

第七讲 FIR数字滤波器的设计方法

IIR数字滤波器:

可以利用模拟滤波器设计
但相位非线性

FIR数字滤波器:

可以严格线性相位，又可任意幅度特性
因果稳定系统
可用FFT计算
但阶次比IIR滤波器要高得多

学习目标

- 掌握线性相位FIR数字滤波器的特点
- 掌握窗函数设计法
- 理解频率抽样设计法
- 了解设计FIR滤波器的最优化方法
- 理解IIR与FIR数字滤波器的比较

一、线性相位FIR滤波器的特点

FIR滤波器的单位冲激响应:

$$h(n) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

系统函数:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

在 z 平面有 $N-1$ 个零点

在 $z=0$ 处是 $N-1$ 阶极点

1、线性相位条件

$h(n)$ 为实序列时，其频率响应：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H(\omega)e^{j\theta(\omega)} = \pm |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$$

线性相位是指 $\theta(\omega)$ 是 ω 的线性函数

$$\text{即群延时 } -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = \tau \text{ 是常数}$$

第一类线性相位： $\theta(\omega) = -\tau\omega$

第二类线性相位： $\theta(\omega) = \beta_0 - \tau\omega$

设一离散时间系统的幅频特性为1，相频特性具有如下线性相位： $\theta(\omega) = -\tau\omega$

当信号 $x(n)$ 通过该系统后，输出 $y(n)$ 的频率特性

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = e^{-j\tau\omega}X(e^{j\omega}) \\ &= |X(e^{j\omega})|e^{j\arg[X(e^{j\omega})]-j\tau\omega} \end{aligned}$$

所以 $y(n) = x(n - \tau)$

输出 $y(n)$ 等于输入时间上的位移。

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = \pm |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$$

第一类线性相位: $\theta(\omega) = -\tau\omega$ $= \pm |H(e^{j\omega})| e^{-j\omega\tau}$

$$\pm |H(e^{j\omega})| \cos(\omega\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(\omega n)$$

$$\pm |H(e^{j\omega})| \sin(\omega\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega n)$$

$$\text{tg}(\omega\tau) = \frac{\sin(\omega\tau)}{\cos(\omega\tau)} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(\omega n)}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega\tau) \cos(\omega n) - \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(\omega\tau) \sin(\omega n) = 0$$

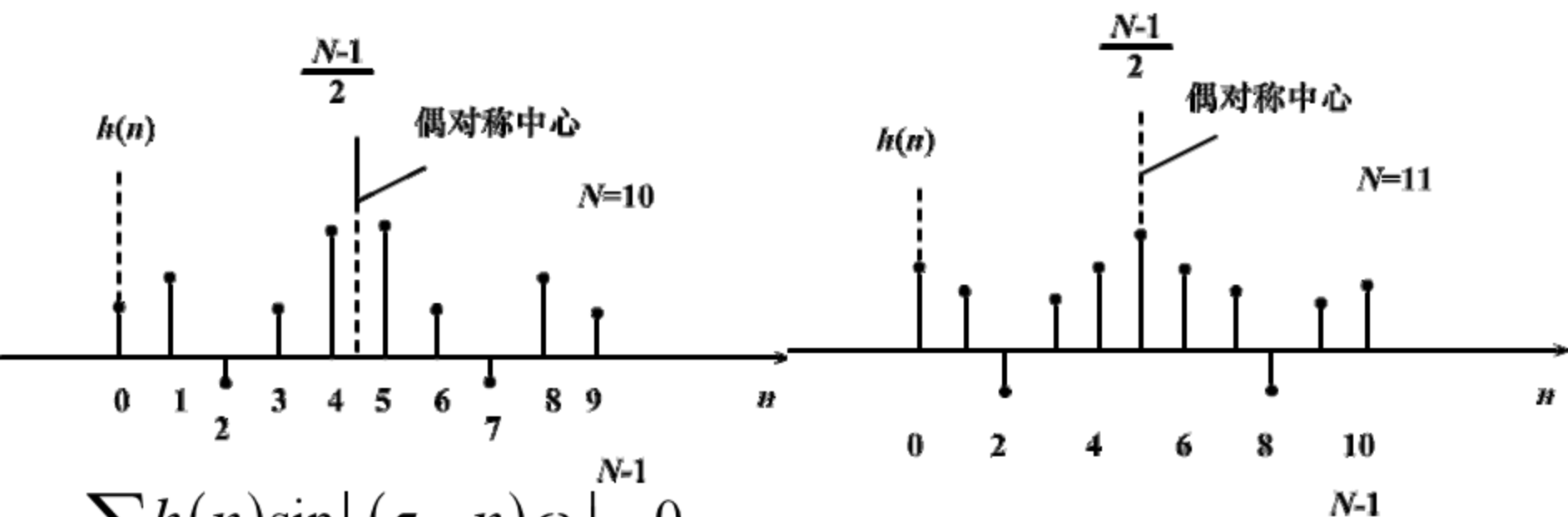
$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[(\tau - n)\omega] = 0$$

- 第一类线性相位 $\theta(\omega) = -\tau\omega$ 的充要条件:

$$h(n) = h(N-1-n) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$(N-1)/2$ 为 $h(n)$ 的偶对称中心

$$\tau = \frac{N-1}{2}$$



$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[(\tau - n)\omega] = 0$$

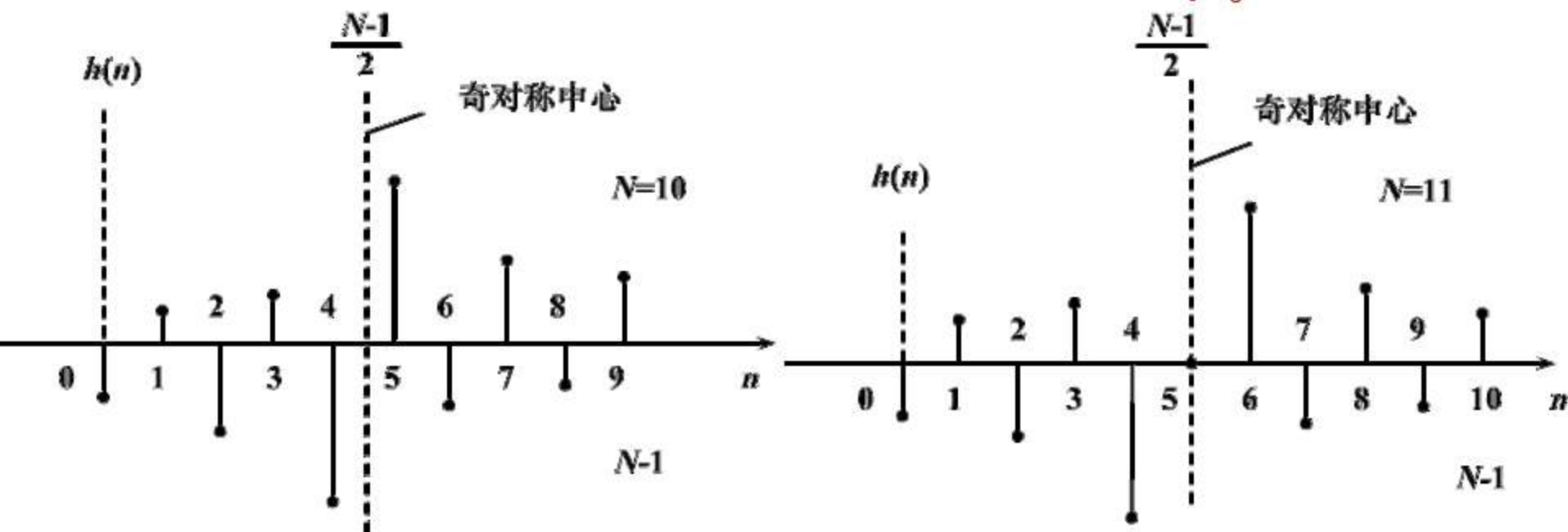
- 第二类线性相位 $\theta(\omega) = \beta_0 - \tau\omega$ 的充要条件:

$$h(n) = -h(N-1-n) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$(N-1)/2$ 为 $h(n)$ 的奇对称中心

$$\tau = \frac{N-1}{2}$$

$$\beta_0 = \pm\pi/2$$



2、线性相位FIR滤波器频率响应的特点

由 $h(n) = \pm h(N-1-n) \quad 0 \leq n \leq N-1$

系统函数:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \pm h(N-1-n)z^{-n} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \pm h(m)z^{-(N-1-m)} \quad \text{令 } m = N-1-n \\ &= \pm z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^m = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \end{aligned}$$

$$\text{由 } H(z) = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

$$\text{得 } H(z) = \frac{1}{2} \left[H(z) \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \pm z^{-(N-1)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^n \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[z^{-n} \pm z^{-(N-1)} z^n \right]$$

$$= z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[\frac{z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} \pm z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2} \right]$$

$$H(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[\frac{z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} \pm z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2} \right]$$

$$\frac{z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} \pm z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2} \Big|_{z=e^{j\omega}} = \begin{cases} \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] & "+" \\ j \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] & "-" \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \begin{cases} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] & "+" \\ j e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] & "-" \end{cases}$$

1) $h(n)$ 偶对称

$$h(n) = h(N-1-n)$$

■ 频率响应:

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

相位函数: $\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$

为第一类线性相位

$$\tau = \frac{N-1}{2}$$

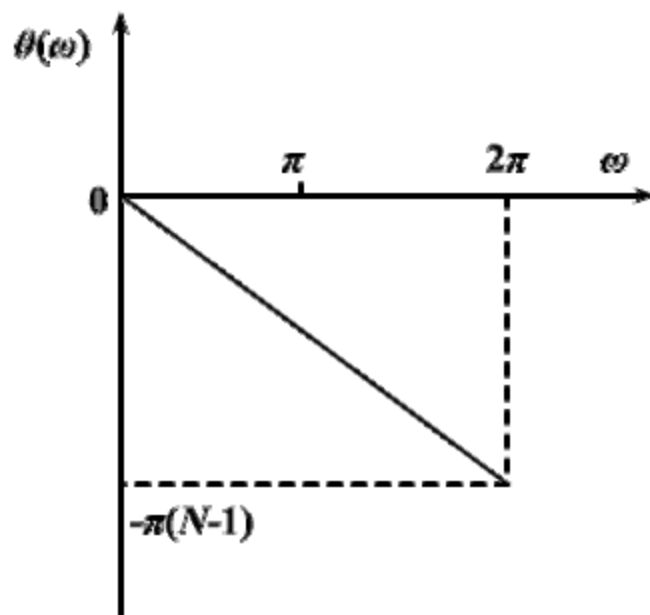


图7-3 $h(n)$ 偶对称时的
线性相位特性

2) $h(n)$ 奇对称

$$h(n) = -h(N-1-n)$$

■ 频率响应:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = je^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] \\ &= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega + j\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] \end{aligned}$$

相位函数:

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2}$$

为第二类线性相位

$$\tau = \frac{N-1}{2} \quad \beta_0 = \pi/2$$

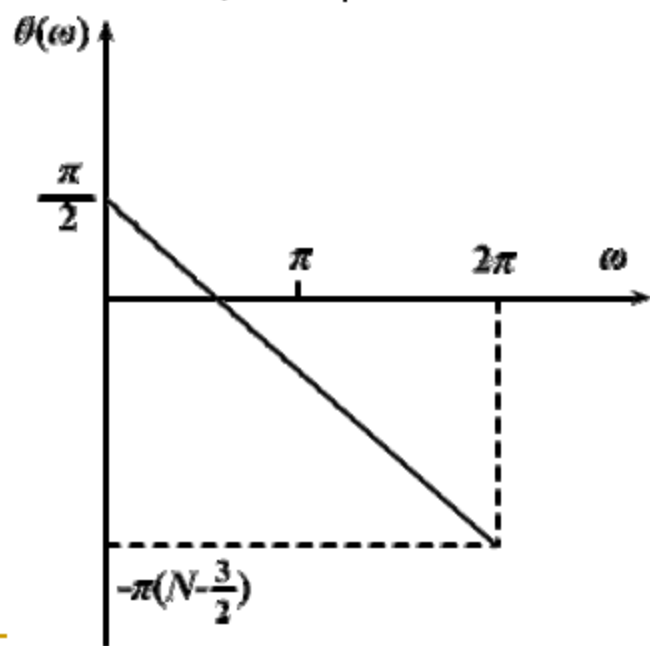
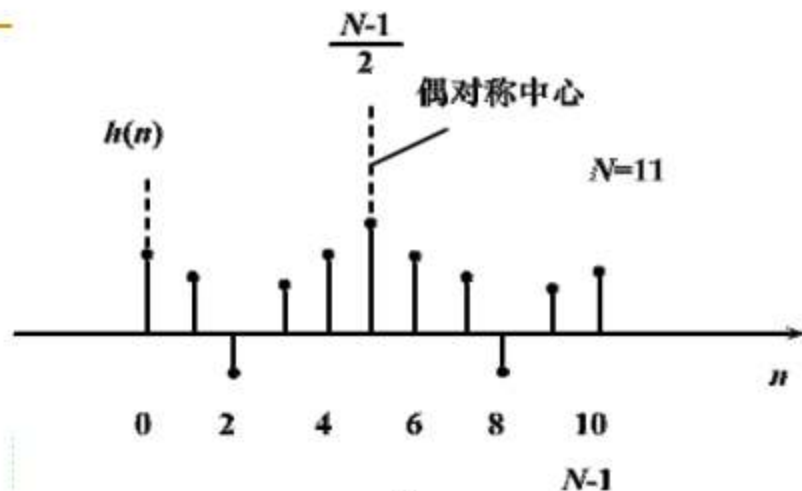


图7-4 $h(n)$ 奇对称时的90°相移
线性相位特性

3、幅度函数的特点

1) $h(n)$ 偶对称, N 为奇数



幅度函数:

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$\begin{aligned} \because \cos \left\{ \left[\frac{N-1}{2} - (N-1-n) \right] \omega \right\} &= \cos \left[\left(n - \frac{N-1}{2} \right) \omega \right] \\ &= \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] \end{aligned}$$

$\therefore \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$ 对 $\frac{N-1}{2}$ 呈偶对称

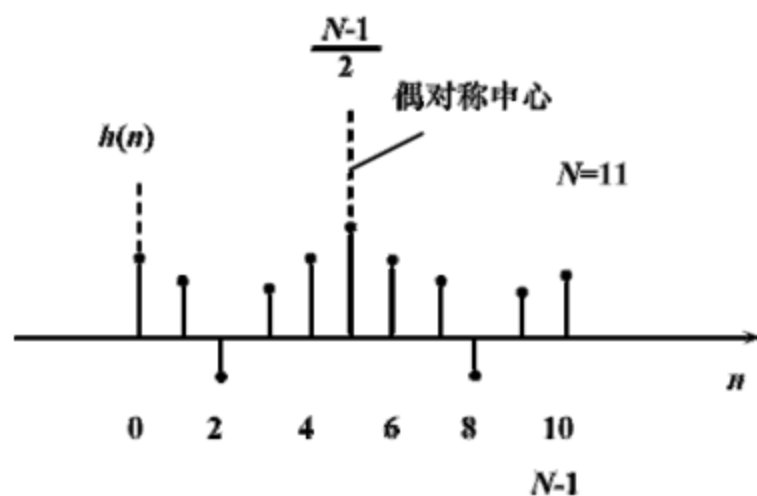
$$H(\omega) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n) \cos\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right]$$

$$\text{令 } \frac{N-1}{2} - n = m$$

$$= h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h\left(\frac{N-1}{2} - m\right) \cos(m\omega)$$

$$\therefore H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \cos(\omega n)$$

其中： $a(0) = h\left(\frac{N-1}{2}\right)$

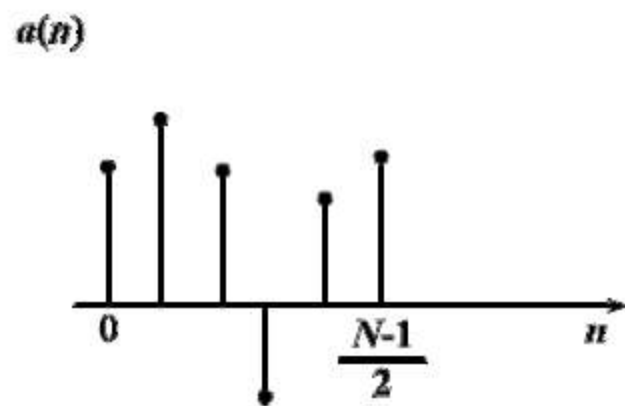
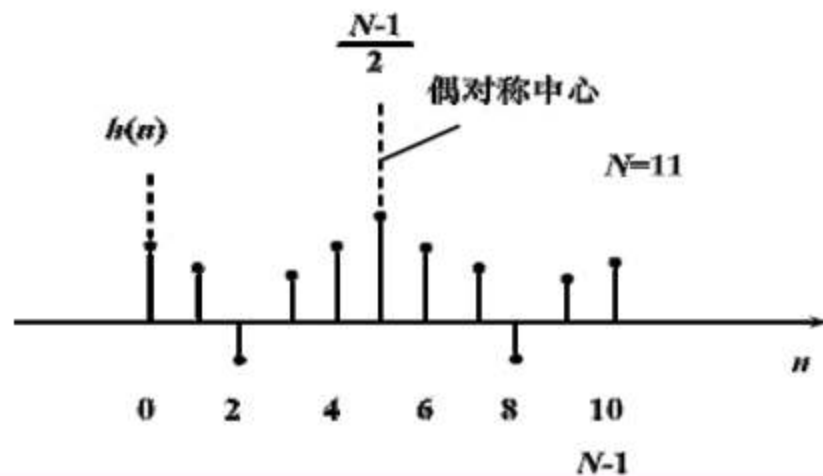


$$a(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) \quad n = 1, \dots, \frac{N-1}{2}$$

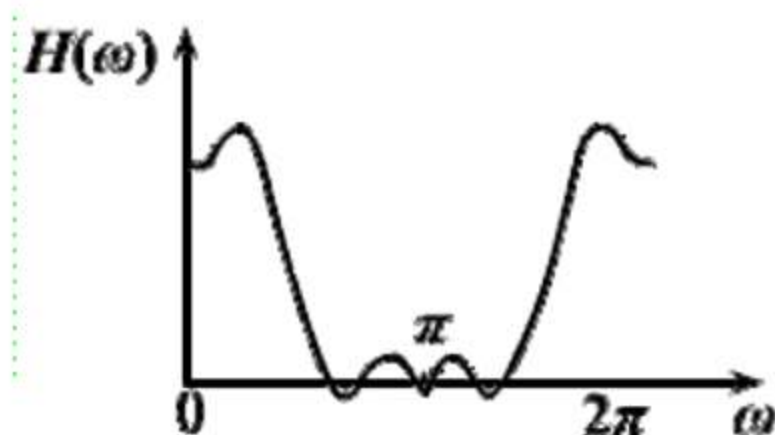
$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \cos(\omega n)$$

其中： $a(0) = h\left(\frac{N-1}{2}\right)$

$$a(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) \quad n = 1, \dots, \frac{N-1}{2}$$



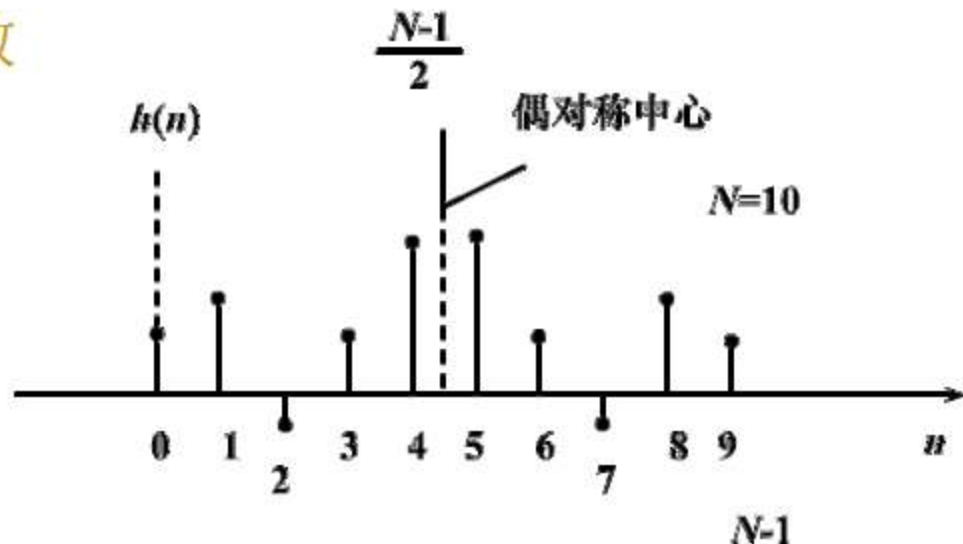
$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \cos(\omega n)$$



$\because \cos(\omega n)$ 对 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 呈偶对称

$\therefore H(\omega)$ 对 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 呈偶对称

2) $h(n)$ 偶对称, N 为偶数



幅度函数:

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} 2h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} 2h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

令 $\frac{N}{2} - n = m$

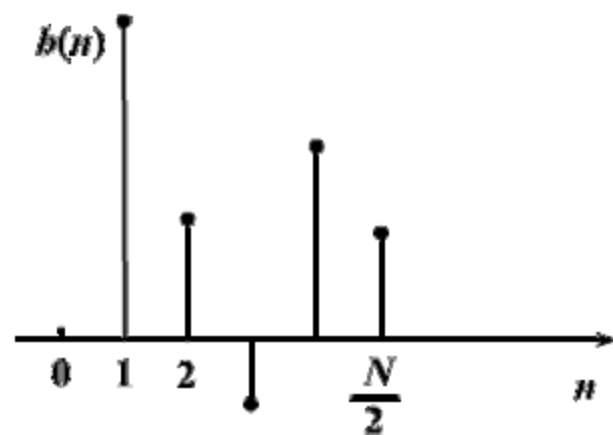
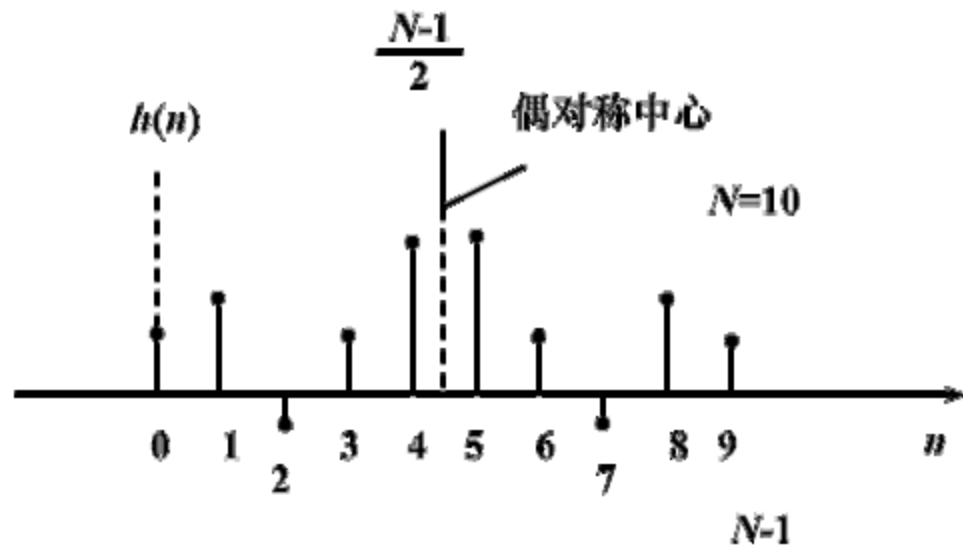
$$= \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} 2h \left(\frac{N}{2} - m \right) \cos \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \omega \right]$$

$$\therefore H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]$$

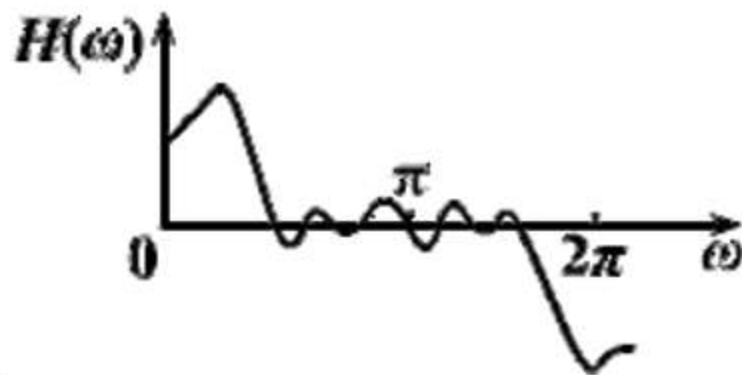
其中： $b(n) = 2h \left(\frac{N}{2} - n \right) \quad n = 1, \dots, \frac{N}{2}$

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]$$

其中： $b(n) = 2h \left(\frac{N}{2} - n \right) \quad n = 1, \dots, \frac{N}{2}$



$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]$$



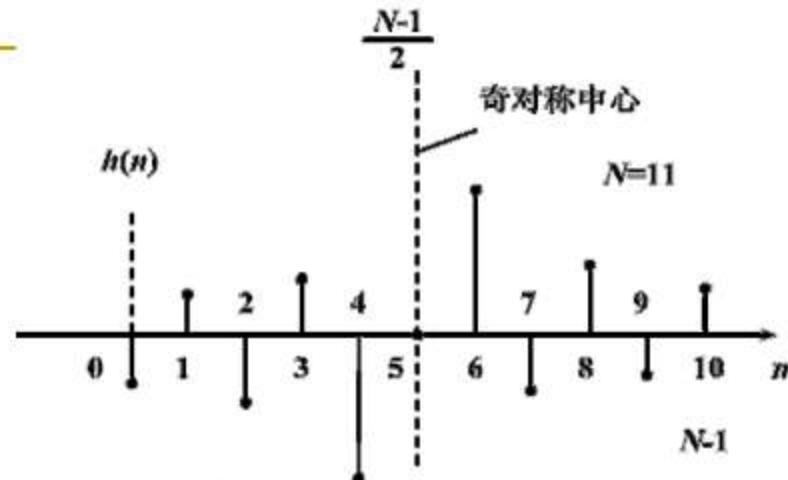
■ $\omega = \pi$ 时 $\cos \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] = 0$

则 $H(\pi) = 0 \quad \therefore z = -1$ 是零点

■ $H(\omega)$ 对 $\omega = 0, 2\pi$ 呈偶对称 $H(\omega)$ 对 $\omega = \pi$ 呈奇对称

■ $z = -1$ 为零点 故不能设计成高通、带阻滤波器

3) $b(n)$ 奇对称, N 为奇数



幅度函数:

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

$$\because \sin \left\{ \left[\frac{N-1}{2} - (N-1-n) \right] \omega \right\} = \sin \left[\left(n - \frac{N-1}{2} \right) \omega \right]$$

$$= -\sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

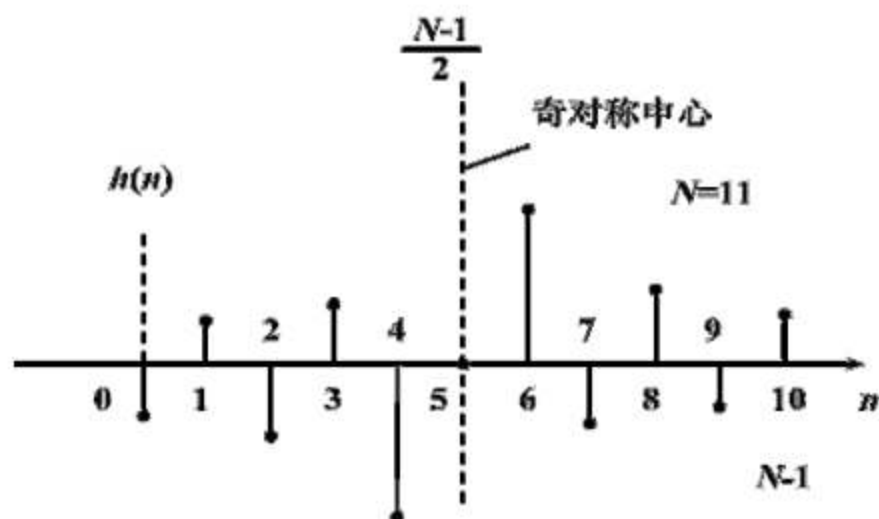
$$\therefore \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] \text{ 对 } \frac{N-1}{2} \text{ 呈奇对称}$$

$h(n)$ 奇对称且 N 为奇数 $\therefore h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n) \sin\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right]$$

令 $\frac{N-1}{2} - n = m$

$$= \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h\left(\frac{N-1}{2} - m\right) \sin(m\omega)$$

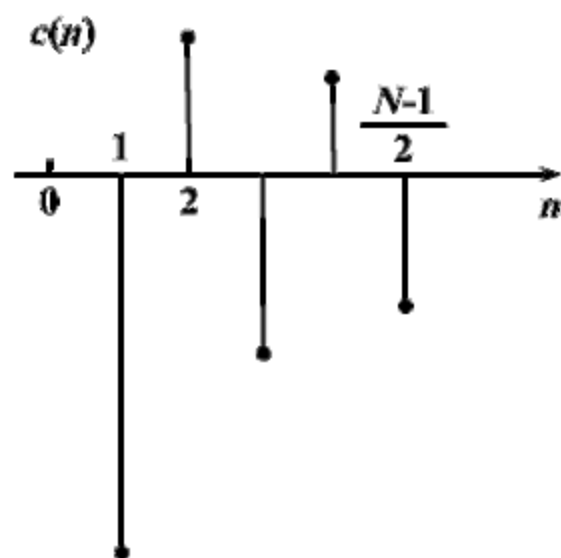
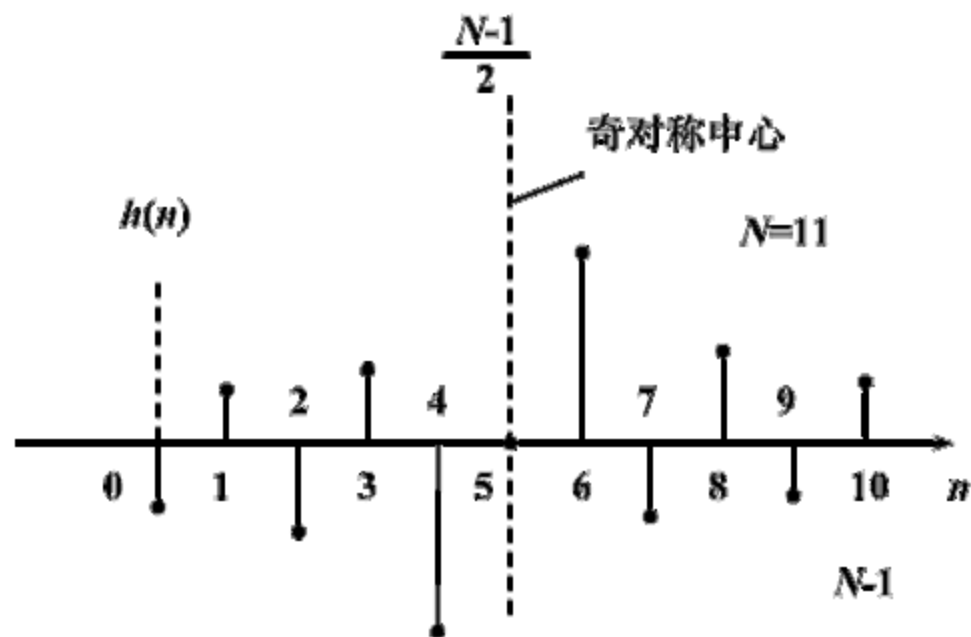


$$\therefore H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin(\omega n)$$

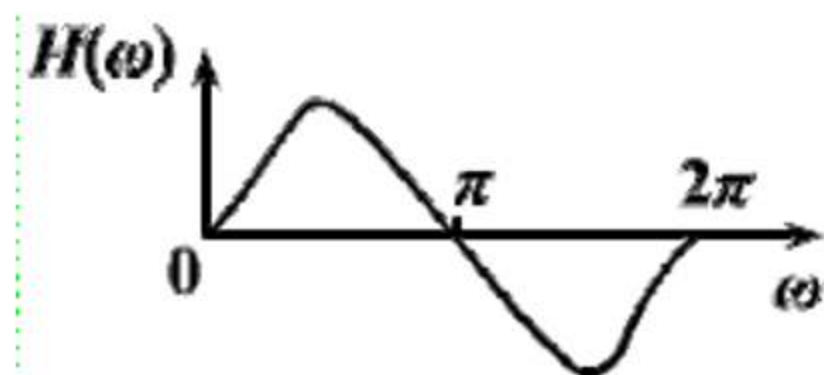
其中: $c(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) \quad n = 1, \dots, \frac{N-1}{2}$

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin(\omega n)$$

其中： $c(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right)$ $n = 1, \dots, \frac{N-1}{2}$



$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin(\omega n)$$

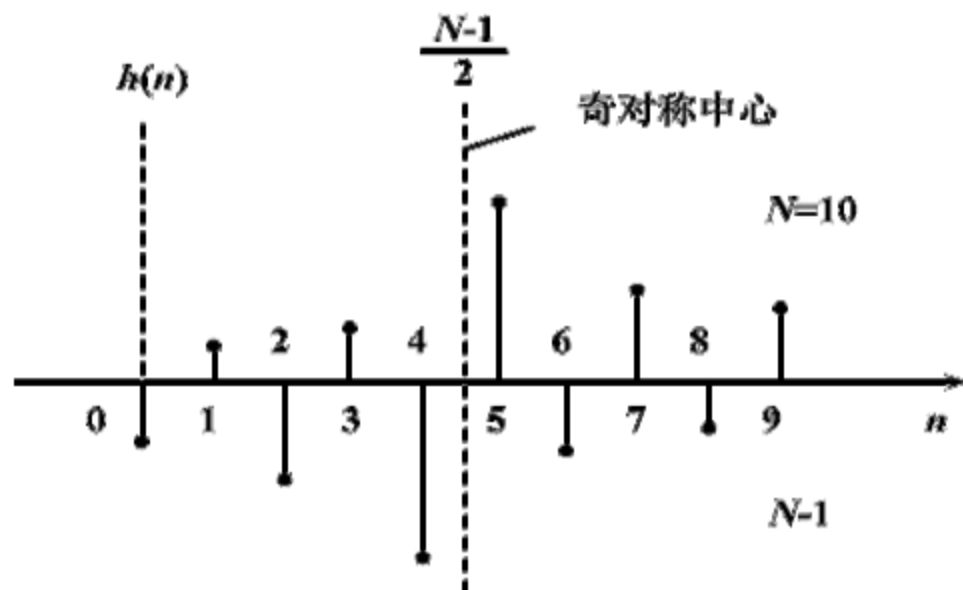


- $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 时 $\sin(\omega n) = 0$

则 $H(\omega) = 0 \quad \therefore z = \pm 1$ 是零点

- 因 $\sin(\omega n)$ 对 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 呈奇对称
故 $H(\omega)$ 对 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 呈奇对称

4) $b(n)$ 奇对称, N 为偶数



幅度函数:

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} 2h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]
 \end{aligned}$$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

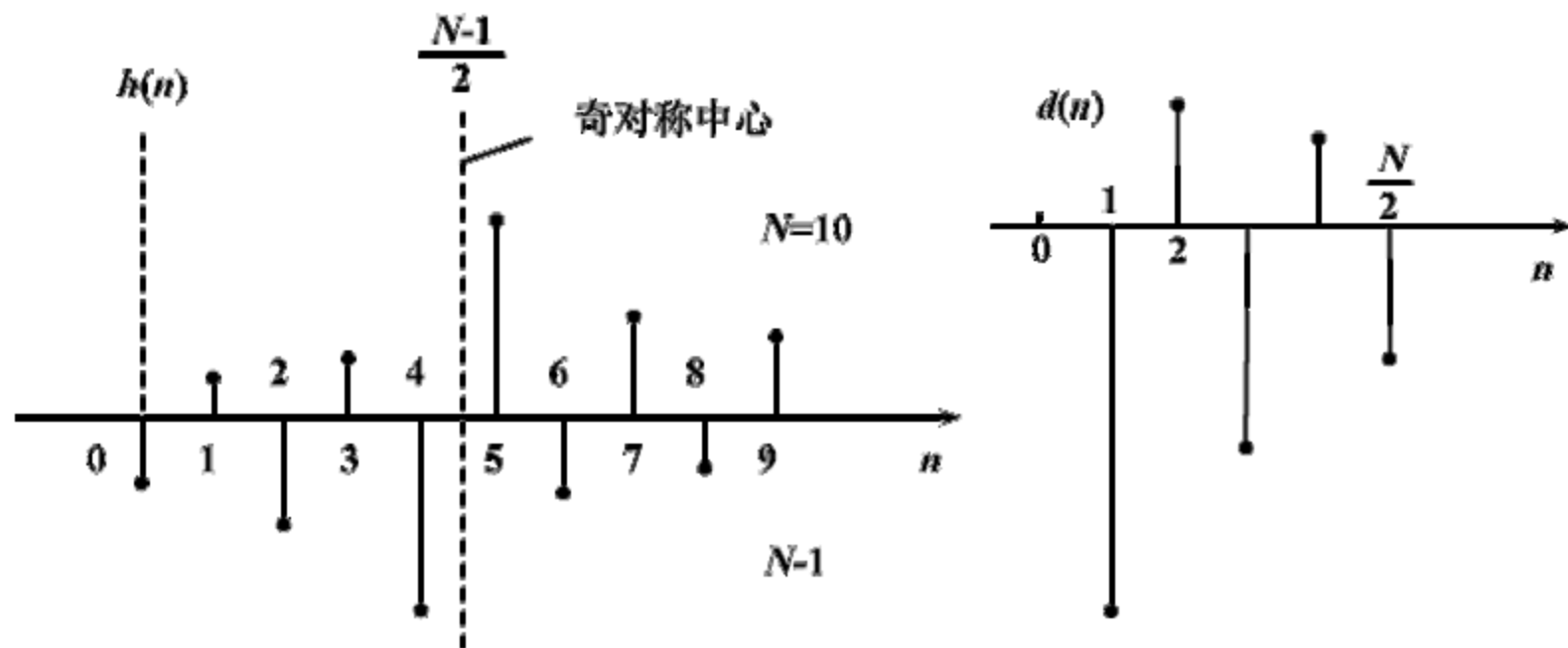
$$\begin{aligned} \text{令 } \frac{N}{2} - n = m \\ = \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} 2h \left(\frac{N}{2} - m \right) \sin \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \omega \right] \end{aligned}$$

$$\therefore H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]$$

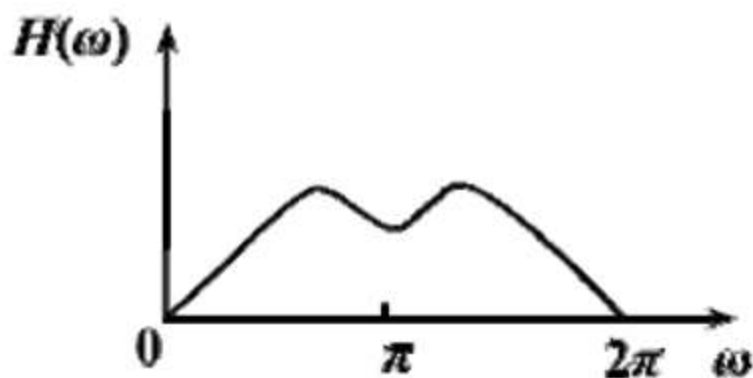
$$\text{其中: } d(n) = 2h \left(\frac{N}{2} - n \right) \quad n = 1, \dots, \frac{N}{2}$$

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]$$

其中： $d(n) = 2h \left(\frac{N}{2} - n \right) \quad n = 1, \dots, \frac{N}{2}$



$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]$$



■ $\omega = 0, 2\pi$ 时 $\sin \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] = 0$

则 $H(\omega) = 0 \quad \therefore z = 1$ 是零点

- $H(\omega)$ 对 $\omega = 0, 2\pi$ 呈奇对称 $H(\omega)$ 对 $\omega = \pi$ 呈偶对称
- $h(n)$ 为奇对称时, 有 90° 相移, 适用于微分器和 90° 移相器, 而选频滤波器采用 $h(n)$ 为偶对称时

4、零点位置

由 $H(z) = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$ 得:

1) 若 $z = z_i$ 是 $H(z)$ 的零点, 则 $z = z_i^{-1}$ 也是零点

$$\because H(z_i) = 0$$

$$\therefore H(z_i^{-1}) = \pm z_i^{(N-1)} H(z_i) = 0$$

2) $h(n)$ 为实数, 则零点共轭成对

即 z_i^* , $1/z_i^*$ 也是零点

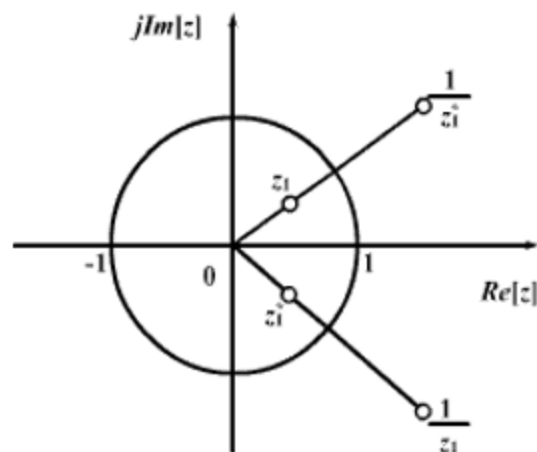
线性相位滤波器的零点是互为倒数的共轭对
即共轭成对且镜像成对

$$1) \quad z_i = r_i e^{j\theta_i} \quad r_i \neq 1 \quad \theta_i \neq 0 \text{ 或 } \pi$$

$$\text{零点: } r_i e^{j\theta_i} \quad r_i e^{-j\theta_i} \quad \frac{1}{r_i} e^{j\theta_i} \quad \frac{1}{r_i} e^{-j\theta_i}$$

$$H_i(z) = (1 - r_i e^{j\theta_i} z^{-1})(1 - r_i e^{-j\theta_i} z^{-1})$$

$$\cdot \left(1 - \frac{1}{r_i} e^{j\theta_i} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1}{r_i} e^{-j\theta_i} z^{-1}\right)$$



$$= \frac{1}{r_i^2} \left[1 - 2r_i \cos \theta_i z^{-1} + r_i^2 z^{-2}\right] \cdot \left[r_i^2 - 2r_i \cos \theta_i z^{-1} + z^{-2}\right]$$

$$N = 5 \quad \tau = \frac{N-1}{2} = 2$$

$$H(z_i) = \frac{1}{r_i^2} \left[1 - 2r_i \cos \theta_i z^{-1} + r_i^2 z^{-2} \right] \cdot \left[r_i^2 - 2r_i \cos \theta_i z^{-1} + z^{-2} \right]$$

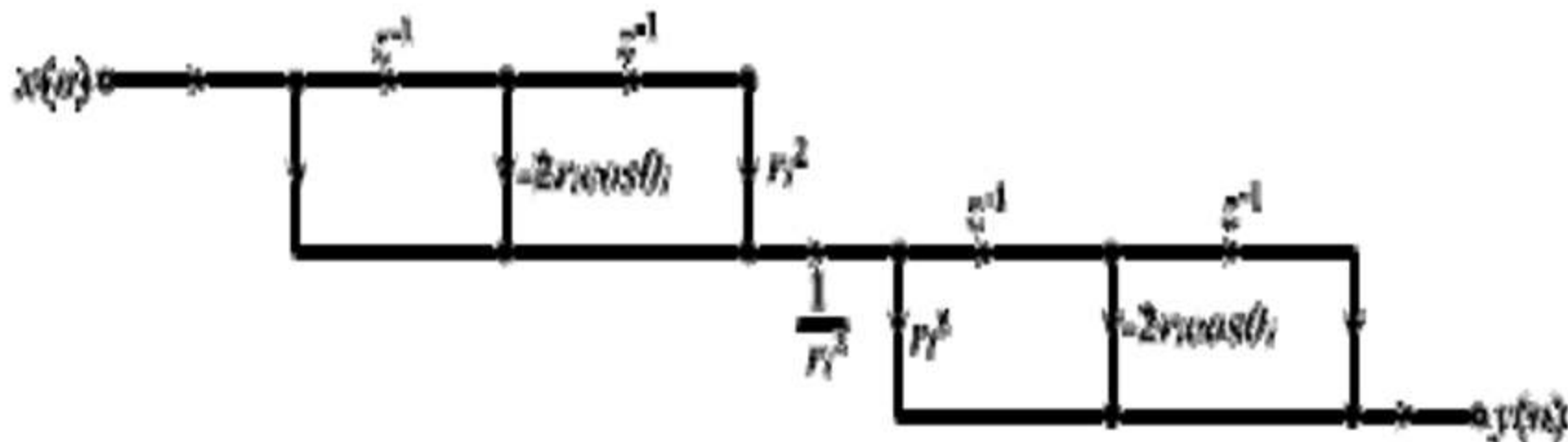
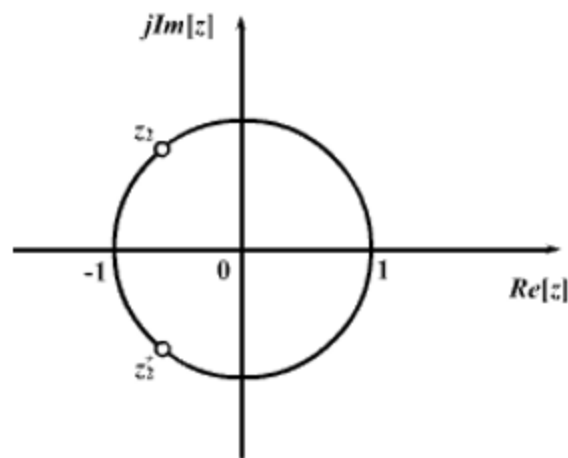


图7-6 线性相位FIR滤波器的级联结构

2) $z_i = r_i e^{j\theta_i}$ $r_i = 1$ $\theta_i \neq 0$ 或 π , 即零点在单位圆上

零点: $e^{j\theta_i}$ $e^{-j\theta_i}$



$$H_i(z) = (1 - e^{j\theta_i} z^{-1})(1 - e^{-j\theta_i} z^{-1})$$
$$= 1 - 2r \cos \theta_i z^{-1} + z^{-2}$$

$$N = 3 \quad \tau = \frac{N-1}{2} = 1$$

3) $z_i = r_i e^{j\theta_i}$ $r_i \neq 1$ $\theta_i = 0$ 或 π , 即零点在实轴上

零点: r_i $\frac{1}{r_i}$

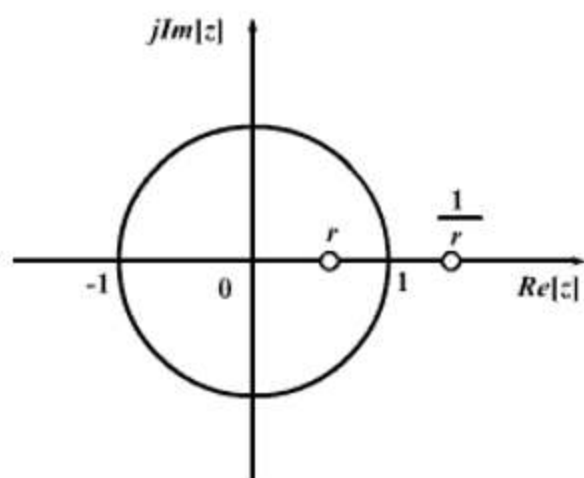
$$H_i(z) = \left(1 \pm r_i z^{-1}\right) \left(1 \pm \frac{1}{r_i} z^{-1}\right)$$

$$= 1 \pm \left(r_i + \frac{1}{r_i}\right) z^{-1} + z^{-2}$$

"+" $\theta_i = \pi$ 负实轴上

"-" $\theta_i = 0$ 正实轴上

$$N = 3 \quad \tau = \frac{N-1}{2} = 1$$



$$4) \quad z_i = r_i e^{j\theta_i} \quad r_i = 1 \quad \theta_i = 0 \text{ 或 } \pi$$

即零点既在实轴上，又在单位圆上

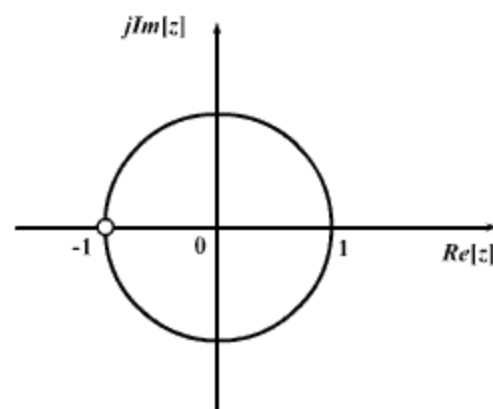
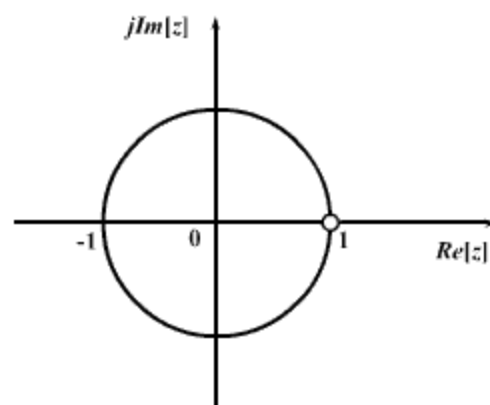
零点：+1或-1

$$H_i(z) = (1 \pm z^{-1})$$

$$\text{"+"} \quad \theta_i = \pi \quad z = -1$$

$$\text{"-"} \quad \theta_i = 0 \quad z = 1$$

$$N = 2 \quad \tau = \frac{N-1}{2} = \frac{1}{2}$$



二、窗函数设计法

1、设计方法

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \rightarrow H_d(e^{j\omega})$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$h(n) = w(n)h_d(n)$$

$w(n)$: 窗函数序列

要选择合适的形状和长度

以低通滤波器为例讨论：

线性相位理想低通滤波器的频率响应：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_c, \omega_c \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

其理想单位抽样响应：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\omega_c(n-\alpha)}$$

中心点为 α 的偶对称无限长非因果序列

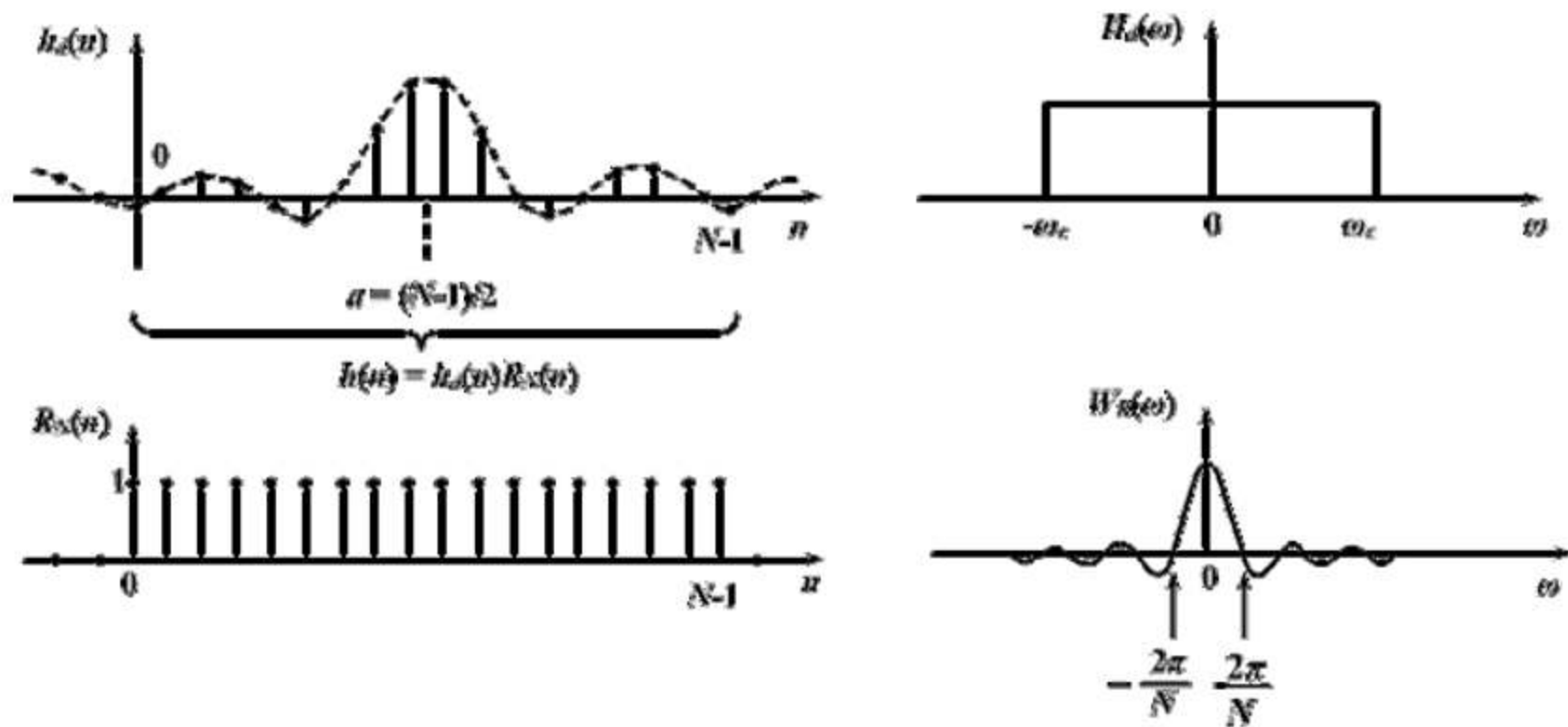


图7-7 理想矩形幅频特性的 $h_d(n)$ 和 $H_d(\omega)$ 以及矩形窗函数序列的 $w(n) = R_N(n)W_N(\omega)$

$$h_d(n) = \frac{\omega_c \sin[\omega_c(n - \alpha)]}{\pi \omega_c(n - \alpha)}$$

取矩形窗： $w(n) = R_N(n)$

则FIR滤波器的单位抽样响应：

$$h(n) = h_d(n)w(n) = \begin{cases} h_d(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其它 } n \end{cases}$$

按第一类线性相位条件，得 $\alpha = \frac{N-1}{2}$

$$\therefore h(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c \sin\left[\omega_c\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]}{\pi \omega_c\left(n - \frac{N-1}{2}\right)} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其它 } n \end{cases}$$

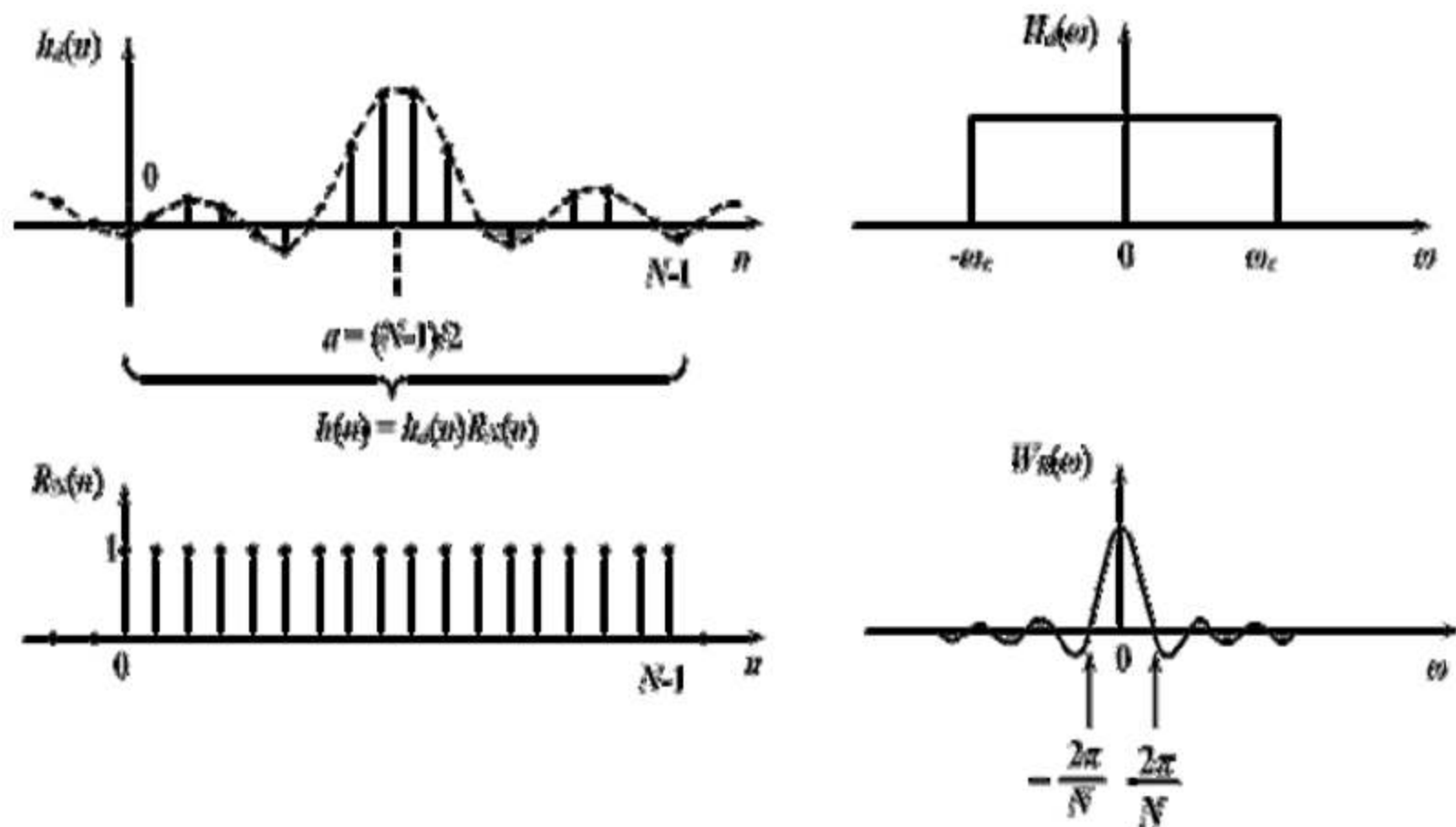


图7-7 理想矩形幅频特性的 $h_d(n)$ 和 $H_d(\omega)$ 以及矩形窗函数序列的 $w(n)=R_N(n)W_N(\omega)$

加窗处理后对频率响应的影响：

时域乘积相当于频域卷积

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

而矩形窗的频率响应：

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)e^{-j\omega n} = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

其幅度函数：

$$W_R(\omega) = \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

理想滤波器的频率响应:

$$H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega) e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

$$\text{其幅度函数: } H_d(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

则FIR滤波器的频率响应:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) e^{-j\frac{N-1}{2}\theta} W_R(\omega - \theta) e^{-j\frac{N-1}{2}(\omega - \theta)} d\theta \\ &= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega - \theta) d\theta \end{aligned}$$

$$\text{其幅度函数: } H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega - \theta) d\theta$$

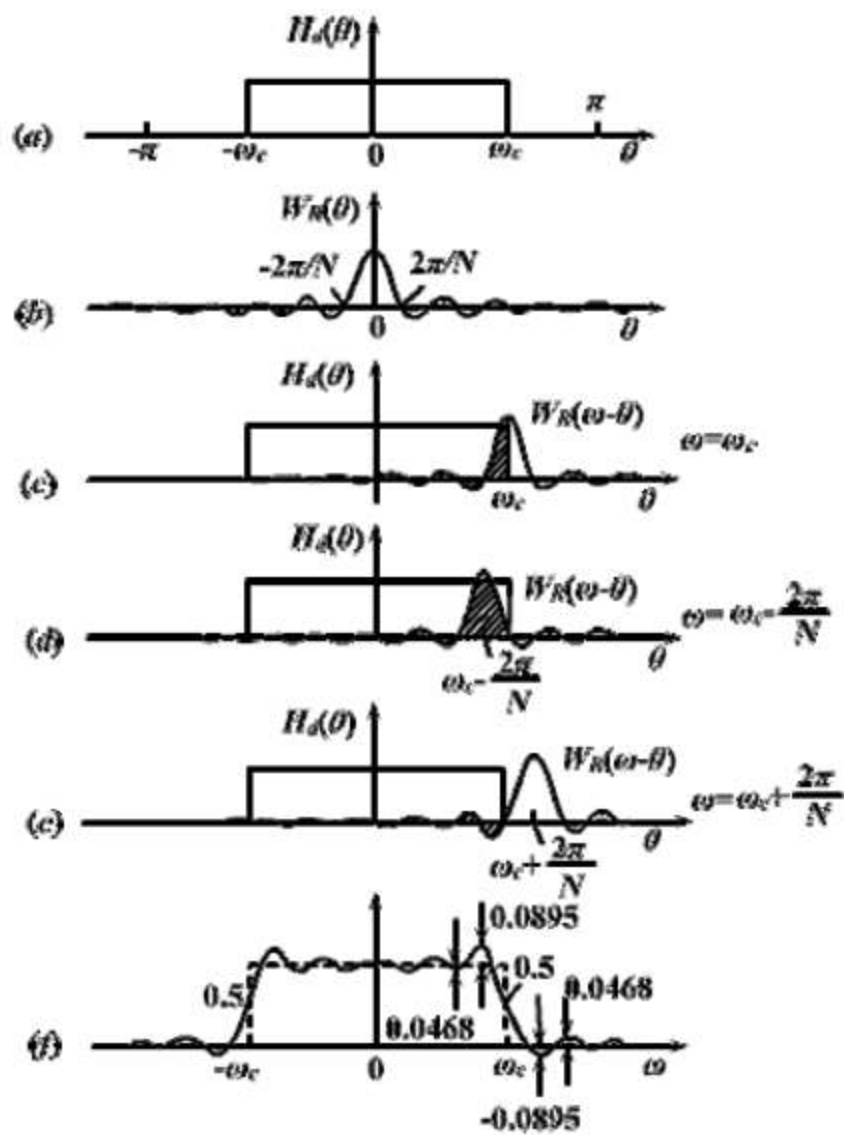


图7-8 矩形窗的卷积过程

幅度函数:
$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega - \theta) d\theta$$

- $\omega = 0$ $H(0)$ 近似于 $W_R(\theta)$ 的全部积分面积
- $\omega = \omega_c$ $H(\omega_c) = 0.5H(0)$
- $\omega = \omega_c - \frac{2\pi}{N}$ $H\left(\omega_c - \frac{2\pi}{N}\right)$ 为最大值, 正肩峰
- $\omega = \omega_c + \frac{2\pi}{N}$ $H\left(\omega_c + \frac{2\pi}{N}\right)$ 为最小值, 负肩峰
- $\omega > \omega_c + \frac{2\pi}{N}$ 随 $\omega \uparrow$, $H(\omega)$ 绕零值波动
- $\omega < \omega_c - \frac{2\pi}{N}$ 随 $\omega \downarrow$, $H(\omega)$ 绕 $H(0)$ 波动

加窗函数的影响：

- 不连续点处边沿加宽形成过渡带，其宽度（两肩峰之间的宽度）等于窗函数频率响应的主瓣宽度。
- 在 $\omega = \omega_c \pm \frac{2\pi}{N}$ 处出现肩峰值，两侧形成起伏振荡，振荡的幅度和多少取决于旁瓣的幅度和多少
- 改变 N 只能改变窗谱的主瓣宽度，但不能改变主瓣与旁瓣的相对比例。其相对比例由窗函数形状决定，称为 **Gibbs** 效应

$$\text{幅度函数: } W_R(\omega) = \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \approx N \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{N \frac{\omega}{2}} = N \frac{\sin x}{x}$$

2、各种窗函数

- 窗函数的要求：
 - 窗谱主瓣尽可能窄以获得较陡的过渡带
 - 尽量减少窗谱最大旁瓣的相对幅度以减小肩峰和波纹

■ 矩形窗

$$w(n) = R_N(n)$$

窗谱:

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)e^{-j\omega n} = W_R(\omega) e^{-j\omega \frac{N-1}{2}}$$

幅度函数:

$$W_R(\omega) = \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

主瓣宽度最窄: $\frac{4\pi}{N}$

旁瓣幅度大

■ 三角形 (Bartlett) 窗

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

窗谱: $W(e^{j\omega}) = W(\omega) e^{-j\omega \frac{N-1}{2}}$

幅度函数:

$$W(\omega) = \frac{2}{N} \left[\frac{\sin \frac{\omega N}{4}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right]^2 \quad N \gg 1$$

主瓣宽度宽: $\frac{8\pi}{N}$ 旁瓣幅度较小

■ 汉宁 (Hanning) 窗
(升余弦窗)

$$w(n) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{2\pi n}{N-1} \right] R_N(n)$$

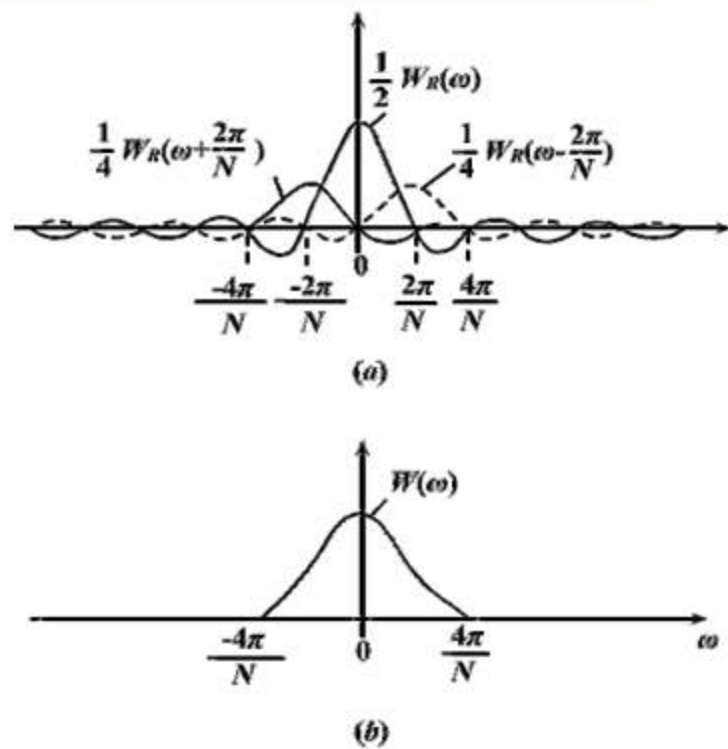


图7-9 汉宁(Hanning)窗谱

幅度函数: ($N \gg 1$)

$$W(\omega) = 0.5W_R(\omega) + 0.25 \left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right) \right]$$

主瓣宽度宽: $\frac{8\pi}{N}$

旁瓣幅度小

- 海明 (Hamming) 窗
(改进的升余弦窗)

$$w(n) = \left[0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N-1} \right] R_N(n)$$

幅度函数: ($N \gg 1$)

$$W(\omega) = 0.54W_R(\omega) + 0.23 \left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right) \right]$$

主瓣宽度宽: $\frac{8\pi}{N}$ 旁瓣幅度更小

■ 布莱克曼 (Blackman) 窗
(二阶升余弦窗)

$$w(n) = \left[0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N-1} \right] R_N(n)$$

幅度函数: ($N \gg 1$)

$$W(\omega) = 0.42W_R(\omega) + 0.25 \left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right) \right] \\ + 0.04 \left[W_R\left(\omega - \frac{4\pi}{N}\right) + W_R\left(\omega + \frac{4\pi}{N}\right) \right]$$

主瓣宽度最宽: $\frac{12\pi}{N}$ 旁瓣幅度最小

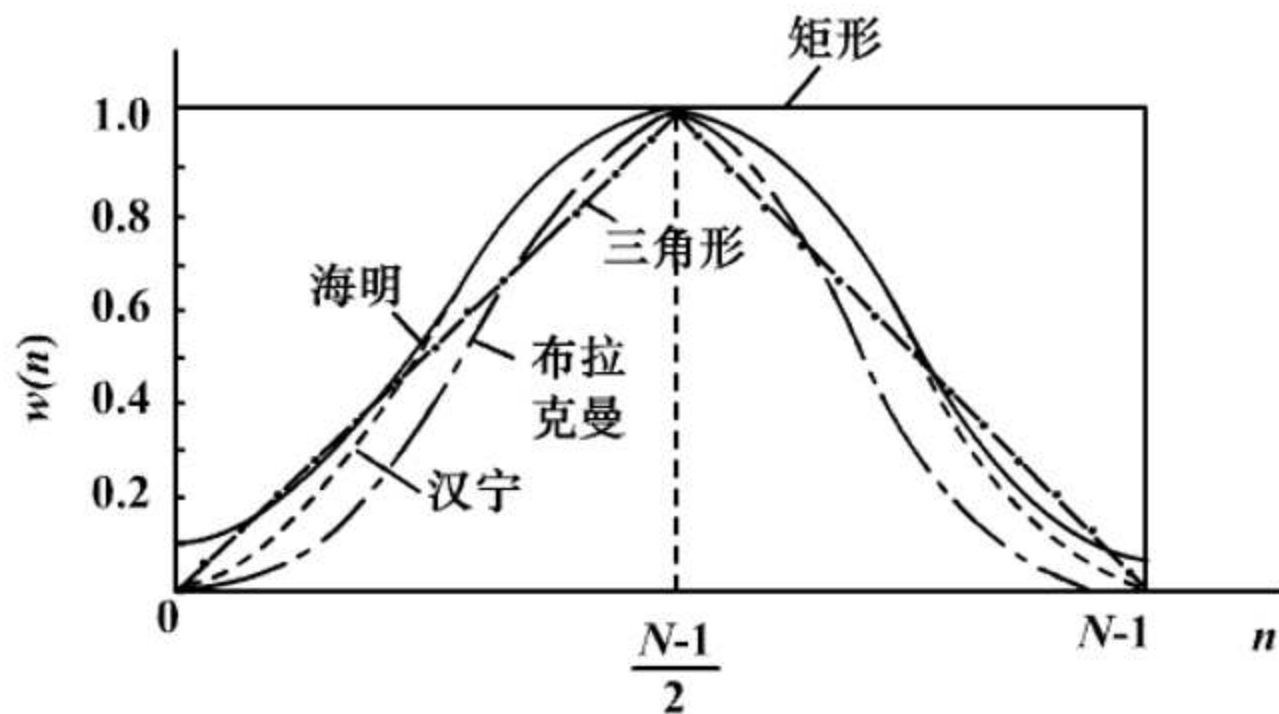


图7-10 设计有限长单位冲激响应滤波器常用的几种窗函数

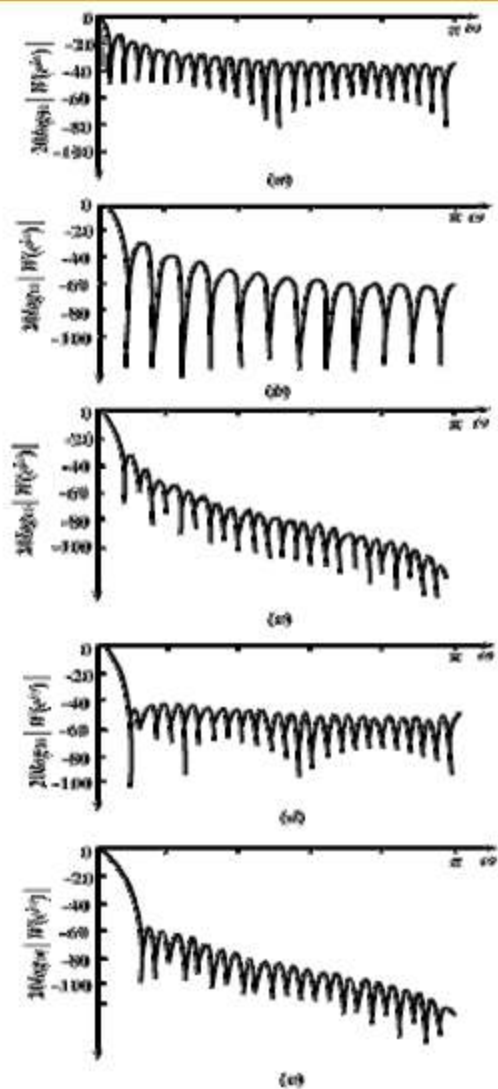


图7-11 图7-10的各种窗函数的
傅里叶变换 $|H(e^{j\omega})|$
(a)矩形窗;(b)巴特列特窗(三角形窗);
(c)汉宁窗;(d)海明窗;(e)布莱克曼窗

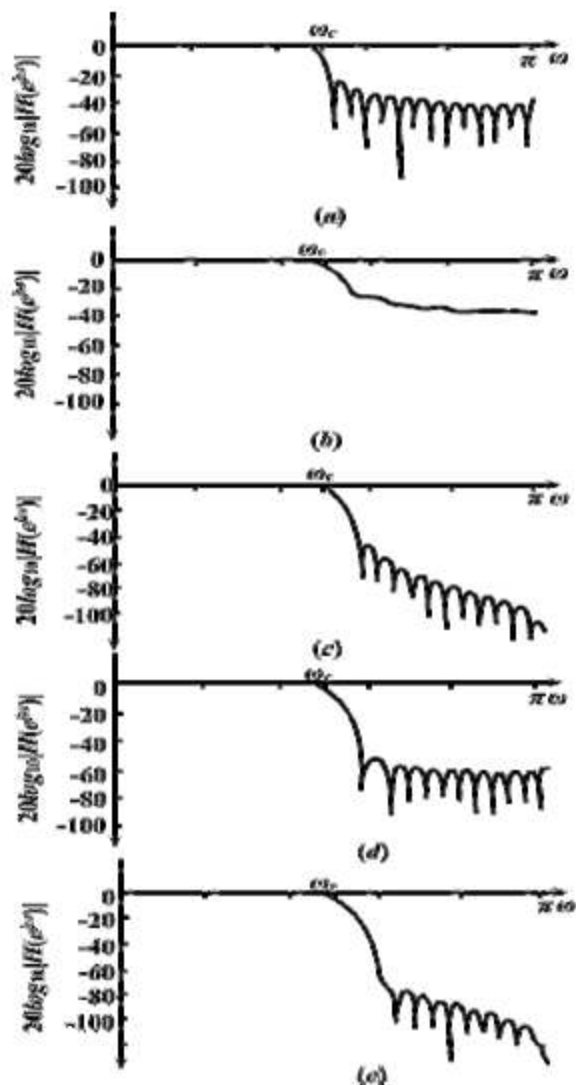


图7-12 理想低通滤波器加窗后的
幅度响应 ($N=51$)
(a)矩形窗;(b)巴特列特窗(三角形窗);
(c)汉宁窗;(d)海明窗;(e)布莱克曼窗

■ 凯泽 (Kaiser) 窗

$$w(n) = \frac{I_0 \left(\beta \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2n}{N-1} \right)^2} \right)}{I_0(\beta)} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$I_0(\cdot)$: 第一类变形零阶
贝塞尔函数

改变 β 可同时调整主瓣
宽度和旁瓣幅度

$\beta \uparrow$ 旁瓣幅度 \downarrow

但主瓣宽度 \uparrow

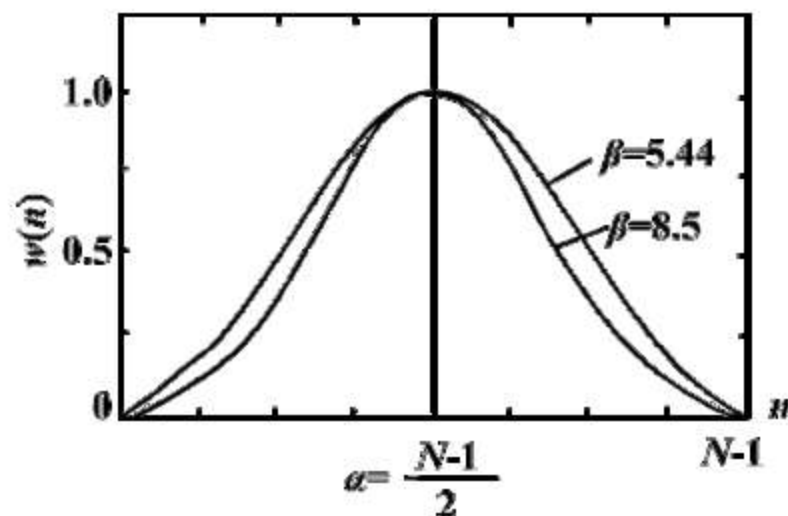


图7-13 凯泽窗函数

窗函数	窗谱性能指标		加窗后滤波器性能指标	
	旁瓣峰值 /dB	主瓣宽度 $/(2\pi/N)$	过渡带宽 $\Delta\omega$ $/(2\pi/N)$	阻带最小衰减 /dB
矩形窗	-13	2	0.9	-21
三角形窗	-25	4	2.1	-25
汉宁窗	-31	4	3.1	-44
海明窗	-41	4	3.3	-53
布拉克曼窗	-57	6	5.5	-74
凯泽窗 ($\beta = 7.865$)	-57		5	-80

阻带最小衰减只由窗形状决定

过渡带宽则与窗形状和窗宽 N 都有关

3、窗函数法的设计步骤

- 给定理想的频率响应函数 $H_d(e^{j\omega})$ 及技术指标 $\delta_2, \Delta\omega$
- 求出理想的单位抽样响应 $h_d(n)$
- 根据阻带衰减选择窗函数 $w(n)$
- 根据过渡带宽度确定 N 值 $N = A / \Delta\omega$
- 求所设计的FIR滤波器的单位抽样响应

$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n)$$

- 计算频率响应 $H(e^{j\omega})$, 验算指标是否满足要求

$$H_d(e^{j\omega}) \longrightarrow h_d(n)$$

公式法:
$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

IFFT法:

对 $H_d(e^{j\omega})$ M点等间隔抽样: $H_d(e^{j\frac{2\pi}{M}k})$

计算其IFFT, 得:
$$h_M(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_d(n+rM)$$

当 $M \gg N$ 时, $h_d(n) \approx h_M(n)$

4、线性相位FIR低通滤波器的设计

例：设计一个线性相位FIR低通滤波器，

给定抽样频率为 $\Omega_s = 2\pi \times 1.5 \times 10^4 (rad/sec)$

通带截止频率为 $\Omega_p = 2\pi \times 1.5 \times 10^3 (rad/sec)$ ，

阻带起始频率为 $\Omega_{st} = 2\pi \times 3 \times 10^3 (rad/sec)$

阻带衰减不小于-50dB，幅度特性如图所示

解： 1) 求数字频率

$$\omega_p = \Omega_p / f_s = 2\pi\Omega_p / \Omega_s = 0.2\pi$$

$$\omega_{st} = \Omega_{st} / f_s = 2\pi\Omega_{st} / \Omega_s = 0.4\pi$$

$$\delta_2 = 50dB$$

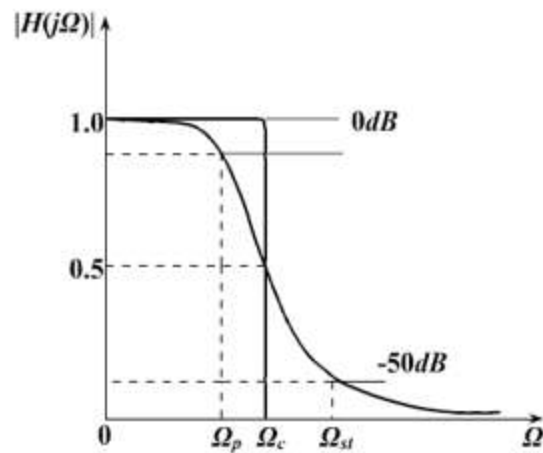


图7-14 例7-1要求的模拟低通滤波器特性

2) 求 $h_d(n)$

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_c, \omega_c \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

$$\omega_c = \frac{\Omega_c}{f_s} = 2\pi \frac{1/2(\Omega_p + \Omega_{st})}{\Omega_s} = 0.3\pi$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi(n-\tau)} \sin[\omega_c(n-\tau)] & n \neq \tau \\ \frac{\omega_c}{\pi} & n = \tau \end{cases} \quad \tau = \frac{N-1}{2}$$

3) 选择窗函数: 由 $\delta_2 = 50dB$ 确定海明窗 (-53dB)

$$w(n) = \left[0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N-1} \right] R_N(n)$$

4) 确定 N 值 海明窗带宽: $\Delta\omega = \frac{6.6\pi}{N}$

$$\Delta\omega = 2\pi \frac{\Omega_{st} - \Omega_p}{\Omega_s} = 0.2\pi$$

$$N = \frac{A}{\Delta\omega} = \frac{6.6\pi}{0.2\pi} = 33$$

$$\tau = \frac{N-1}{2} = 16$$

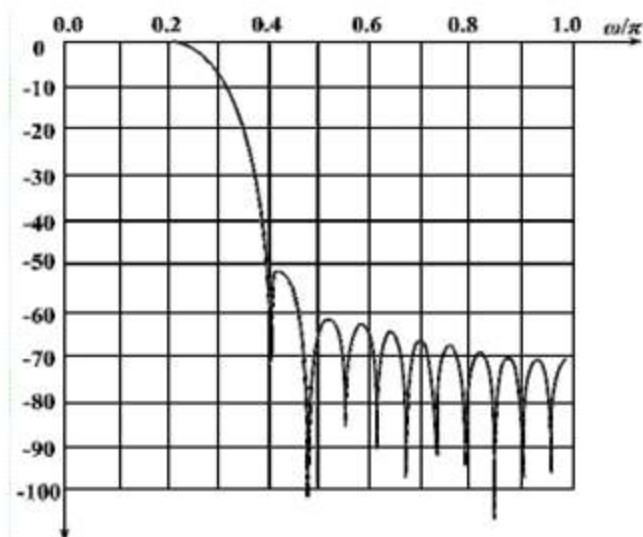
5) 确定FIR滤波器的 $h(n)$

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

$$= \frac{\sin\left[0.3\pi(n-16)\right]}{\pi(n-16)} \cdot \left[0.54 - 0.46\cos\frac{\pi n}{16}\right] R_{33}(n)$$

6) 求 $H(e^{j\omega})$, 验证

若不满足, 则改变 N
或窗形状重新设计



过度带宽 $\Delta\omega$: 0.3476563 π
第一通带波纹: 0.020837dB
第一阻带最小衰减: 50.9159dB

图7-15 例7-1设计出的线性相位FIR低通滤波器幅频特性
(海明窗, $N=33$)

5、线性相位FIR高通滤波器的设计

理想高通的频响：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \\ 0 & \text{其它 } \omega \end{cases} \quad \tau = \frac{N-1}{2}$$

其单位抽样响应：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega + \int_{\omega_c}^{\pi} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega \right]$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi(n-\tau)} \left\{ \sin[\pi(n-\tau)] - \sin[\omega_c(n-\tau)] \right\} & n \neq \tau \\ \frac{1}{\pi}(\pi - \omega_c) & n = \tau \end{cases}$$

6、线性相位FIR带通滤波器的设计

理想带通的频响：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & 0 < \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2 < \pi \\ 0 & \text{其它 } \omega \end{cases} \quad \tau = \frac{N-1}{2}$$

其单位抽样响应：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\omega_2}^{-\omega_1} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega + \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega \right]$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi(n-\tau)} \left\{ \sin[\omega_2(n-\tau)] - \sin[\omega_1(n-\tau)] \right\} & n \neq \tau \\ \frac{1}{\pi} (\omega_2 - \omega_1) & n = \tau \end{cases}$$

带通滤波器(ω_1, ω_2) = 低通滤波器(ω_2) - 低通滤波器(ω_1)

7、线性相位FIR带阻滤波器的设计

理想带阻的频响：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & 0 \leq |\omega| \leq \omega_1, \omega_2 \leq |\omega| \leq \pi \\ 0 & \text{其它 } \omega \end{cases}$$

$$\tau = \frac{N-1}{2}$$

其单位抽样响应：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\omega_2} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega + \int_{-\omega_1}^{\omega_1} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega + \int_{\omega_2}^{\pi} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega \right]$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi(n-\tau)} \left\{ \sin[\pi(n-\tau)] + \sin[\omega_1(n-\tau)] - \sin[\omega_2(n-\tau)] \right\} & n \neq \tau \\ \frac{1}{\pi} (\pi + \omega_1 - \omega_2) & n = \tau \end{cases}$$

带阻滤波器(ω_1, ω_2) = 高通滤波器(ω_2) + 低通滤波器(ω_1)

三、频率抽样设计法

1、设计方法

对理想频率响应等间隔抽样

作为实际FIR数字滤波器的频率特性的抽样值

$$H(k) = H_d(k) = H_d(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

The diagram shows the relationships between the discrete-time Fourier transform (DTFT) and the discrete-time Fourier series (DTFS) coefficients. The equation above shows that the DTFS coefficients $H(k)$ are the samples of the DTFT $H_d(e^{j\omega})$ at $\omega = \frac{2\pi}{N}k$. Below the equation, arrows indicate the relationships: a vertical arrow points from $H(k)$ down to $h(n)$; a diagonal arrow points from $H(k)$ down and to the left to $H(z)$; a diagonal arrow points from $H(k)$ down and to the right to $H(e^{j\omega})$; and a vertical arrow points from $H(e^{j\omega})$ up to $H_d(e^{j\omega})$.

窗函数设计法:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \rightarrow H_d(e^{j\omega})$$

↓

$$h(n) = w(n)h_d(n) \longrightarrow h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

内插公式:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j\omega \frac{N-1}{2}}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \frac{1}{N} e^{j\frac{\pi k}{N}(N-1)} \frac{\sin \left[N \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N} \right) \right]}{\sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N} \right)}$$

- 抽样点上，频率响应严格相等
- 抽样点之间，加权内插函数的延伸叠加
- 变化越平缓，内插越接近理想值，逼近误差较小

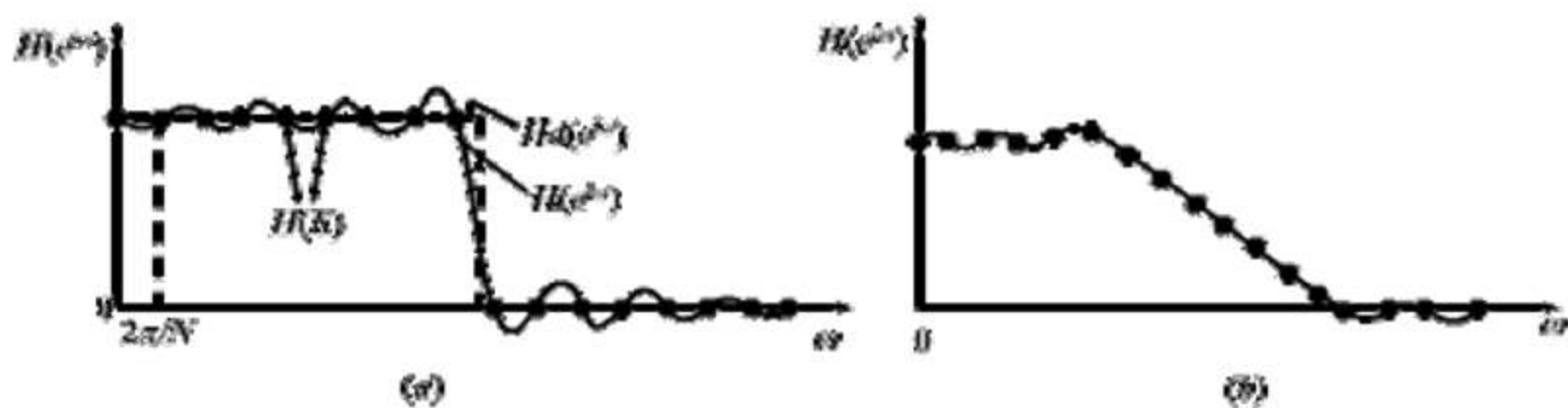


图3-16 频率抽样的响应

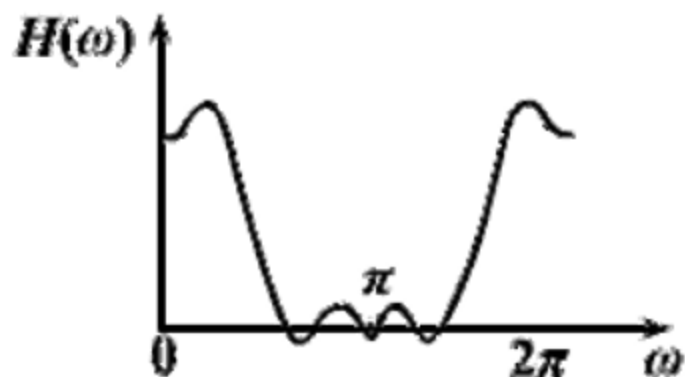
1、线性相位的约束

1) $h(n)$ 偶对称, N 为奇数

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega) e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

$$H(\omega) = H(2\pi - \omega)$$

$$H(k) = H\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) = H_k e^{j\theta_k} \quad \omega = \frac{2\pi}{N}k$$



幅度偶对称: $H_k = H_{N-k}$

相位函数: $\theta_k = -\frac{N-1}{2} \cdot \frac{2\pi}{N}k = -k\pi \left(1 - \frac{1}{N}\right)$

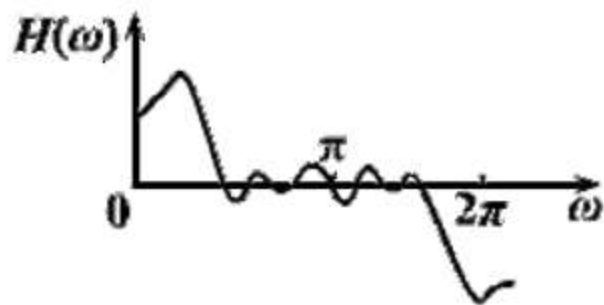
2) $h(n)$ 偶对称, N 为偶数

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

$$H(\omega) = -H(2\pi - \omega)$$

$$H(k) = H\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) = H_k e^{j\theta_k}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{N}k$$



幅度奇对称: $H_k = -H_{N-k}$

相位函数: $\theta_k = -k\pi\left(1 - \frac{1}{N}\right)$

2、频率抽样的两种方法

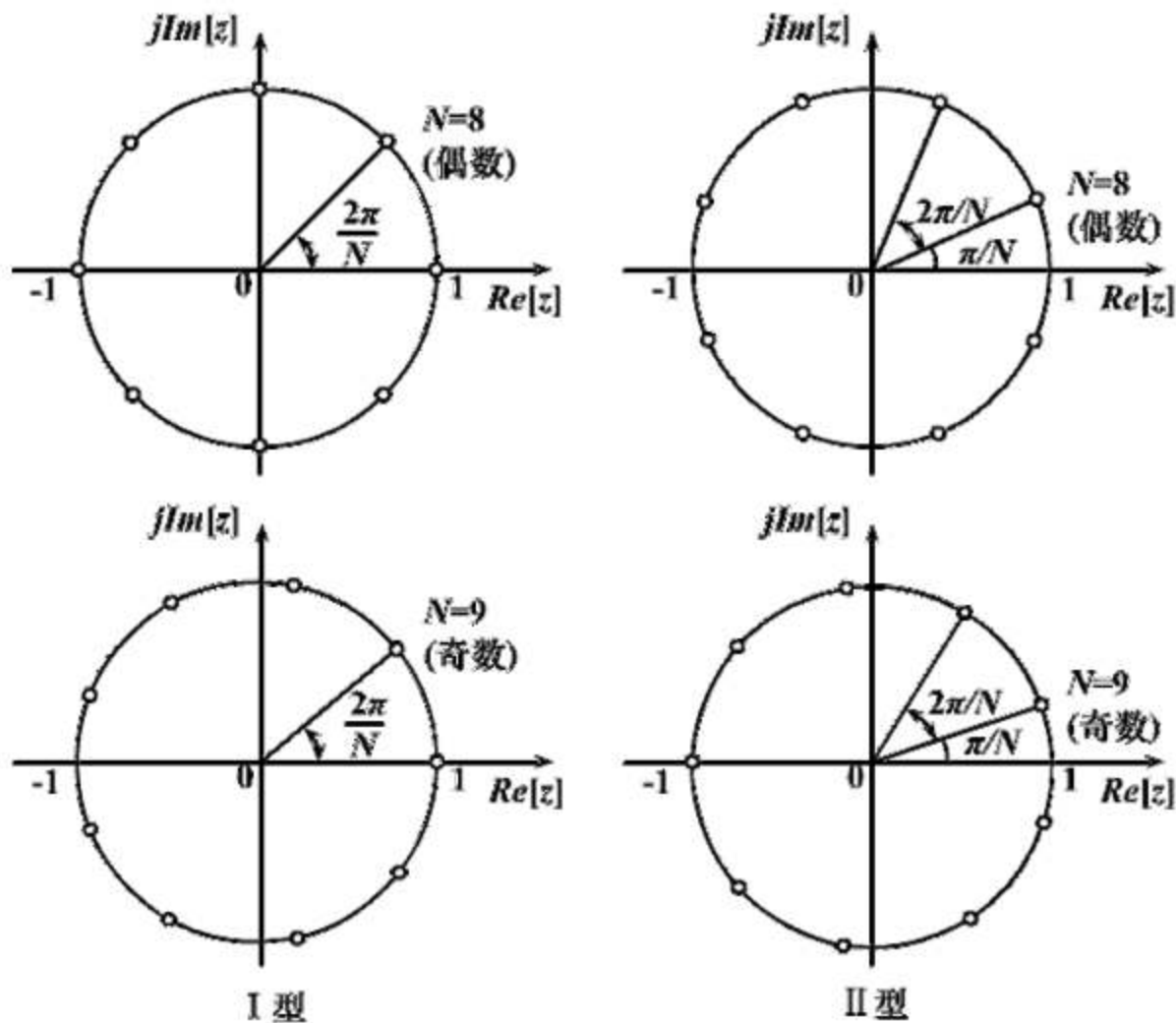
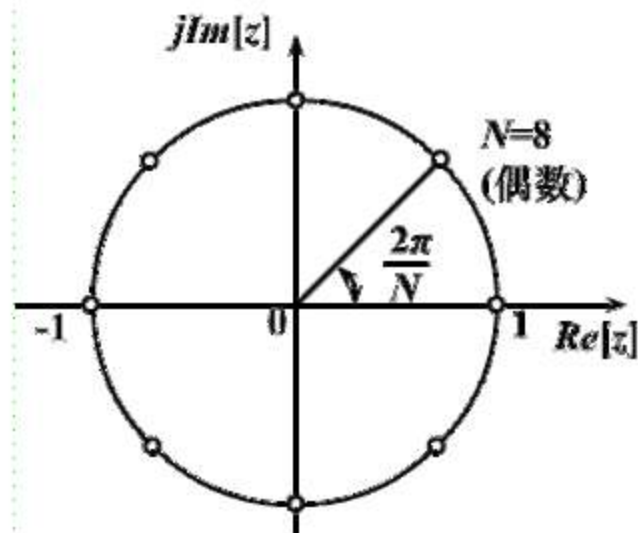


图7-17 两种频率抽样(I型,II型)

1) 第一种频率抽样

$$H(k) = H_d(k) = H_d(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$$
$$k = 0, 1, \dots, N-1$$



系统函数:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

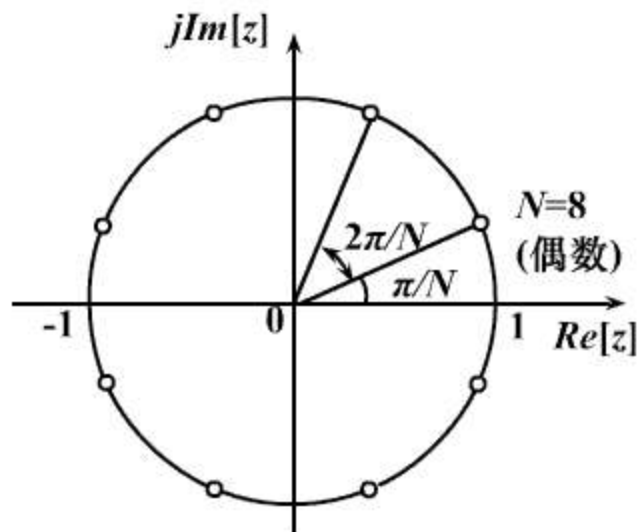
频率响应:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{-j\frac{\pi k}{N}} \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi k}{N}\right)}$$

2) 第二种频率抽样

$$H(k) = H_d \left(e^{j\omega} \right) \Bigg|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k + \frac{\pi}{N}}$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$



系统函数:

$$H(z) = \frac{1 + z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{1}{2})} z^{-1}}$$

频率响应:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\cos\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k) e^{-j\frac{\pi}{N}(k+\frac{1}{2})}}{j \sin\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]}$$

3、线性相位第一种频率抽样

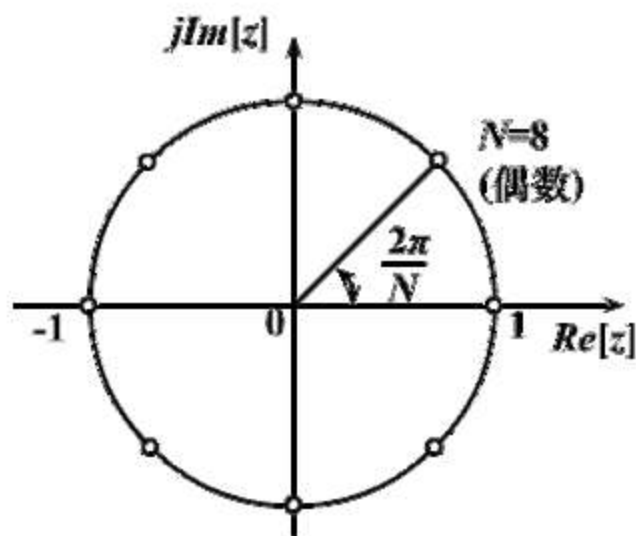
$h(n)$ 为实数序列时， $H(k)$ 圆周共轭对称

$$H(k) = H^*(N - k)$$

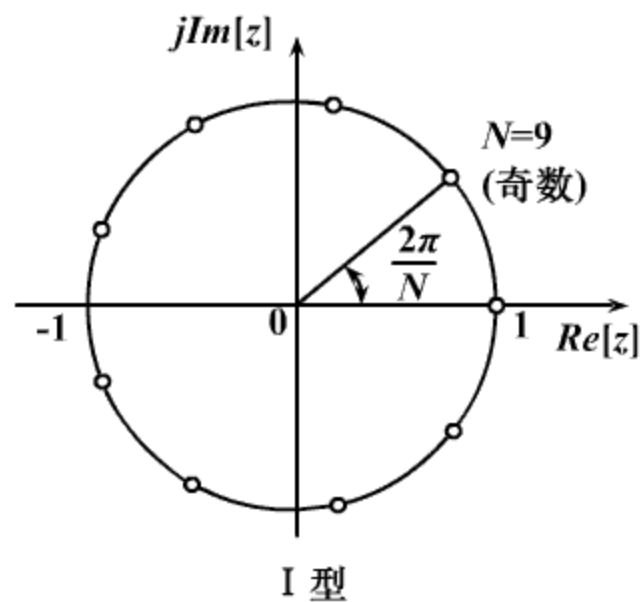
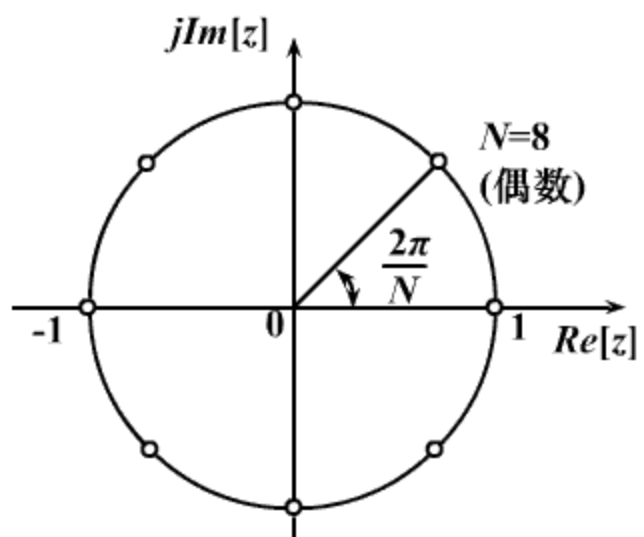
即： $|H(k)| = |H(N - k)|$

$$\theta(k) = -\theta(N - k)$$

对称中心： $\frac{N}{2}$



$$\text{又线性相位： } \theta(e^{j\omega}) = -\frac{N-1}{2}\omega$$



当 N 为奇数时:

$$\theta(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N}k\left(\frac{N-1}{2}\right) & k = 0, \dots, \frac{N-1}{2} \\ \frac{2\pi}{N}(N-k)\left(\frac{N-1}{2}\right) & k = \frac{N+1}{2}, \dots, N-1 \end{cases}$$

当 N 为偶数时:

$$\theta(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N}k\left(\frac{N-1}{2}\right) & k = 0, \dots, \left(\frac{N}{2}-1\right) \\ 0 & k = \frac{N}{2} \\ \frac{2\pi}{N}(N-k)\left(\frac{N-1}{2}\right) & k = \left(\frac{N}{2}+1\right), \dots, N-1 \end{cases}$$

当 N 为奇数时:

$$H(k) = \begin{cases} |H(k)| e^{-j\frac{2\pi}{N}k\left(\frac{N-1}{2}\right)} & k = 0, \dots, \frac{N-1}{2} \\ |H(N-k)| e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)\left(\frac{N-1}{2}\right)} & k = \frac{N+1}{2}, \dots, N-1 \end{cases}$$

当 N 为偶数时:

$$H(k) = \begin{cases} |H(k)| e^{-j\frac{2\pi}{N}k\left(\frac{N-1}{2}\right)} & k = 0, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right) \\ 0 & k = \frac{N}{2} \\ |H(N-k)| e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)\left(\frac{N-1}{2}\right)} & k = \left(\frac{N}{2} + 1\right), \dots, N-1 \end{cases}$$

频率响应:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left\{ \frac{|H(0)| \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \sum_{k=1}^M \frac{|H(k)|}{N} \left[\frac{\sin\left[N\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N}\right)} + \frac{\sin\left[N\left(\frac{\omega}{2} + \frac{k\pi}{N}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{k\pi}{N}\right)} \right] \right\}$$

当 N 为奇数时: $M = \frac{N-1}{2}$

当 N 为偶数时: $M = \frac{N}{2} - 1$

4、线性相位第二种频率抽样

$h(n)$ 为实数序列时， $H(k)$ 圆周共轭对称

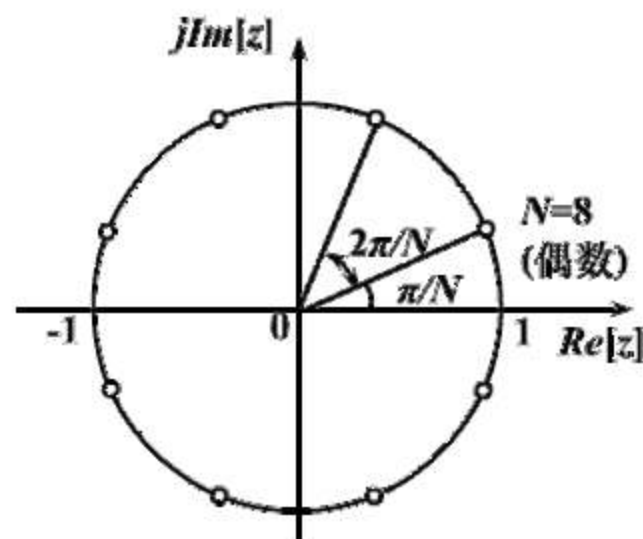
$$H(k) = H^*(N-1-k)$$

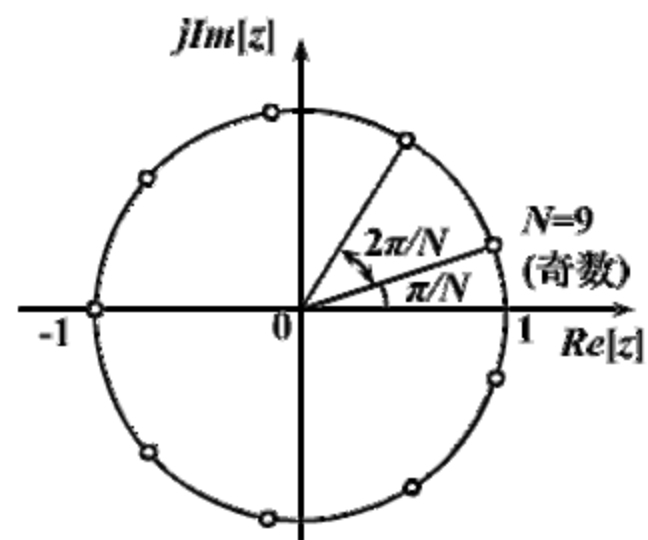
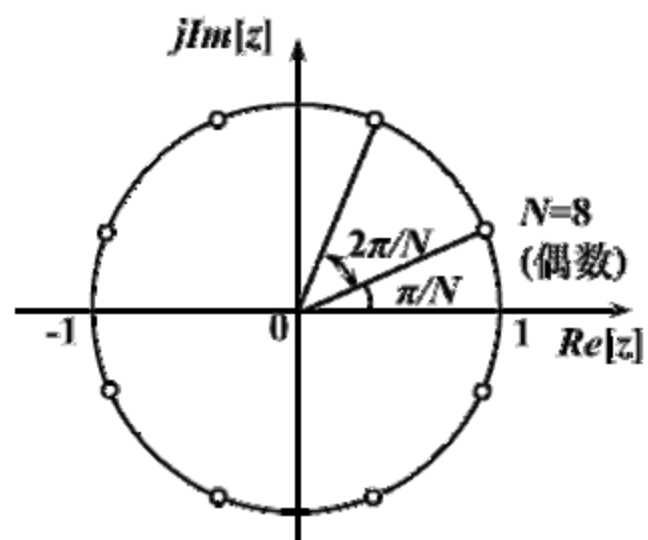
即： $|H(k)| = |H(N-1-k)|$

$$\theta(k) = -\theta(N-1-k)$$

对称中心： $\frac{N-1}{2}$

又线性相位： $\theta(e^{j\omega}) = -\frac{N-1}{2}\omega$





II 型

当 N 为奇数时:

$$\theta(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{N-1}{2} \right) & k = 0, \dots, \frac{N-3}{2} \\ 0 & k = \frac{N-1}{2} \\ \frac{2\pi}{N} \left(N - k - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{N-1}{2} \right) & k = \frac{N+1}{2}, \dots, N-1 \end{cases}$$

当 N 为偶数时:

$$\theta(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N} \left(k + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{N-1}{2} \right) & k = 0, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \\ \frac{2\pi}{N} \left(N - k - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{N-1}{2} \right) & k = \frac{N}{2}, \dots, N-1 \end{cases}$$

当 N 为奇数时:

$$H(k) = \begin{cases} |H(k)| e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)} & k = 0, \dots, \frac{N-3}{2} \\ \left| H\left(\frac{N-1}{2}\right) \right| & k = \frac{N-1}{2} \\ |H(N-1-k)| e^{j\frac{2\pi}{N}\left(N-k-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)} & k = \frac{N+1}{2}, \dots, N-1 \end{cases}$$

当 N 为偶数时:

$$H(k) = \begin{cases} |H(k)| e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)} & k = 0, \dots, \left(\frac{N}{2}-1\right) \\ |H(N-1-k)| e^{j\frac{2\pi}{N}\left(N-k-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)} & k = \frac{N}{2}, \dots, N-1 \end{cases}$$

频率响应:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega} \left\{ H_{\frac{N-1}{2}}(\omega) + \sum_{k=0}^M \frac{|H(k)|}{N} \left[\frac{\sin\left\{N\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{\sin\left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]} + \frac{\sin\left\{N\left[\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{\sin\left[\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]} \right] \right\}$$

当 N 为奇数时:

$$H_{\frac{N-1}{2}}(\omega) = \frac{\left|H\left(\frac{N-1}{2}\right)\right|}{N} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad M = \frac{N-3}{2}$$

当 N 为偶数时: $H_{\frac{N-1}{2}}(\omega) = 0$ $M = \frac{N}{2} - 1$

5、过渡带抽样的优化设计

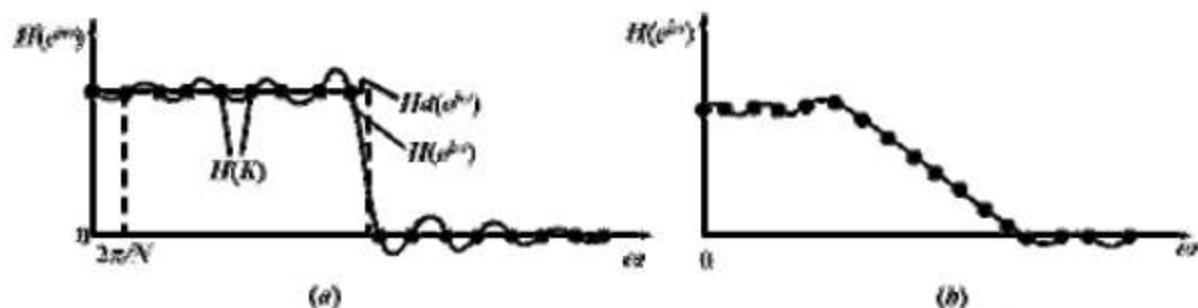


图7-16 频率抽样的响应

增加过渡带抽样点，可加大阻带衰减

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \Phi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

不加过渡抽样点： $\delta_2 = -20dB$

加一点： $\delta_2 = -40 \sim -54dB$

加两点： $\delta_2 = -60 \sim -75dB$

加三点： $\delta_2 = -80 \sim -95dB$

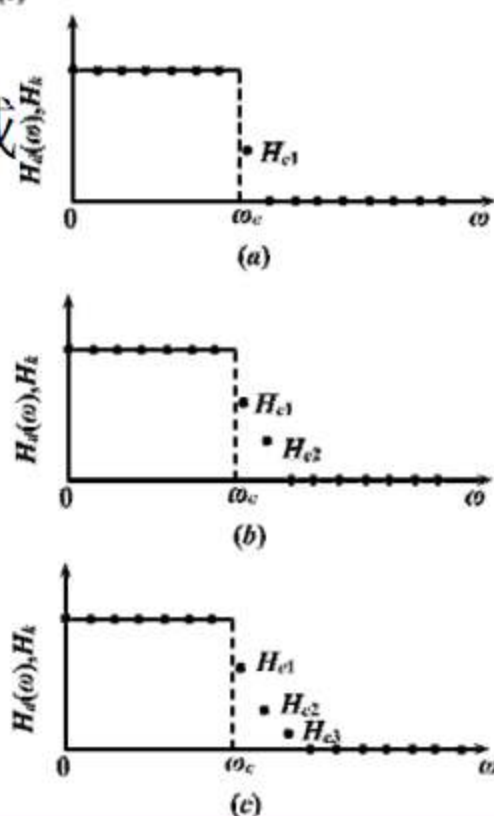


图7-18 加过渡抽样点(过渡点)

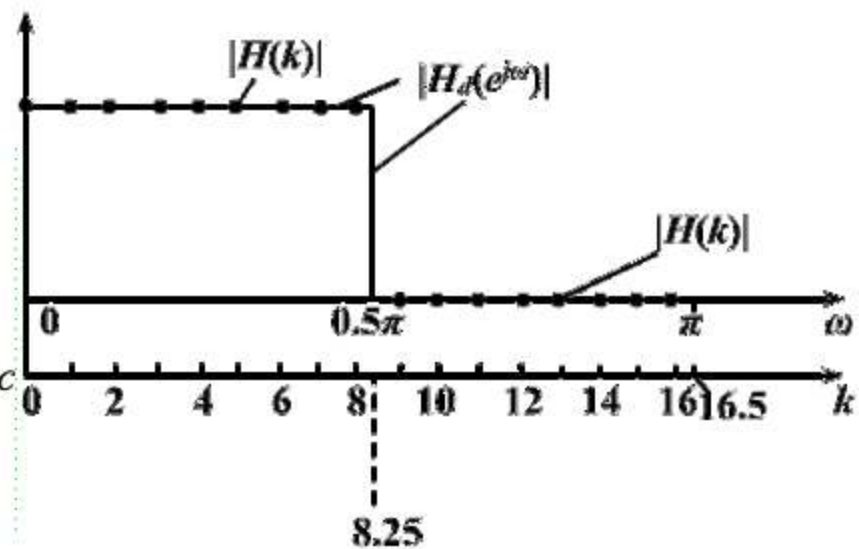
(a) 一点过渡带；(b) 二点过渡带；(c) 三点过渡带；

- 增加过渡带抽样点，可加大阻带衰减，但导致过渡带变宽
- 增加 N ，使抽样点变密，减小过渡带宽度，但增加了计算量
- 优点：频域直接设计
- 缺点：抽样频率只能是 $2\pi/N$ 或 π/N 的整数倍，截止频率 ω_c 不能任意取值

例：利用频率抽样法设计一个频率特性为矩形的理想低通滤波器，截止频率为 0.5π ，抽样点数为 $N=33$ ，要求滤波器具有线性相位。

解：理想低通频率特性

$$|H_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \text{其它 } \omega \end{cases}$$



按第一种频率抽样方式， $N=33$ ，得抽样点

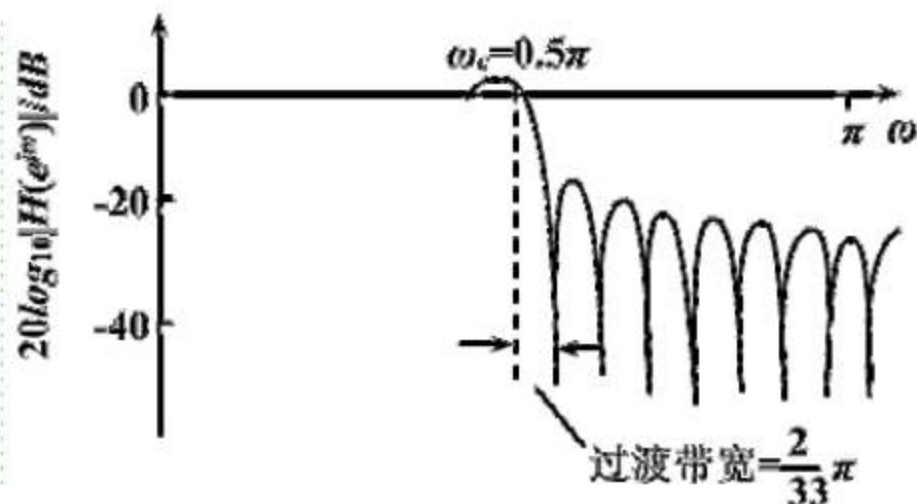
$$|H(k)| = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq \text{Int} \left[\frac{N\omega_c}{2\pi} \right] = \frac{N-1}{4} = 8 \\ 0 & \text{Int} \left[\frac{N\omega_c}{2\pi} \right] + 1 = 9 \leq k \leq \frac{N-1}{2} = 16 \end{cases}$$

得线性相位FIR滤波器的频率响应:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j16\omega} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{33\omega}{2}\right)}{33\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \sum_{k=1}^8 \left[\frac{\sin\left[33\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{33}\right)\right]}{33\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{33}\right)} + \frac{\sin\left[33\left(\frac{\omega}{2} + \frac{k\pi}{33}\right)\right]}{33\sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{k\pi}{33}\right)} \right] \right\}$$

过渡带宽: $2\pi/33$

阻带衰减: $-20dB$



■ 增加一点过渡带抽样点

令 $H(9)=0.5$

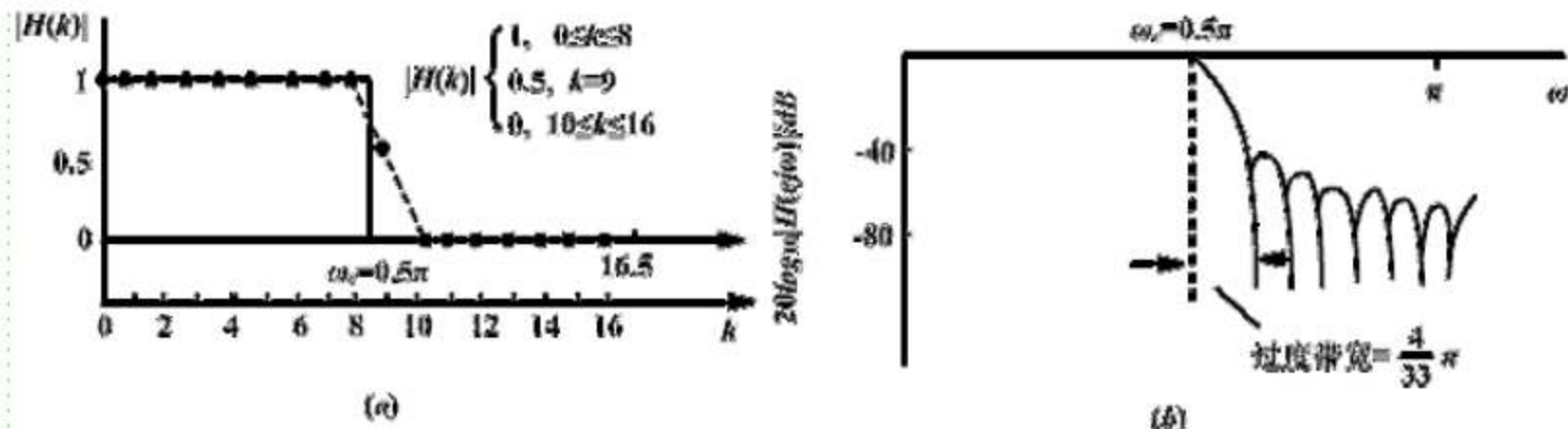


图7-20 增加过渡带非零抽样值及其影响
 (a)要求的频率响应 $|H_d(e^{j\omega})|$ 及其抽样 $|K(k)|$;(b)设计结果

过渡带宽: $4\pi / 33$

阻带衰减: $-40dB$

- 增加两点过渡带抽样点
且增加抽样点数为 $N=65$

$$\text{令 } H(17)=0.5886$$

$$H(18)=0.1065$$

$$\text{过渡带宽: } 6\pi / 65$$

$$\text{阻带衰减: } -60\text{dB}$$

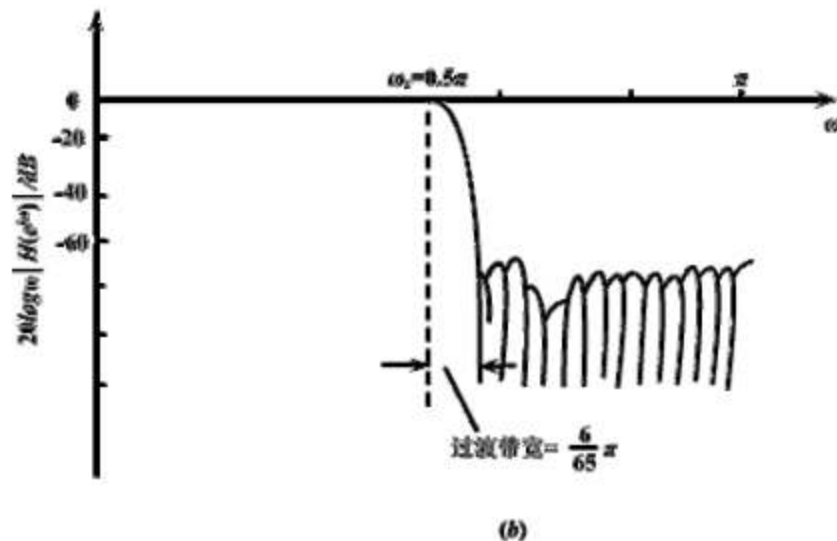
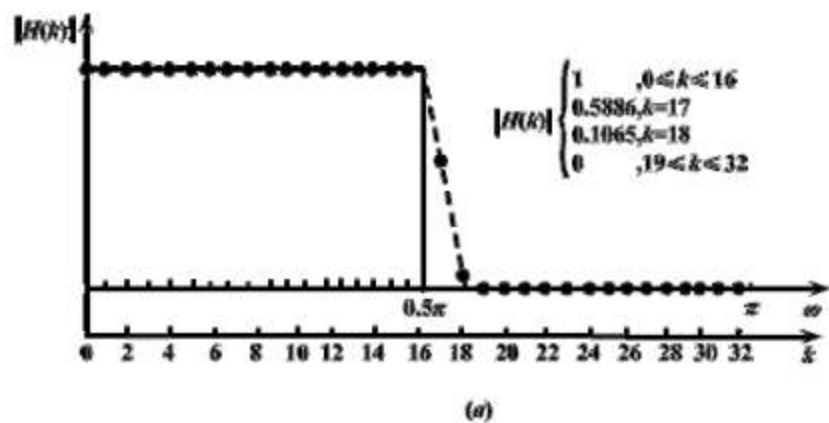


图7-21 增加抽样点数 N 及过渡带频率抽样值的情况
(a)要求的频率响应 $|H(e^{j\omega})|$ 及其抽样 $|H(k)|$; (b)设计结果

四、设计FIR滤波器的最优化方法

1、均方误差最小准则

频率响应误差：

$$E(e^{j\omega}) = \underbrace{H_d(e^{j\omega})}_{\text{理想频响}} - \underbrace{H(e^{j\omega})}_{\text{实际频响}}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n} - \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} [h_d(n) - h(n)] e^{-j\omega n} + \sum_{\text{其它}n} h_d(n) e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

均方误差:

$$\begin{aligned} e^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} |h_d(n) - h(n)|^2 + \sum_{\text{其它}n} |h_d(n)|^2 \end{aligned}$$

当 $|h_d(n) - h(n)| = 0 \quad 0 \leq n \leq N-1$ 时

$$e^2 = \min(e^2)$$

即 $h(n) = \begin{cases} h_d(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其它}n \end{cases}$ 相当于矩形窗

∴ 矩形窗设计结果必满足最小均方误差准则

2、最大误差最小化准则

(加权chebyshev等波纹逼近)

当 $h(n)$ 为偶/奇对称, N 为奇/偶数的四种情况

其频响

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}L} \cdot H(\omega)$$

$h(n)$ 为偶对称时 $L = 0$

$$N \text{ 为奇数: } H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \cos(\omega n)$$

$$N \text{ 为偶数: } H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}L} \cdot H(\omega)$$

$h(n)$ 为奇对称时 $L=1$

$$N\text{为奇数: } H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin(\omega n)$$

$$N\text{为偶数: } H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n) \sin\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$$

利用三角恒等式将 $H(\omega)$ 表示成两项相乘形式

$$H(\omega) = Q(\omega) \cdot P(\omega)$$

$$H(\omega) = Q(\omega) \cdot P(\omega)$$

$$Q(\omega)$$

$$P(\omega)$$

$h(n)$ 偶对称

N 为奇数

$$1$$

$$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} \tilde{a}(n) \cos(\omega n)$$

N 为偶数

$$\cos \frac{\omega}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{b}(n) \cos(\omega n)$$

$h(n)$ 奇对称

N 为奇数

$$\sin \omega$$

$$\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} \tilde{c}(n) \cos(\omega n)$$

N 为偶数

$$\sin \frac{\omega}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{d}(n) \cos(\omega n)$$

其中：

$$\tilde{a}(n) = a(n) \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N-1}{2}$$

$$\begin{cases} b(1) = \tilde{b}(0) + \frac{1}{2}\tilde{b}(1) \\ b(n) = \frac{1}{2}[\tilde{b}(n) + \tilde{b}(n-1)] & n = 2, 3, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ b\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{1}{2}\tilde{b}\left(\frac{N}{2} - 1\right) \end{cases}$$

由下而上由 $b(n)$ 求 $\tilde{b}(n)$

$$\begin{cases} c(1) = \tilde{c}(0) - \frac{1}{2}\tilde{c}(2) \\ c(n) = \frac{1}{2}[\tilde{c}(n-1) - \tilde{c}(n+1)] & n = 2, 3, \dots, \frac{N-5}{2} \\ c(n) = \frac{1}{2}\tilde{c}(n-1) & n = \frac{N-3}{2}, \frac{N-1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d(1) = \tilde{d}(0) - \frac{1}{2}\tilde{d}(1) \\ d(n) = \frac{1}{2}[\tilde{d}(n-1) - \tilde{d}(n)] & n = 2, 3, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ d\left(\frac{N}{2}\right) = \frac{1}{2}\tilde{d}\left(\frac{N}{2} - 1\right) \end{cases}$$

加权逼近误差函数：

$$E(\omega) = \underbrace{W(\omega)}_{\text{加权函数}} \left[\underbrace{H_d(\omega) - H(\omega)}_{\text{逼近函数}} \right]$$

$$= W(\omega) [H_d(\omega) - P(\omega)Q(\omega)]$$

$$= \underbrace{W(\omega)Q(\omega)}_{\hat{W}(\omega)} \left[\underbrace{\frac{H_d(\omega)}{Q(\omega)}}_{\hat{H}_d(\omega)} - P(\omega) \right]$$

$$E(\omega) = \hat{W}(\omega) [\hat{H}_d(\omega) - P(\omega)]$$

加权chebyshev等波纹逼近：

求一组系数 $\alpha(n)$ 使各频带上 $E(\omega)$ 的最大绝对值最小

$$\|E(\omega)\| = \min_{\text{各系数}} \left[\max_{\omega \in A} |E(\omega)| \right] \quad A \text{ — 各通带和阻带}$$

交错定理: 若 $P(\omega)$ 是 r 个余弦函数的线性组合。即

$$P(\omega) = \sum_{n=0}^{r-1} \alpha(n) \cos(\omega n)$$

A 是 $(0, \pi)$ 内的一个闭区间(包括各通带、阻带, 但不包括过渡带), $\hat{H}_d(\omega)$ 是 A 上的一个连续函数,

则 $P(\omega)$ 是 $\hat{H}_d(\omega)$ 的唯一地和最佳的加权chebyshev逼近的充分必要条件是:

加权逼近误差函数 $E(\omega)$ 在 A 中至少有 $(r+1)$ 个极值点, 即 A 中至少有 $(r+1)$ 个点 ω_i , 且

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_r < \omega_{r+1}$$

使得 $E(\omega_i) = -E(\omega_{i+1}) \quad i = 1, 2, \dots, r$

且 $|E(\omega_i)| = \max_{\omega \in A} [E(\omega)]$

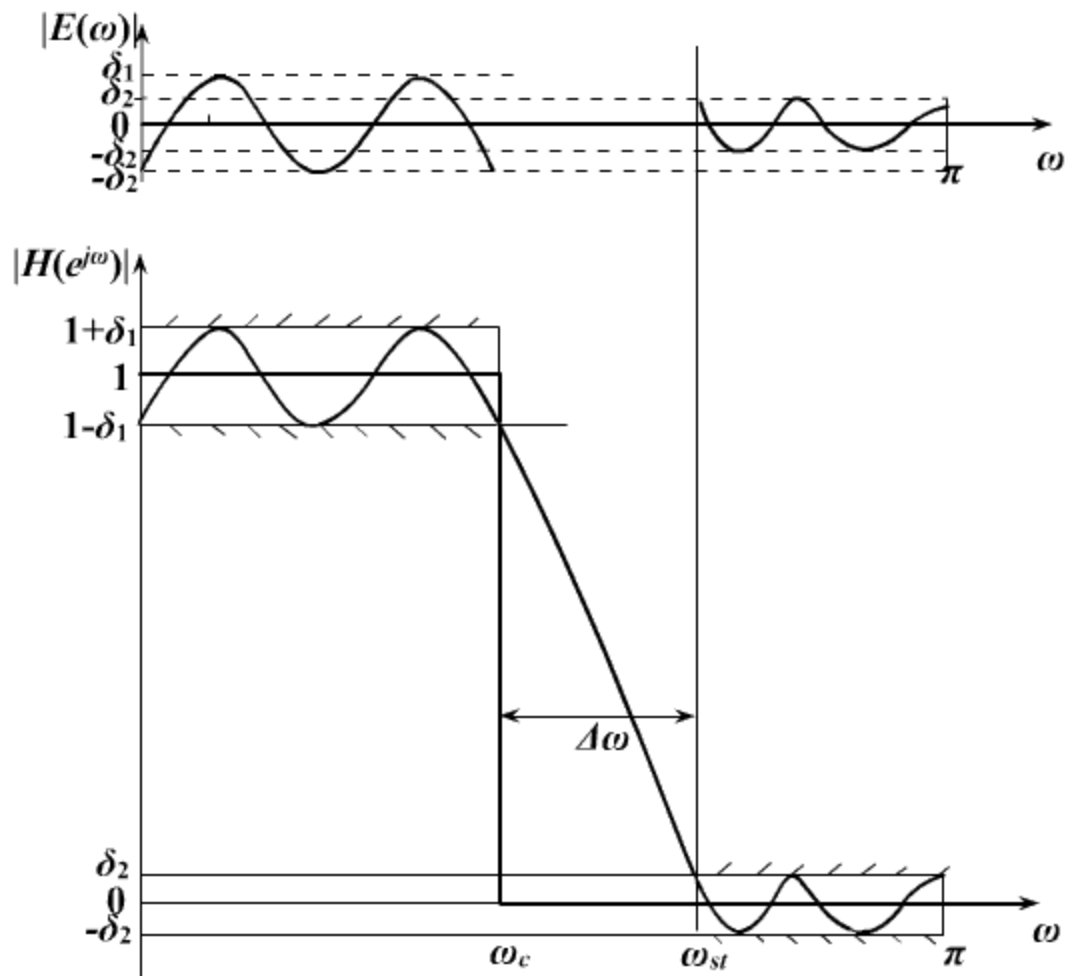


图7-22 低通数字滤波器的一致逼近

设要求滤波器频率响应：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

寻找一个 $H(e^{j\omega})$

使其在通带和阻带内最佳地一致逼近 $H_d(e^{j\omega})$

参数： ω_c , ω_{st} , δ_1 , δ_2 , N

根据交错定理：

若 $H(e^{j\omega}) \rightarrow H_d(e^{j\omega})$ 最佳一致逼近

则 $H(e^{j\omega})$ 在通、阻带内具等波纹性

故又称等波纹逼近

极值点数目

$E(\omega)$ 最大极值点数

= $H(\omega)$ 的极值点数 + $E(\omega)$ 单有极点

根据 $H(\omega) = \sum_{n=0}^{r-1} \alpha(n) \cos(\omega n)$

知 $H(\omega)$ 的极值点数为: $N_c \leq r$

$h(n)$ 偶对称

$$N \text{ 为奇数} \quad r = \frac{N+1}{2}$$

$$N \text{ 为偶数} \quad r = \frac{N}{2}$$

$h(n)$ 奇对称

$$N \text{ 为奇数} \quad r = \frac{N-1}{2}$$

$$N \text{ 为偶数} \quad r = \frac{N}{2}$$

$E(\omega)$ 单有的极值点是除 $\omega = 0, \pi$ 外的频带端点处

最优线性相位FIR滤波器的设计步骤

- 1) 输入数据, 滤波器性能要求, 滤波器类型
- 2) 根据类型和 $h(n)$ 的长度 N , 确定 $\cos(\)$ 的个数 r
- 3) 在 $[0, \pi]$ 频率区间, 用密集的格点表示离散频率

$$\frac{\pi}{\text{总格点数}} = \frac{\pi}{\text{格点密度} \times r}$$

- 4) 计算各格点频率上的 $H_d(\omega)$ 和 $W(\omega)$ 函数值
- 5) 用公式表示逼近问题

将 $H_d(\omega)$, $W(\omega)$ 表示成 $\hat{H}_d(\omega)$, $\hat{W}(\omega)$

加权逼近误差: $E(\omega) = \hat{W}(\omega) \left[\hat{H}_d(\omega) - P(\omega) \right]$

- 6) 用Remez算法, 求逼近问解的解

- 7) 计算滤波器的单位抽样响应 $h(n)$

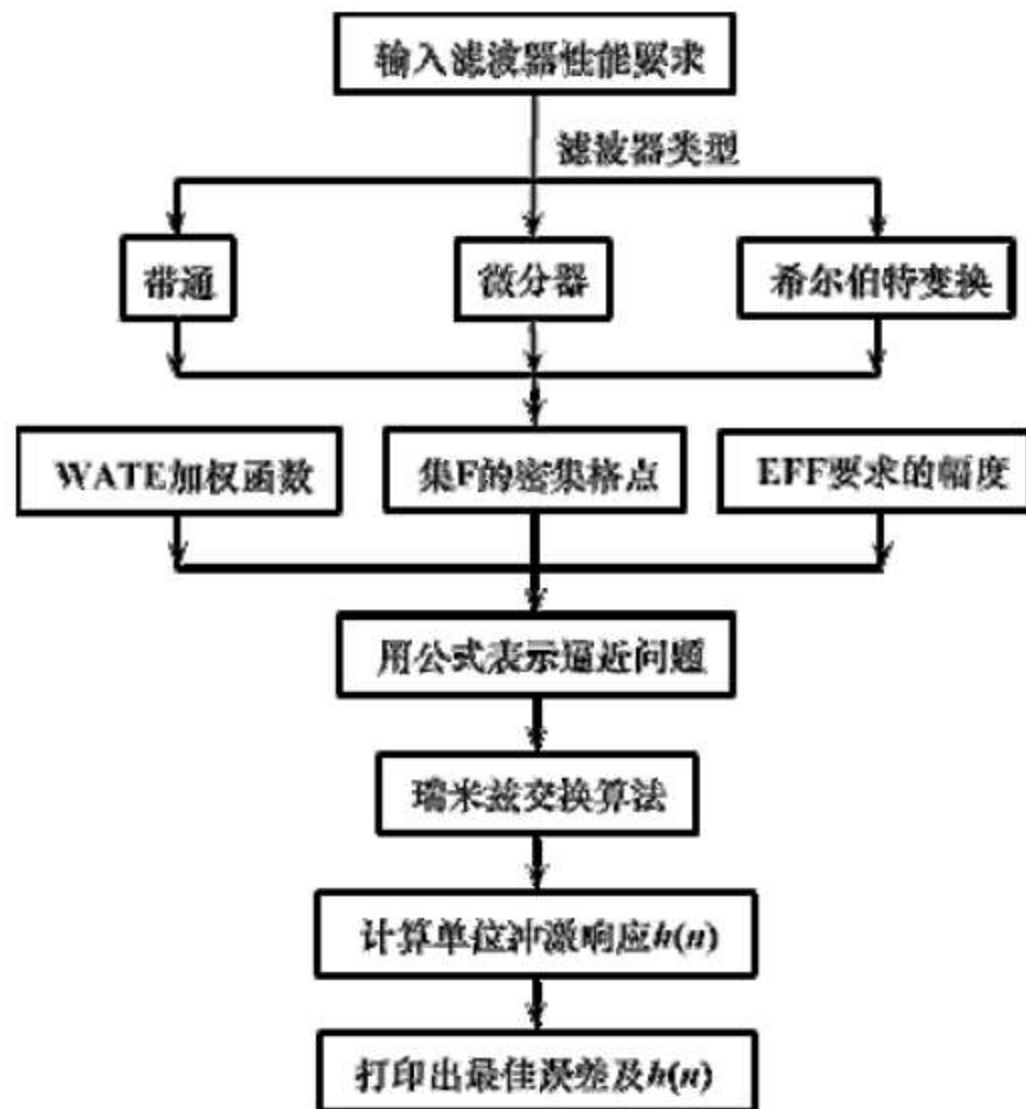


图7-23 最佳线性相位FIR滤波器设计算法框图

Remez算法

1) 按等间隔设定 $(r+1)$ 个极值点频率的初始值

$$\omega_k \quad k = 0, \dots, r$$

$$\text{其中: } \omega_c = \omega_l, \quad \omega_{st} = \omega_{l+1}, \quad 0 < l < r$$

设误差函数值为 δ , 则

$$\hat{W}(\omega_k) \left[\hat{H}_d(\omega_k) - P(\omega_k) \right] = (-1)^k \delta \quad k = 0, \dots, r$$

$$\text{其中: } P(\omega_k) = \sum_{n=0}^{r-1} \alpha(n) \cos(\omega_k n)$$

$$\hat{H}_d(\omega_k) = \frac{(-1)^k \delta}{\hat{W}(\omega_k)} + P(\omega_k) \quad k = 0, \dots, r$$

$$\begin{bmatrix}
 1 & \cos \omega_0 & \cos 2\omega_0 & \cdots & \cos [(r-1)\omega_0] & \frac{1}{\hat{W}(\omega_0)} \\
 1 & \cos \omega_1 & \cos 2\omega_1 & \cdots & \cos [(r-1)\omega_1] & \frac{-1}{\hat{W}(\omega_1)} \\
 \vdots & & & & & \\
 1 & \cos \omega_r & \cos 2\omega_r & \cdots & \cos [(r-1)\omega_r] & \frac{(-1)^r}{\hat{W}(\omega_r)}
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha(0) \\ \alpha(1) \\ \vdots \\ \alpha(r-1) \\ \delta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{H}_d(\omega_0) \\ \hat{H}_d(\omega_1) \\ \vdots \\ \hat{H}_d(\omega_r) \end{bmatrix}$$

$$\hat{H}_d(\omega_k) = \frac{(-1)^k \delta}{\hat{W}(\omega_k)} + P(\omega_k) \quad k = 0, \dots, r$$

$$\text{其中: } P(\omega_k) = \sum_{n=0}^{r-1} \alpha(n) \cos(\omega_k n)$$

可求 $r + 1$ 未知数: $\alpha(n)$ 和 δ , 但求解困难

2) 用解析法求

$$\delta = \frac{\sum_{i=0}^r a_i \hat{H}_d(\omega_i)}{\sum_{i=0}^r (-1)^i a_i / \hat{W}(\omega_i)}$$

其中：
$$a_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^r \frac{1}{\cos \omega_i - \cos \omega_k}$$

3) 求 $P(\omega)$ 值

$$\hat{H}_d(\omega_k) = \frac{(-1)^k \delta}{\hat{W}(\omega_k)} + P(\omega_k) \quad k = 0, \dots, r$$

$$c_i = P(\omega_i) = \hat{H}_d(\omega_i) - (-1)^i \frac{\delta}{\hat{W}(\omega_i)} \quad i = 0, 1, \dots, r-1$$

利用重心形式的拉格朗日内插公式得

$$P(\omega) = \frac{\sum_{i=0}^{r-1} \left(\frac{\beta_i}{\cos \omega - \cos \omega_i} \right) c_i}{\sum_{i=0}^{r-1} \left(\frac{\beta_i}{\cos \omega - \cos \omega_i} \right)}$$

其中：
$$\beta_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{r-1} \frac{1}{\cos \omega_i - \cos \omega_k}$$

4) 求 $E(\omega) = \hat{W}(\omega) \left[\hat{H}_d(\omega) - P(\omega) \right]$

5) 判断是否所有频率上皆有 $|E(\omega)| \leq \delta$
若是, 结束计算

$P(\omega)$ 为最佳逼近, δ 为波纹极值

若否, 求 $E(\omega)$ 误差曲线的 $(r+1)$ 个局部极值频率点
作为新的一组交错点组频率, 返回步骤2)
重新计算 δ 值, $P(\omega)$, $E(\omega)$

终止条件: 前后两次迭代的 δ 值相等,
即收敛于其上限

误差曲线每个格点频率上 $|E(\omega)| \leq \delta$

上午10时37分 $(r+1)$ 个极值点频率处 $|E(\omega)| = \delta$, 且正负交错。

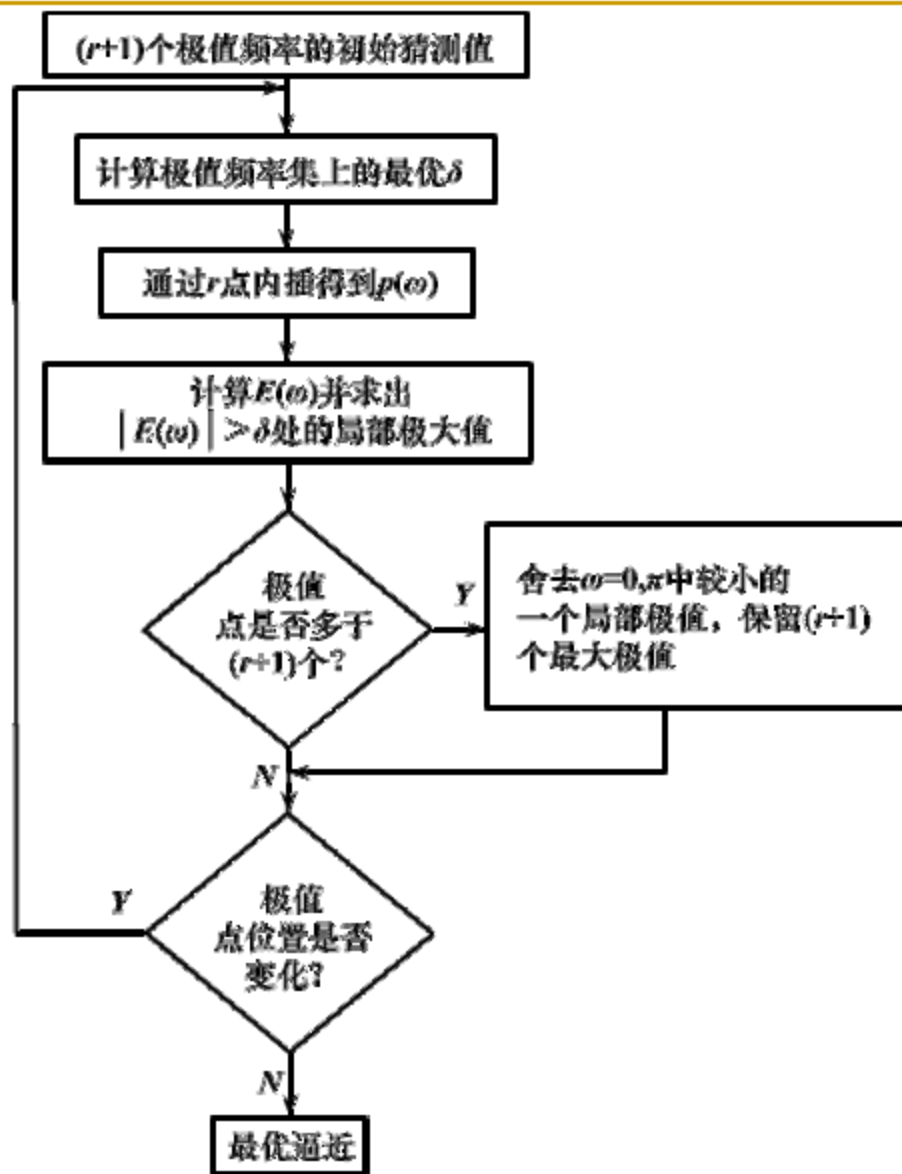


图7-24 瑞米兹交换算法流程图

加权函数及其它参数的确定:

已知 N 、 ω_c 、 ω_{st} , 求最佳 δ , 通、阻带加权误差相同

若 δ_1 、 δ_2 已知, 则可规定加权函数

$$W(\omega) = \begin{cases} \delta_1/\delta_2 & \text{当}\omega\text{在通带内} \\ 1 & \text{当}\omega\text{在阻带内} \end{cases}$$

则经Remez解法迭代得 $|E(\omega)| = \delta = \delta_2$

若 δ_1 、 δ_2 已知, 则固定 ω_c , 改变 ω_{st} 值, 重复迭代使 δ_1 、 δ_2 满足要求

计算滤波器的单位抽样响应

$$\begin{aligned} \text{由 } P(\omega) &= \sum_{n=0}^{r-1} \alpha(n) \cos(\omega n) \quad \alpha(n) \text{ 为实函数} \\ &= \operatorname{Re} \left[\sum_{n=0}^{r-1} \alpha(n) e^{-j\omega n} \right] = \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{DTFT} [\alpha(n)] \right\} \end{aligned}$$

对 $P(\omega)$ 频域抽样得 $P(k)$, L 点

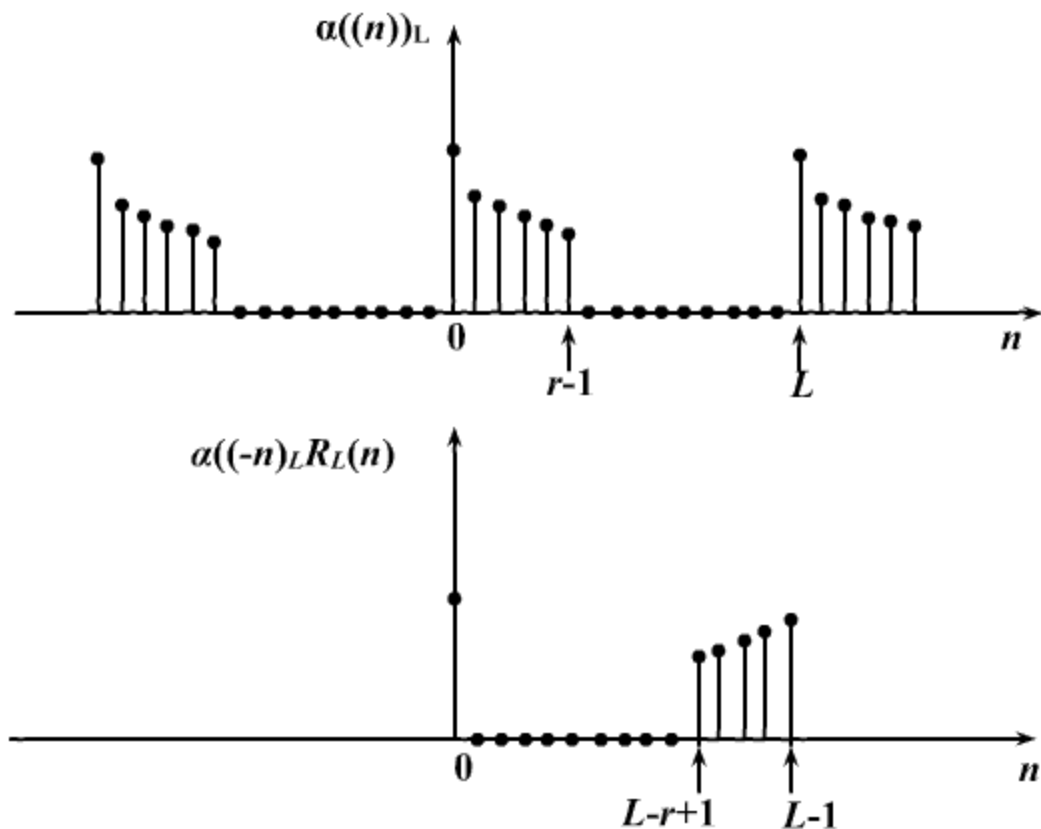
($L = 2^M \geq N$ 时不混叠)

求 $P(k)$ 的 L 点 IDFT 即得 $\alpha_{ep}(n)$

而 $\alpha(n)$ 为实数, 又在 $0 \leq n \leq r-1$ 内不混叠, 可得

$$\alpha(0) = \alpha_{ep}(n)$$

$$\alpha(n) = 2\alpha_{ep}(n), \quad 1 \leq n \leq r-1$$



$L=2^M$,若 $L-r+1 \geq r$ 就不混叠, 即 $L \geq 2r-1$,第 I 种情况的 r 最大, 为 $r=(N+1)/2$ 带入可得 $L \geq N$

图7-25 不产生混叠现象的 L 值得示意图

$$x_{ep}(n) = 1/2[x((n))_N + x^*((N-n))_N]R_N(n)$$

由 $\alpha(n)$, 求得 $h(n)$

$$\alpha(n): \tilde{a}(n), \tilde{b}(n), \tilde{c}(n), \tilde{d}(n)$$

如 $h(n)$ 偶对称, N 为奇数时

$$\alpha(n) = \tilde{a}(n) = a(n)$$

$$\text{由 } a(0) = h\left(\frac{N-1}{2}\right)$$

$$a(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) \quad n = 1, \dots, \frac{N-1}{2}$$

可求得 $h(n)$

如 $h(n)$ 偶对称, N 为偶数时

$$\alpha(n) = \tilde{b}(n) \rightarrow b(n) \rightarrow h(n)$$

五、IIR和FIR数字滤波器的比较

IIR滤波器

- $h(n)$ 无限长
- 极点位于 z 平面任意位置
- 滤波器阶次低
- 非线性相位
- 递归结构
- 不能用FFT计算
- 可用模拟滤波器设计
- 用于设计规格化的选频滤波器

FIR滤波器

- $h(n)$ 有限长
- 极点固定在原点
- 滤波器阶次高得多
- 可严格的线性相位
- 一般采用非递归结构
- 可用FFT计算
- 设计借助于计算机
- 可设计各种幅频特性和相频特性的滤波器