

上式就是由*X(k)*恢复*X(Z)*的内插公式,其中

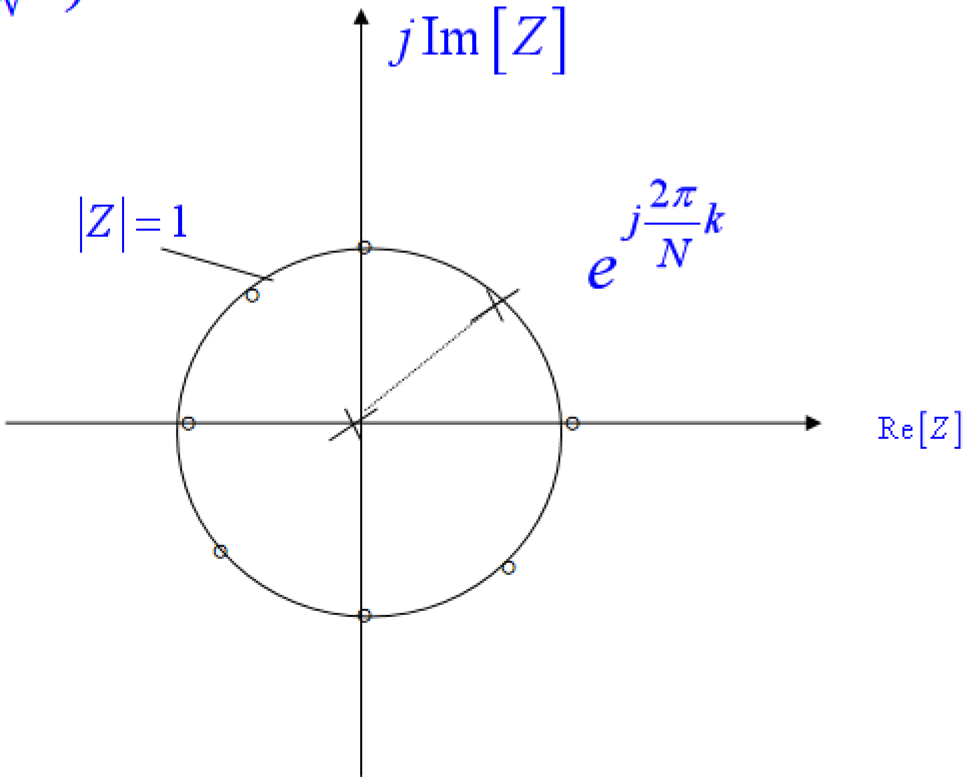
$$\varphi_k(Z)=\frac{1-Z^{-N}}{N\left(1-W_N^{-k}Z^{-1}\right)}=\frac{1}{N}\frac{z^N-1}{z^{N-1}(z-W_N^{-k})}$$

称作内插函数。

2.内插函数的特性

将内插函数写成如下式:

$$\varphi_k(Z) = \frac{1}{N}\frac{z^N - 1}{z^{N-1}(z - W_N^{-k})}$$



$$\varphi_k(Z)=\frac{1}{N}\frac{z^N-1}{z^{N-1}(z-W_N^{-k})}$$

令分子为零,得 $Z=e^{j\frac{2\pi}{N}r}, r=0,1,\cdots k,\cdots,N-1$ ；

所以有N个零点。令分母为零,得 $Z=W_N^{-k}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ 为 一阶极点, Z=0为*(N-1)*阶极点。但是极点 与一零点相消。这样只有*(N-1)*个零点,抽样点 $e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ 称作本抽样点。因此说,

内插函数仅在本抽样点处不为零,其他*(N-1)*个抽样点均为零。

3.频率响应

单位圆上的Z变换即为频响，$Z=e^{j\omega}$代入

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\varphi_k(e^{j\omega})$$

4.内插函数的频率特性

将$z=e^{j\omega}$代入：$\varphi_k(Z)=\dfrac{1-Z^{-N}}{N\left(1-W_N^{-k}Z^{-1}\right)}$

$$\varphi_k\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{N}\frac{1-e^{-jN\omega}}{1-e^{-j\left(\omega-k\frac{2\pi}{N}\right)}}=\frac{1}{N}\frac{e^{-j\frac{N\omega}{2}}\left(e^{j\frac{N\omega}{2}}-e^{-j\frac{N\omega}{2}}\right)}{e^{-j(\omega-\frac{2\pi}{N}k)/2}\left[e^{j\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)/2}-e^{-j(\omega-\frac{2\pi}{N}k)/2}\right]}$$

$$=\frac{1}{N}\frac{\sin\frac{N\omega}{2}}{\sin\left[(\omega-\frac{2\pi}{N}k)/2\right]}e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\omega+\frac{k\pi}{N}\right)}$$

可见，$\varphi_k\left(e^{j\omega}\right)$既是$\omega$的函数又是$k$的函数,其可表示为

$$\varphi_k\left(e^{j\omega}\right)=\varphi\left(\omega-k\frac{2\pi}{N}\right)$$

当$k=0$时,则有

$$\varphi_0\left(\omega\right)=\frac{1}{N}\frac{\sin\frac{N\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}$$

$$\omega = 0 \text{ 时}, \varphi_0(0) = \frac{1}{N} \frac{\cos\frac{N\omega}{2}}{\cos\frac{\omega}{2}} \frac{\frac{1}{2}N}{\frac{1}{2}} = 1;$$

$$\omega = i\frac{2\pi}{N}(i = 1, 2, \cdots, N-1) \text{ 时},$$

$$\because \sin\frac{N\omega}{2} = \sin(i\pi) = 0\text{，所以}\varphi_0(\omega) = 0\text{。}$$

这说明$\varphi_k(e^{j\omega}) = \varphi\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$在本抽样点为1，

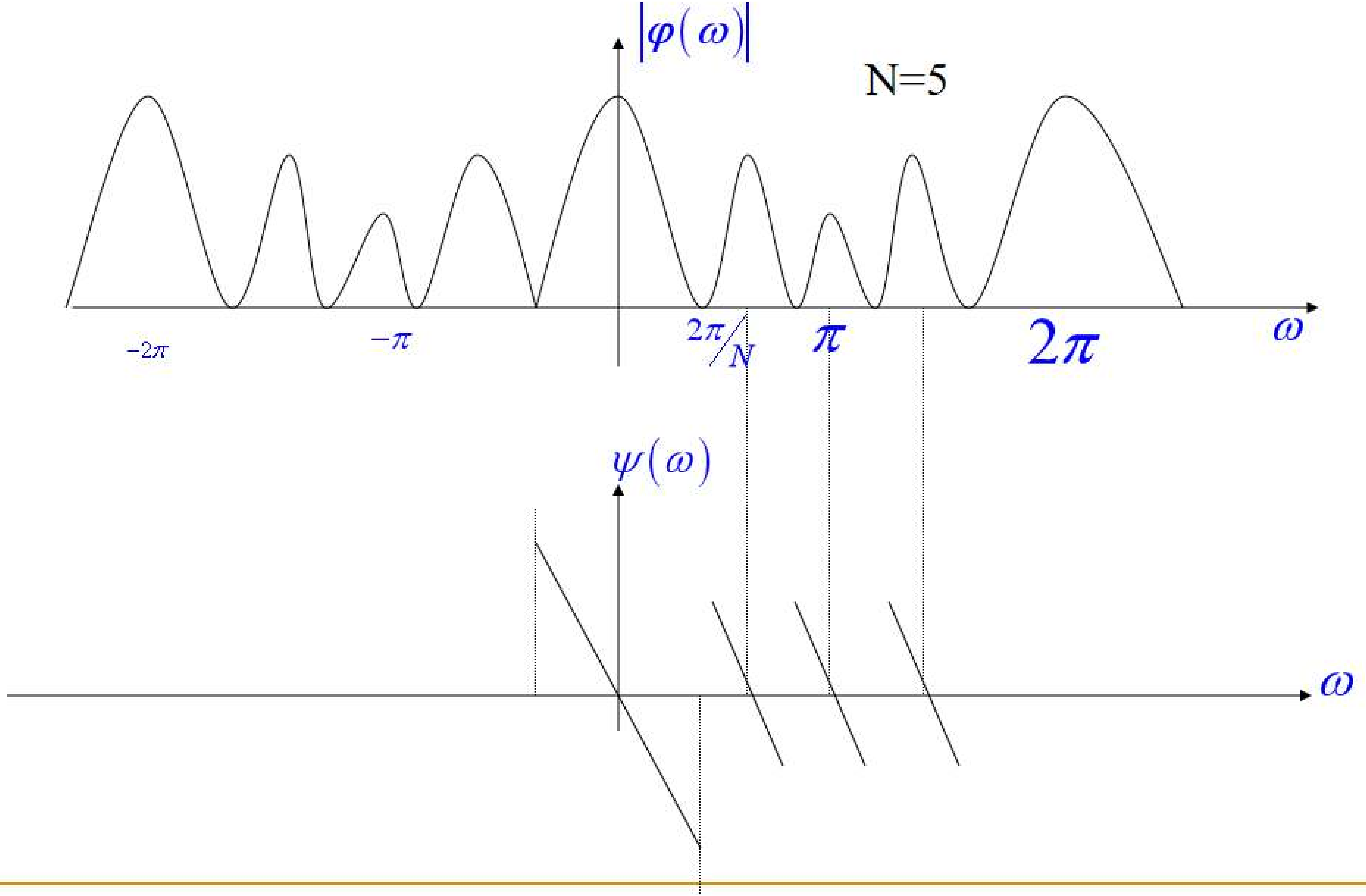
在其他抽样点为0。

当N=5时，$\varphi_0(\omega)$ 的幅度特性 $\left|\varphi_0(\omega)\right|$ 和相位

特性 $\psi=-\dfrac{N-1}{2}\omega$ 如下图：

其中，$$\left|\varphi_0(\omega)\right|=\left|\frac{1}{N}\frac{\sin\frac{N\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right|=\left|\frac{1}{5}\frac{\sin\frac{5\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right|$$

$$\psi=-\frac{N-1}{2}\omega=-2\omega$$


$|\varphi(\omega)|$
N=5
-2π
$-\pi$
$2\pi/N$
π
2π
ω
$\psi(\omega)$
ω

由$\varphi_0(0)=1$,可推断出$\varphi\left(\omega-k\frac{2\pi}{N}\right)$在

$\omega-k\frac{2\pi}{N}=0$时，$\varphi\left(\omega-k\frac{2\pi}{N}\right)=1$;

亦即在$\omega=k\frac{2\pi}{N}$时，$\varphi\left(\omega-k\frac{2\pi}{N}\right)=1$。

而当$\omega=i\frac{2\pi}{N}$,即$i=k$时，

$$\varphi\left(\omega-k\frac{2\pi}{N}\right)=\varphi\left[(i-k)\frac{2\pi}{N}\right]=1$$

由于i与k均为整数,所以$i \neq k$时 $\varphi\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) = 0$

这就是说,内插函数在本抽样点 $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ 上,

$\varphi\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) = 1,$ 而在其他抽样点上

$$\omega = i\frac{2\pi}{N}, i \neq k \text{上}, \varphi\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) = 0。$$

5. $X(e^{j\omega})$ 与X(k)的关系

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\varphi\left(\omega-k\frac{2\pi}{N}\right)$$

由于 $\varphi\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$ 的特性可知,在每个抽 样点

上其值为1, 故 $X(e^{j\omega})$ 就精确等于X(k)。即

$$X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=k\frac{2\pi}{N}}=X(k),k=0,1,\cdots,N-1$$

而在抽样点之间，$X(e^{j\omega})$ 等于加权的内插函数值 $X(k)\varphi\left(\omega-\dfrac{2\pi}{N}k\right)$ $(k=0,1,\cdots,N-1)$ 叠加而得。

§3-8 利用DFT对连续时间信号的逼近

一.用DFT计算连续时间信号的傅氏变换可能造成的误差

1.混叠现象

为避免混叠,由抽样定理可知，须满足 $f_s \geq 2f_h$

其中，f_s 为抽样频率；f_h 为信号的最高频率分量；

或者 $T = \dfrac{1}{f_s} \leq \dfrac{1}{2f_h}$

其中,T为抽样间隔。

[例] 有一频谱分析用的FFT处理器，其抽样点数必须是2的整数幂。假定没有采用任何特殊的数据处理措施，已知条件为（1）频率分辨率为 $\le 10H_Z$，（2）信号的最高频率 $\le 4kH_Z$，试确定以下参量：

（1）最小记录长度 T_P ;(2) 抽样点间的最大时间间隔T;

(3) 在一个记录中的最小点数N。

解：（1）最小记录长度 $T_P = {}^1\!/\!_F = {}^1\!/\!_{10} = 0.1s$

（2）最大的抽样时间间隔T

$$T = 1/f_s = 1/2f_h = 1/2\times4\times10^3 = 0.125\times10^{-3}s$$

(3) 最小记录点数N

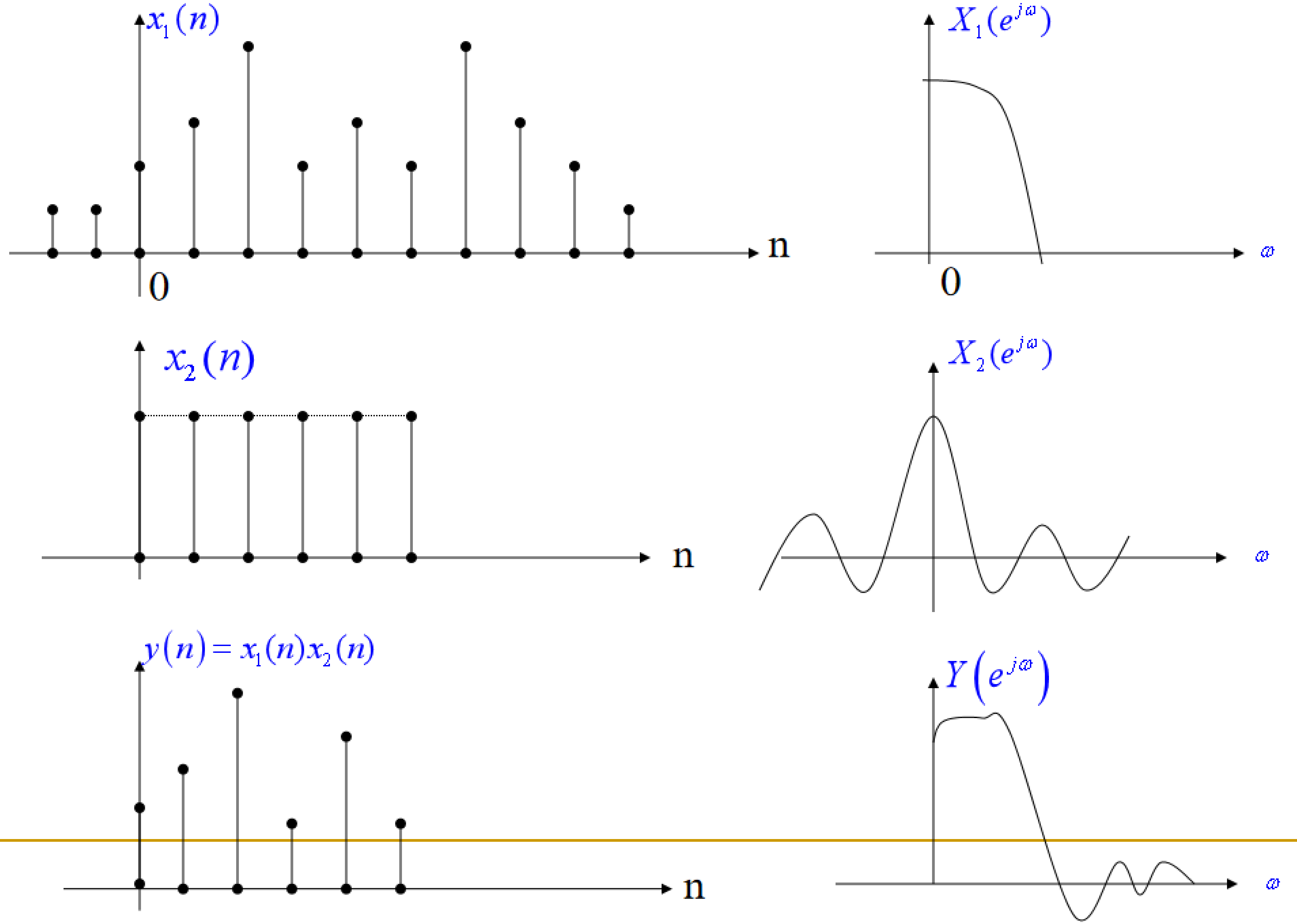
$$N \ge 2f_h / F = 2\times4\times10^3/10 = 800$$

取 $N = 2^{10} = 1024$

$$T \le 0.125ms$$

2.频谱泄漏

在实际应用中，通常将所观测的信号 $x_1(n)$限制在一定的时间间隔内,也 就是说,在时域对信号进行截断操作,或 称作加时间窗,亦即用时间窗函数乘以信号,由卷积定理可知，时域相乘,频域为卷积,这就造成拖尾现象,称之为频谱泄漏.



$x_1(n)$
n
0
$X_1(e^{j\omega})$
ω
0
$x_2(n)$
n
$X_2(e^{j\omega})$
ω
$y(n) = x_1(n)x_2(n)$
n
$Y(e^{j\omega})$
ω

3.栅栏效应

用DFT计算频谱时，只是知道为频率的整数倍处的频谱。在两个谱线之间的情况就不知道,这相当通过一个栅栏观察景象一样，故称作栅栏效应。

补零点加大周期T_p，可使F变小来提高辨力，以减少栅栏效应。

二.DFT与连续时间信号傅氏变换间相对数值的确定

1.连续时间非周期信号傅氏变换对

$$\begin{cases} X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt \\ x(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega \end{cases}$$

2.连续时间周期信号傅氏级数变换对

$$\begin{cases} X(jk\Omega_0)=\dfrac{1}{T}\int_{-T_p/2}^{T_p/2}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt \\ x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t} \end{cases}$$

3.DFT变换时:

$$\begin{cases} X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}, 0\le k\le N-1 \\ x(n)=\dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}, 0\le n\le N-1 \end{cases}$$

4.用DFT计算非周期信号的傅氏变换

用DFT计算所得的频谱分量乘以T， 就等于频谱的正常幅度电平；用IDFT计算非周期信号的傅氏反变换，再乘以 f_s 就得到所需信号的正常幅度电平。所以,从时间到频率,再从频率到时间，整个过程总共乘了

$$T \cdot f_s = 1$$

幅度电平未受到影响。

用DFT计算所得的频谱分量乘以T的理由：

设 $t = nT, dt = T, \int_{-\infty}^{\infty} \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty}$

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\Omega nT}$$

$$= T \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j\Omega nT}$$

又$\Omega_0 = 2\pi f_s / N, \Omega = k\Omega_0, k = 0,1,\ldots N-1$

$$\therefore X(k\Omega_0) = T \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jkn2\pi T \cdot f_s / N}, k = 0,1,\ldots N-1$$

$$= T \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}$$

$$= T \cdot DFT[x(n)]$$

用IDFT计算非周期信号的傅氏反变换乘以 f_s 的理由

$$2\pi F=\Omega_0,\ f_s=NF=N\frac{\Omega_0}{2\pi},\ d\Omega=\Omega_0,\ \Omega=k\Omega_0$$

$$\therefore\ x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

$$x(nT)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 nT}\cdot\Omega_0$$

$$=\frac{\Omega_0}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1}X(j\Omega_0 k)e^{j\frac{2\pi f_s T}{N}kn}$$

$$=f_s\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(j\Omega_0 k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$=f_s DFT^{-1}[X(k)]$$

5.用DFT计算周期信号的傅氏级数

用DFT计算出的频谱分量乘以 1/N等于周期信号的频谱的正常幅度电平。而用IDFT的计算结果乘以N才等于周期信号。

放映结束